Vol. B21 (1990) ACTA PHYSICA POLONICA No 6

УРАВНЕНИЯ БОРНА — ИНФЕЛЬДА В ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ЭЙНШТЕЙНА

Н. А. Черников

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна*

BORN-INFELD EQUATIONS IN THE EINSTEIN UNIFIED FIELD THEORY

N. A. Chernikov

(Received November 11, 1989)

A system of equations is found for the torsion tensor. It is proved that the equality of the torsion covector to zero is equivalent to the Born-Infeld electrodynamic equations.

PACS numbers: 04.50.+h

1. *Постановка задачи*

В единой теории поля Эйнштейна аффинная связность $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ задается через несимметричный тензор $g_{\alpha\beta}$ и его частные производные по координатам x^{γ} следующей системой уравнений [1]:

$$g_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}+g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}. \tag{1}$$

С аффинной связностью и другими геометрическими понятиями, которые здесь встретятся, рекомендуем познакомиться по книге [2]. Из (1) следует, что

$$\Gamma^{\sigma}_{\sigma\gamma}+\Gamma^{\sigma}_{\gamma\sigma} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^{\gamma}}, \tag{2}$$

где g — определитель матрицы $(g_{\alpha\beta})$. Таким образом, средняя связность

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}+\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}) \tag{3}$$

* Address: Joint Institute for Nuclear Research, Laboratory of Theoretical Physics, 141980 Dubna, USSR.

эквиаффинна. Для вывода формулы (2) вводим тензор $\tilde{g}^{\alpha\beta}$, взаимный тензору $g_{\alpha\beta}$, так что

$$g_{\sigma\alpha}\tilde{g}^{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\beta = g_{\alpha\sigma}g^{\beta\sigma}, \tag{4}$$

где δ_α^β — символ Кронекера. Очевидно, $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ равняется поделенному на g алгебраическому дополнению элемента $g_{\alpha\beta}$ в матрице $(g_{\alpha\beta})$. Равенства (4) выражают известное правило Крамера для решения системы линейных уравнений. Умножим теперь (1) на $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ и свернем произведение по индексам α и β. В результате получим

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = \delta_\sigma^\alpha\Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma + \delta_\sigma^\beta\Gamma_{\gamma\beta}^\sigma = \Gamma_{\sigma\gamma}^\sigma + \Gamma_{\gamma\sigma}^\sigma. \tag{5}$$

По известному правилу дифференцирования определителя из (5) получаем (2). Мы остановились на выводе равенства (2) потому, что нам потребуется как само равенство (2), так и тензор $\tilde{g}^{\alpha\beta}$.

Чтобы получить (2), требуется только одно условие: $g \neq 0$. Однако для существования решения системы (1) нужно по крайней мере еще одно условие, а именно: $h \neq 0$, где h — определитель матрицы с элементами

$$h_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}). \tag{6}$$

Принимая оба условия $g \neq 0$, $h \neq 0$, мы найдем здесь ковектор кручения, т.е. следующую свертку:

$$S_\alpha = S_{\alpha\mu}^\mu \tag{7}$$

тензора кручения

$$S_{\alpha\beta}^\mu = \tfrac{1}{2}(\Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \Gamma_{\beta\alpha}^\mu). \tag{8}$$

2. *Преобразование системы уравнений (1)*

Рассмотрим риманово пространство N измерений с метрической формой $ds^2 = h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$. Как обычно в римановой геометрии, с помощью тензора $h_{\alpha\beta}$ и взаимного ему тензора $h^{\alpha\beta}$ будем опускать и поднимать индексы. Например,

$$S^\alpha = {}^{\alpha\sigma}S_\sigma, \qquad S_\alpha = h_{\alpha\sigma}S^\sigma,$$

$$h_{\alpha\sigma}\varphi^{\sigma\beta} = \varphi_\alpha^\beta = \varphi_{\alpha\sigma}h^{\sigma\beta},$$

$$T_{\alpha\beta\gamma} = T_{\alpha\beta}^\sigma h_{\sigma\gamma}, \qquad T_{\alpha\beta}^\mu = T_{\alpha\beta\sigma}h^{\sigma\mu}. \tag{9}$$

Рассматриваемое пространство снабдим связностью Кристоффеля, равной

$$\begin{Bmatrix}\mu\\ \alpha\beta\end{Bmatrix} = \tfrac{1}{2}h^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial h_{\sigma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial h_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}\right). \tag{10}$$

Ковариантное дифференцирование с такой связностью будем обозначать буквой $\mathscr{D}$. Например,

$$\mathscr{D}_\gamma \varphi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \gamma\alpha \end{Bmatrix} \varphi_{\sigma\beta} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \gamma\beta \end{Bmatrix} \varphi_{\alpha\sigma}. \tag{11}$$

Антисимметричную часть тензора $g_{\alpha\beta}$ обозначим $\varphi_{\alpha\beta}$:

$$\varphi_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha}). \tag{12}$$

Если $\varphi_{\alpha\beta} = 0$, то связность (10) является решением системы уравнений (1). Поэтому в общем случае естественно искать решение системы (1) в виде суммы

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} + T^\mu_{\alpha\beta}, \tag{13}$$

в которой первое слагаемое является заданной связностью (10), а второе — искомым тензором. Подставляя (13) в (1), получаем уравнение для тензора T:

$$T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} + \varphi^\sigma_\beta T_{\gamma\alpha\sigma} - \varphi^\sigma_\alpha T_{\beta\gamma\sigma} + \varphi_{\alpha\beta\gamma} = 0, \tag{14}$$

где $\varphi_{\alpha\beta\gamma} = \mathscr{D}_\gamma \varphi_{\alpha\beta}$ есть ковариантная производная (11). Над всеми слагаемыми, входящими в равенство (14), выполним операцию, превращающую тензор вида $T_{\alpha\beta\gamma}$ в тензор $T_{(\alpha\beta\gamma)}$, равный

$$T_{(\alpha\beta\gamma)} = \tfrac{1}{3}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\gamma\alpha\beta} + T_{\beta\gamma\alpha}). \tag{15}$$

Такая операция над тензором $\varphi^\sigma_\beta T_{\gamma\alpha\sigma} - \varphi^\sigma_\alpha T_{\beta\gamma\sigma}$ дает нуль. Поэтому из (15) получаем следствие

$$2T_{(\alpha\beta\gamma)} + \varphi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \tag{16}$$

так что

$$T_{\beta\gamma\alpha} + T_{\gamma\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta\gamma} - \tfrac{3}{2}\varphi_{(\alpha\beta\gamma)}.$$

Подставляя это в (14), приходим к системе уравнений

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \varphi^\sigma_\beta T_{\gamma\alpha\sigma} - \varphi^\sigma_\alpha T_{\beta\gamma\sigma} + \varphi_{\alpha\beta\gamma} - \tfrac{3}{2}\varphi_{(\alpha\beta\gamma)}. \tag{17}$$

Разобьем тензор $T_{\alpha\beta\gamma}$ на части

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} + T_{\beta\alpha\gamma}) \quad \text{и} \quad S_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}(T_{\alpha\beta\gamma} - T_{\beta\alpha\gamma}). \tag{18}$$

В результате из (17) получим систему уравнений

$$P_{\alpha\beta\gamma} = \varphi^\sigma_\beta S_{\gamma\alpha\sigma} - \varphi^\sigma_\alpha S_{\beta\gamma\sigma}, \tag{19}$$

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \varphi^\sigma_\beta P_{\gamma\alpha\sigma} - \varphi^\sigma_\alpha P_{\beta\gamma\sigma} + \varphi_{\alpha\beta\gamma} - \tfrac{3}{2}\varphi_{(\alpha\beta\gamma)}, \tag{20}$$

эквивалентную системе уравнений (1). Сразу же заметим, что тензор $S_{\alpha\beta\sigma}h^{\sigma\mu} = S^{\mu}_{\alpha\beta}$ есть тензор кручения (8), поскольку $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha} = T^{\mu}_{\alpha\beta}-T^{\mu}_{\beta\alpha}$. Что касается тензора $P^{\mu}_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta\sigma}h^{\mu\sigma}$, то он равняется разности

$$P^{\mu}_{\alpha\beta} = \overset{*}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\beta} - \begin{Bmatrix}\mu\\ \alpha\beta\end{Bmatrix} \tag{21}$$

средней связности (3) и связности (10). Из (16), равно как из (19) и (20), следует, что

$$P_{(\alpha\beta\gamma)} = 0; \tag{22}$$

$$2S_{(\alpha\beta\gamma)} + \varphi_{(\alpha\beta\gamma)} = 0. \tag{23}$$

В силу равенства (22) уравнения геодезических

$$\frac{dx^{\mu}}{d\tau} = p^{\mu}, \qquad \frac{dp^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} = 0$$

имеют первый интеграл

$$(p, p) = g_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta},$$

равный квадрату массы частицы. Очевидно, что $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} = \overset{*}{\Gamma}{}^{\mu}_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta}$ и что $g_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} = h_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta}$.

3. *Формула для свертки* $\varphi^{\beta}_{\gamma}S^{\gamma}_{\alpha\beta}$

Из (21), (3) и (2) следует равенство

$$P^{\mu}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} - \begin{Bmatrix}\mu\\ \alpha\mu\end{Bmatrix},$$

а из (10) — равенство

$$\begin{Bmatrix}\mu\\ \alpha\mu\end{Bmatrix} = \frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial x^{\alpha}}. \tag{24}$$

Значит,

$$P^{\mu}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}\frac{h}{g}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{g}{h}\right). \tag{25}$$

Так как

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\sigma}(\delta^{\sigma}_{\beta} - \varphi^{\sigma}_{\beta}), \tag{26}$$

то $g = hJ$, где J — определитель матрицы $(\delta^{\sigma}_{\beta}-\varphi^{\sigma}_{\beta})$:

$$J = \det(\delta^{\sigma}_{\beta} - \varphi^{\sigma}_{\beta}). \tag{27}$$

Из (25) находим

$$P^{\mu}_{\alpha\mu} = h^{\beta\gamma}P_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ln\sqrt{|J|}. \tag{28}$$

С другой стороны, из равенства (19) находим

$$h^{\beta\gamma}P_{\alpha\beta\gamma} = \varphi^{\beta}_{\gamma}S^{\gamma}_{\alpha\beta}. \tag{29}$$

Следовательно,

$$\varphi^{\beta}_{\gamma}S^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\ln\sqrt{|J|}. \tag{30}$$

4. *Система уравнений для тензора кручения*

Подставим теперь (19) в (20) и получим следующую систему уравнений для тензора кручения:

$$S_{\alpha\beta\gamma}+\varphi^{\mu}_{\alpha}\varphi^{\sigma}_{\gamma}S_{\mu\beta\sigma}+\varphi^{\nu}_{\beta}\varphi^{\sigma}_{\gamma}S_{\alpha\nu\sigma} =$$

$$= \varphi^{\mu}_{\alpha}\varphi^{\nu}_{\beta}(S_{\nu\gamma\mu}+S_{\gamma\mu\nu})+\varphi_{\alpha\beta\gamma}-\tfrac{3}{2}\,\varphi_{(\alpha\beta\gamma)}. \tag{31}$$

Согласно (23)

$$S_{\nu\gamma\mu}+S_{\gamma\mu\nu} = -S_{\mu\nu\gamma}-\tfrac{3}{2}\,\varphi_{(\mu\nu\gamma)}. \tag{32}$$

Подставляя это в (31), получаем

$$S_{\alpha\beta\gamma}+\varphi^{\mu}_{\alpha}\varphi^{\nu}_{\beta}S_{\mu\nu\gamma}+\varphi^{\mu}_{\alpha}\varphi^{\sigma}_{\gamma}S_{\mu\beta\sigma}+\varphi^{\nu}_{\beta}\varphi^{\sigma}_{\gamma}S_{\alpha\nu\sigma} = \Psi_{\alpha\beta\gamma}, \tag{33}$$

где

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\beta\gamma}-\tfrac{3}{2}\,\varphi_{(\alpha\beta\gamma)}-\tfrac{3}{2}\,\varphi^{\mu}_{\alpha}\varphi^{\nu}_{\beta}\varphi_{(\mu\nu\gamma)}. \tag{34}$$

Вместо того, чтобы решать систему уравнений (1) с N^3 неизвестными $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, можно решать систему уравнений (33) с $\frac{1}{2}N^2(N-1)$ неизвестными $S_{\alpha\beta\gamma}$. Действительно, если известен тензор S, то из (19) находим тензор P, а вместе с тем и связность

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \left\{{\mu \atop \alpha\beta}\right\} + P^{\mu}_{\alpha\beta}+S^{\mu}_{\alpha\beta}, \tag{35}$$

удовлетворяющую системе уравнений (1).

Для дальнейшего нам удобно записать систему уравнений (33), подняв индекс γ:

$$S^{\gamma}_{\alpha\beta}+\varphi^{\mu}_{\alpha}\varphi^{\nu}_{\beta}S^{\gamma}_{\mu\nu}-\varphi^{\mu}_{\alpha}\varphi^{\gamma}_{\sigma}S^{\sigma}_{\mu\beta}-\varphi^{\nu}_{\beta}\varphi^{\gamma}_{\sigma}S^{\sigma}_{\alpha\nu} = \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta}. \tag{36}$$

5. *Справка об аффинорах*

Будем обозначать φ — аффинор, т.е. смешанный двухвалентный тензор с компонентами φ^{β}_{α}. Символом φ^n будем обозначать степень n аффинора φ. Единичный аффинор (компоненты которого представляются символом Кронекера δ^{β}_{α}), как и число 1, будем обозначать символом 1. Так, $\varphi^0 = 1$. Если F — число, то скалярный аффинор $F \cdot 1$ (он имеет компоненты $F\delta_\alpha^\beta$) будем обозначать просто F.

Рассмотрим дальше характеристический полином $J(\lambda)$ аффинора φ, равный

$$J(\lambda) = \det(\lambda\delta_\alpha^\beta - \varphi_\alpha^\beta).$$

В частности, $J(1) = J$, где J есть (27). Ввиду антисиметрии тензора $\varphi_{\alpha\beta}$ полином $J(\lambda)$ при четных $N = 2k$ содержит только четные степени аргумента λ, а при нечетных $N = 2k+1$ — только нечетные. Таким образом, если $N = 2k$, то $J(\lambda) = \Pi(\lambda^2)$, а если $N = 2k+1$, то $J(\lambda) = \lambda\Pi(\lambda^2)$, где $\Pi(\lambda^2)$ в обоих случаях можно привести к виду

$$\Pi(\lambda^2) = (\lambda^2 - U_1)(\lambda^2 - U_2)\ldots(\lambda^2 - U_k).$$

Согласно теореме Гамильтона-Кэли [3] аффинор является корнем своего характеристического многочлена, то есть $J(\varphi) = 0$.

Если все числа $U_1, \ldots, U_k$ не равны 1 (то есть если $J \neq 0$), то существует аффинор $(1-\varphi^2)^{-1}$. Подсчитаем его сначала при четных $N = 2k$. Разность $\Pi(1) - \Pi(\lambda^2)$ делится без остатка на $1-\lambda^2$ (теорема Безу). Следовательно,

$$\Pi(1) - \Pi(\lambda^2) = Q(\lambda^2)(1-\lambda^2),$$

где $Q(\lambda^2)$ — полином от λ^2 степени $k-1$. Так как $\Pi(1) = J$ и $\Pi(\varphi^2) = 0$, то

$$\frac{1}{1-\varphi^2} = \frac{1}{J}Q(\varphi^2).$$

Если $\Pi(\lambda^2) = \lambda^{2k} + C_1\lambda^{2k-2} + \ldots + C_k$, то $J = \Pi(1) = 1 + C_1 + C_2 + \ldots C_k$ и $Q(\lambda^2) = \lambda^{2k-2} + B_1\lambda^{2k-4} + \ldots B_{k-1}$, где $B_1 = 1 + C_1$, $B_2 = 1 + C_1 + C_2$ и так далее до $B_{k-1} = 1 + C_1 + C_2 + \ldots + C_{k-1}$. При нечетных $N = 2k+1$ имеем

$$\frac{\varphi}{1-\varphi^2} = \frac{\varphi}{J}Q(\varphi^2),$$

поскольку под знаком φ полином $\Pi(\varphi^2)$ равняется нулю. Теперь находим при $N = 2k+1$

$$\frac{1}{1-\varphi^2} = 1 + \frac{\varphi^2}{1-\varphi^2} = 1 + \frac{\varphi^2}{J}Q(\varphi^2).$$

Если все числа $U_1, \ldots, U_k$ по модулю меньше 1, то аффинор $(1-\varphi^2)^{-1}$ можно разложить в ряд

$$\frac{1}{1-\varphi^2} = 1 + \varphi^2 + \varphi^4 + \ldots .$$

В физически важном случае $N = 4$ характеристический полином имеет вид

$$J(\lambda) = \Pi(\lambda^2) = (\lambda^2 - u)(\lambda^2 - v),$$

а следовательно,

$$\frac{1}{1-\varphi^2} = \frac{1-u-v+\varphi^2}{(1-u)(1-v)},$$

Далее, в физически важном случае тензор $h_{\alpha\beta}$ имеет сигнатуру $(1, -1, -1, -1)$. С помощью антисимметричного по всем значкам тензора $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$, причем $\varepsilon^{0123}\sqrt{-h} = 1$, введем дуальный к $\varphi_{\alpha\beta}$ тензор $\varphi^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}$. Обозначим

$$F = \tfrac{1}{2}(\varphi^\alpha_\alpha\varphi^\beta_\beta - \varphi^\alpha_\beta\varphi^\beta_\alpha) = \tfrac{1}{2}\varphi^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta},$$

$$G = \tfrac{1}{4}\varphi^{*\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} = \frac{\varphi_{01}\varphi_{23}+\varphi_{02}\varphi_{31}+\varphi_{03}\varphi_{12}}{\sqrt{-h}}.$$

Аффинор φ и аффинор φ^* связаны друг с другом двумя равенствами

$$\varphi\varphi^* = -G, \qquad \varphi^2+F = \varphi^{*2}.$$

Умножая второе из этих равенств на φ и пользуясь первым, получаем

$$\varphi^3+F\varphi = -G\varphi^*.$$

Умножая полученное равенство на φ, приходим к характеристическому уравнению

$$\varphi^4+F\varphi^2 = G^2.$$

Таким образом,

$$u+v = -F, \qquad uv = -G^2.$$

Следовательно,

$$J = 1+F-G^2,$$

$$\frac{1}{1-\varphi^2} = \frac{1+F+\varphi^2}{1+F-G^2} = \frac{1+\varphi^{*2}}{1+F-G^2}.$$

Последнюю формулу можно получить, перемножив $1-\varphi^2$ и $1+\varphi^{*2}$. Наконец, имеем

$$\frac{\varphi}{1-\varphi^2} = \frac{\varphi+F\varphi+\varphi^3}{1+F-G^2} = \frac{\varphi-G\varphi^*}{1+F-G^2}.$$

6. *Формула для ковектора кручения*

Умножим равенство (36) на $(\varphi^n)^\beta_\gamma$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, и свернем произведение по индексам β и γ. В результате получим

$$(\varphi^n)^\beta_\gamma S^\gamma_{\alpha\beta} = (\varphi^n)^\beta_\gamma \Psi^\gamma_{\alpha\beta}+(\varphi^{n+2})^\beta_\gamma S^\gamma_{\alpha\beta}. \tag{37}$$

Рассмотрим сначала случай, когда все числа $U_1, \ldots, U_k$ по модулю меньше 1. Просуммируем равенство (37) по n от p до ∞ и получим

$$(\varphi^p)^\beta_\gamma S^\gamma_{\alpha\beta} = \left(\frac{\varphi^p}{1-\varphi^2}\right)^\beta_\gamma \Psi^\gamma_{\alpha\beta}. \tag{38}$$

Тензор $(\varphi^n)^{\alpha\beta}$ симметричен при четных $n = 2k$ и антисимметричен при нечетных $n = 2k+1$. Поэтому

$$(\varphi^{2k})^\beta_\gamma \Psi^\gamma_{\alpha\beta} = (\varphi^{2k})^{\beta\gamma}\varphi_{\alpha\beta\gamma} + \tfrac{3}{2}\,\varphi^\mu_\alpha(\varphi^{2k+1})^{\beta\gamma}\varphi_{(\mu\beta\gamma)}, \tag{39}$$

$$(\varphi^{2k+1})^\beta_\gamma \Psi^\gamma_{\alpha\beta} = (\varphi^{2k+1})^{\beta\gamma}[\tfrac{3}{2}\,\varphi_{(\alpha\beta\gamma)} - \varphi_{\alpha\beta\gamma}]. \tag{40}$$

Следовательно, выражение

$$T^{(k)}_\alpha = (\varphi^{2k})^\beta_\gamma \Psi^\gamma_{\alpha\beta} - \varphi^\mu_\alpha(\varphi^{2k+1})^\beta_\gamma \Psi^\gamma_{\alpha\beta} \tag{41}$$

равняется

$$T^{(k)}_\alpha = (\varphi^{2k})^{\beta\gamma}\varphi_{\alpha\beta\gamma} + \varphi^u_\alpha(\varphi^{2k+1})^{\beta\gamma}\varphi_{\mu\beta\gamma}. \tag{42}$$

Продифференцировав тождество

$$(\psi^{n+1})^\gamma_\alpha = (\varphi^n)^\gamma_\mu \psi^\mu_\alpha,$$

получим

$$(\varphi^n)^{\beta\gamma}\varphi_{\alpha\beta\gamma} = \mathscr{D}_\gamma(\varphi^{n+1})^\gamma_\alpha - \varphi^\mu_\alpha\,\mathscr{D}_\gamma(\varphi^n)^\gamma_\mu.$$

Подставив это выражение в (42), получим

$$T^{(k)}_\alpha = (1-\varphi^2)^\mu_\alpha \mathscr{D}_\gamma(\varphi^{2k+1})^\gamma_\mu + \varphi^\mu_\alpha \mathscr{D}_\gamma(\varphi^{2k+2} - \varphi^{2k})^\gamma_\mu. \tag{43}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=p}^{\infty} T^{(k)}_\alpha = (1-\varphi^2)^\mu_\alpha \mathscr{D}_\gamma\left(\frac{\varphi^{2p+1}}{1-\varphi^2}\right)^\gamma_\mu - \varphi^\mu_\alpha \mathscr{D}_\gamma(\varphi^{2p})^\gamma. \tag{44}$$

Но из формулы (38) легко видеть, что

$$(\varphi^{2p})^\beta_\gamma S^\gamma_{\alpha\beta} - \varphi^\mu_\alpha(\varphi^{2p+1})^\beta_\gamma S^\gamma_{\mu\beta} = \sum_{k=p}^{\infty} T^{(k)}_\alpha, \tag{45}$$

где $T^{(k)}_\alpha$ есть (41), а следовательно, и (43). Значит, в частности, при $p = 0$ имеем

$$S_\alpha - \varphi^\mu_\alpha \varphi^\beta_\gamma S^\gamma_{\mu\beta} = (1-\varphi^2)^\mu_\alpha \mathscr{D}_\gamma\left(\frac{\varphi}{1-\varphi^2}\right)^\gamma_\mu. \tag{46}$$

Из формул (46) и (30) находим ковектор кручения в виде

$$S_\alpha = \frac{(1-\varphi^2)^\mu_\alpha}{\sqrt{|J|}}\,\mathscr{D}_\gamma\left(\frac{\varphi\sqrt{|J|}}{1-\varphi^2}\right)^\gamma_\mu. \tag{47}$$

В таком виде формула (47) оказывается верной, и в общем случае $J \neq 0$. Чтобы доказать это, надо для аффиноров $(1-\varphi^2)^{-1}$ и $\varphi(1-\varphi^2)^{-1}$ воспользоваться выражениями, приведенными в разделе (5). На основании (37) имеем

$$S_\alpha = \left(\frac{Q(\varphi^2)}{J}\right)^\beta_\gamma \Psi^\gamma_{\alpha\beta}$$

в случае $N = 2k$ и

$$S_\alpha = \left(1 + \frac{\varphi^2}{J} Q(\varphi^2)\right)^\beta_\gamma \Psi^\gamma_{\alpha\beta}$$

в случае $N = 2k+1$. На основании той же формулы (37) в обоих случаях имеем

$$\varphi^\beta_\gamma S^\gamma_{\alpha\beta} = \left(\frac{\varphi}{J} Q(\varphi^2)\right)^\beta_\gamma \Psi^\gamma_{\alpha\beta} = \left(\varphi + \frac{\varphi^3}{J} Q(\varphi^2)\right)^\beta_\gamma \Psi^\gamma_{\alpha\beta}.$$

Дальше составляем комбинацию (46), которая равна

$$\frac{1}{J}\left\{T^{(k-1)}_\alpha + B_1 T^{(k-2)}_\alpha + \ldots + B_{k-1} T^{(0)}_\alpha\right\}$$

в случае $N = 2k$ и равна

$$T^{(0)}_\alpha + \frac{1}{J}\left\{T^{(k)}_\alpha + B_1 T^{(k-1)}_\alpha + \ldots + B_{k-1} T^{(1)}_\alpha\right\}$$

в случае $N = 2k+1$. Здесь $T^{(k)}_\alpha$ есть (41). Пользуясь формулой (43), в обоих случаях находим[1]

$$S_\alpha - \varphi^\mu_\alpha \varphi^\beta_\gamma S^\gamma_{\mu\beta} = (1-\varphi^2)^\mu_\alpha \mathscr{D}_\gamma \left(\frac{\varphi}{J} Q(\varphi^2)\right)^\gamma_\mu. \tag{48}$$

Из формул (48) и (30) получаем ковектор кручения в виде

$$S_\alpha = \frac{(1-\varphi^2)^\mu_\alpha}{\sqrt{|J|}} \mathscr{D}_\gamma \left(\frac{\varphi}{\sqrt{|J|}} Q(\varphi^2)\right)^\gamma_\mu. \tag{49}$$

Согласно разделу 5 формула (49) совпадает с формулой (47).

7. *Взаимный тензор* $\tilde{g}^{\alpha\beta}$

Взаимный тензор $\tilde{g}^{\alpha\beta}$, определенный условием (4), равняется

$$\tilde{g}^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{1-\varphi}\right)^{\alpha\beta},$$

---

[1] Впрочем, если формула (48) доказана для $N = 2k+1$, то тем самым она доказана и для $N = 2k$.

так как

$$\tilde{g}_{\alpha}^{\beta} = h_{\alpha\sigma}\tilde{g}^{\sigma\beta} = \left(\frac{1}{1-\varphi}\right)_{\tilde{\alpha}}^{\beta}.$$

Если обозначим

$$\tilde{h}^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(g^{\alpha\beta}+g^{\beta\alpha}), \qquad \tilde{\varphi}^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\tilde{g}^{\alpha\beta}-\tilde{g}^{\beta\alpha}),$$

то

$$\tilde{h}^{\alpha\beta} = \left(\frac{1}{1-\varphi^2}\right)^{\alpha\beta}, \qquad \tilde{\varphi}^{\alpha\beta} = \left(\frac{\varphi}{1-\varphi^2}\right)^{\alpha\beta}.$$

Следовательно, ковектор кручения (47) равняется

$$S_\alpha = \frac{(1-\varphi^2)_{\alpha\mu}}{\sqrt{|J|}}\mathscr{D}_\gamma(\sqrt{|J|}\,\tilde{\varphi}^{\mu\gamma}). \tag{50}$$

Ввиду (24) и антисимметрии тензора $\tilde{\varphi}^{\mu\nu}$

$$S_\alpha = \frac{(1-\varphi^2)_{\alpha\mu}}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(\sqrt{|g|}\,\tilde{\varphi}^{\mu\gamma}). \tag{51}$$

В число дифференциальных уравнений единой теории поля входят уравнения $S_\alpha = 0$. Из формулы (51) видно, что они эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(\sqrt{|g|}\,\tilde{\varphi}^{\mu\gamma}) = 0. \tag{52}$$

Между прочим, чтобы составить уравнения (52), требуется только единственное условие $g \neq 0$.

8. *Уравнения Борна—Инфельда*

В физически важном случае

$$\frac{\varphi\sqrt{|J|}}{1-\varphi^2} = \frac{\varphi}{\sqrt{|J|}}Q(\varphi^2) = \frac{\varphi - G\varphi^*}{\sqrt{1+F-G^2}}.$$

Согласно формуле (49)

$$S_\alpha = \frac{\delta_\alpha^\mu - \varphi_\alpha^\nu\varphi_\nu^\mu}{\sqrt{1+F-G^2}}\mathscr{D}_\gamma\frac{\varphi_\mu^\gamma - G\varphi^{*\gamma}_{\ \mu}}{\sqrt{1+F-G^2}}, \tag{53}$$

а значит

$$\mathscr{D}_\gamma\frac{\varphi_\alpha^\gamma - G\varphi_\alpha^{*\gamma}}{\sqrt{1+F-G^2}} = \frac{\delta_\alpha^\mu + \varphi_\alpha^{*\nu}\varphi_\nu^{*\mu}}{\sqrt{1+F-G^2}}S_\mu. \tag{54}$$

Из (53) и (54) следует, что уравнения Эйнштейна $S_\alpha = 0$ эквивалентны уравнениям нелинейной электродинамики Борна—Инфельда [4]

$$\mathscr{D}_\gamma \frac{\varphi_\alpha^\gamma - G\varphi_\alpha^{*\gamma}}{\sqrt{1+F-G^2}} = 0 \tag{55}$$

в римановом мире с метрической формой $ds^2 = h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$. Ввиду (24) уравнения (55) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\varphi^{\mu\gamma} - G\varphi^{*\mu\gamma}}{\sqrt{1+F-G^2}}\sqrt{-h}\right) = 0. \tag{56}$$

Другой подход к этой проблеме сделан в работах [5—6].

9. *Формула для свертки* $(\varphi^{2p+1})_\gamma^\beta S_{\alpha\beta}^\gamma$

Не только при $p = 0$, но и при всех $p = 1, 2, 3, \ldots$ свертка $(\varphi^{2p+1})_\gamma^\beta S_{\alpha\beta}^\gamma$ является градиентом скалярной функции. Действительно, пусть $f = \mu\varphi(1-\mu^2\varphi^2)^{-1}$, где μ — комплексный параметр. Тогда

$$f_\gamma^\beta \Psi_{\alpha\beta}^\gamma = f^{\beta\gamma}[\tfrac{3}{2}\varphi_{(\alpha\beta\gamma)} - \varphi_{\alpha\beta\gamma}] = \tfrac{1}{2}f^{\beta\gamma}\varphi_{\beta\gamma\alpha}.$$

Так как ковариантная производная $\mathscr{D}_\alpha$ от метрического тензора $h^{\beta\gamma}$ и от объемного тензора $\varepsilon^{\mu\nu\beta\gamma}$ равняется нулю, то

$$\varphi^{\beta\gamma}\varphi_{\beta\gamma\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha}, \qquad \varphi^{*\beta\gamma}\varphi_{\beta\gamma\alpha} = 2\frac{\partial G}{\partial x^\alpha}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\mu\varphi}{1-\mu\varphi^2}\right)_\gamma^\beta \Psi_{\alpha\beta}^\gamma = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln(1+\mu F-\mu^2G^2). \tag{57}$$

Полагая $\mu = 1$, отсюда в силу (38) получаем

$$\varphi_\gamma^\beta S_{\alpha\beta}^\gamma = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln(1+F-G^2), \tag{58}$$

что является частным случаем формулы (30). Далее, из равенства (37) следует

$$(\varphi^{2p+3})_\gamma^\beta S_{\alpha\beta}^\gamma = \varphi_\gamma^\beta S_{\alpha\beta}^\gamma - \sum_{k=0}^{p}(\varphi^{2k+1})_\gamma^\beta \Psi_{\alpha\beta}^\gamma. \tag{59}$$

Разложим (57) в ряд по степеням μ. Имеем

$$\frac{\mu\varphi}{1-\mu\varphi^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi^{2k+1}\mu^{k+1},$$

$$\ln(1+\mu F-\mu^2G^2) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k\mu^{k+1},$$

где

$$z_k = (-1)^k \sum_{s=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{(k-s)!}{s!(k+1-2s)!} G^{2s} F^{k+1-2s}.$$

Суммирование по s в формуле для Z_k ведется от нуля до целой части числа $\frac{1}{2}(k+1)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем

$$(\varphi^{2k+1})^{\beta}_{\gamma} \Psi^{\gamma}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(\varphi^{2k+1})^{\beta\gamma} \varphi_{\beta\gamma\alpha} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} z_k. \tag{60}$$

Из (59), (58) и (60) находим

$$(\varphi^{2p+3})^{\beta}_{\gamma} S^{\gamma}_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left\{ \ln(1 + F - G^2) - \sum_{k=0}^{p} z_p \right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Эйнштейн, *Собрание научных трудов*, т. II, Наука, М. 1966, статьи 79, 127, 130, 134, 138, 141, 143—146.

[2] А. П. Норден, *Пространства аффинной связности*, Гостехиздат, М.—Л. 1950.

[3] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Гостехиздат, М. 1953.

[4] M. Born, L. Infeld, *Proc. R. Soc.* **A144**, 425 (1934).

[5] Н. А. Черников, Н. С. Шавохина, *Изв. вузов. Математика*, Казань 1986, № 4, с. 62.

[6] Н. С. Шавохина, *Изв. вузов. Математика*, Казань 1989, № 7, с. 77.