

SUR LA VALEUR DES THEOREMES ASYMPTOTIQUES AUX HAUTES ENERGIES DANS LA THEORIE LOCALE DES CHAMPS QUANTIFIES

On the Validity of the Asymptotic Theorems of High Energies in the Local Theory of Quantized Fields

TRÂN HỮU PHÁT

Université de Hanoi*

(Reçu le 17 février 1970)

Dans ce travail, nous démontrons qu'il est possible d'obtenir aussi les relations asymptotiques dans une théorie des champs quantifiés où le principe de causalité peut être modifié. Cela signifie que la vérification expérimentale de la relation du type Pomeranchuk peut ne nous donner aucune information sur la validité des principes fondamentaux de la théorie des champs quantifiés. On ne peut pas servir des relations asymptotiques comme critère bien fondé pour vérifier la validité de ces principes.

1. Tout d'abord nous citons ici les principes fondamentaux de la théorie des champs quantifiés

Ce sont:

I — Le principe de covariance relativiste.

II — Le principe de causalité, prononcé sous la forme de Bogolubov

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} S^+ \right) = 0 \quad \text{quand} \quad x \lesssim y.$$

III — Le principe de l'unitarité $SS^+ = 1$.

IV — Le principe de spectralité (selon ce principe, il existe un système d'états physiques avec énergie positive).

A part ces principes, il faut adopter certaine condition mathématique sur l'ordre de croissance des amplitudes de dispersion.

En se basant sur ces principes, on a démontré l'existence des relations asymptotiques entre les sections totales et entre les sections différentielles à hautes énergies, par l'exemple, la relation typique de Pomeranchuk [1, 2]:

$$\sigma_{\text{tot}}(\pi^+p) \approx \sigma_{\text{tot}}(\pi^-p)$$

* Adresse: Université de Hanoi, Viet-Nam.

Ces relations sont la conséquence des principes fondamentaux de la théorie locale relativiste des champs quantifiés, en particulier, du principe de causalité. A l'heure actuelle, on les considère comme critères pour vérifier la validité du principe de causalité à hautes énergies.

Sous une forme alternative, le principe de causalité signifie que l'amplitude de dispersion est une fonction analytique définie dans le plan de l'énergie complexe et en outre il a l'ordre de croissance polynomial quand l'énergie tend vers l'infini.

Comme nous avons su, une fonction $f(z)$ s'appelle analytique si sa partie réelle $u(x, y)$ et sa partie imaginaire $v(x, y)$ vérifient l'équation de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x \quad (1.1)$$

et l'ordre de croissance polynomial signifie que

$$|f(z)| < A|z|^n \text{ quand } z \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

où A est une constante positive quelconque et n est un nombre entier.

De là, il existe deux possibilités de modification du principe de causalité. Sous la forme mathématique, nous pouvons les prononcer comme suit:

1) L'amplitude de dispersion est encore une fonction analytique, mais l'ordre de croissance de l'amplitude est supérieur à l'ordre de croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'on a

$$|f(z)| > A e^{\alpha|z|^\beta} \quad (1.3)$$

quand z tend vers l'infini.

2) L'amplitude de dispersion n'est pas la fonction analytique c'est-à-dire sa partie réelle et sa partie imaginaire ne vérifient pas l'équation de Cauchy-Riemann. Ils vérifient alors une équation plus compliquée

$$u_x = g(v_y, u, v) \quad u_y = h(v_x, u, v). \quad (1.4)$$

La première possibilité a été étudiée par Logunov dans le travail [3]. Maintenant nous étudions la deuxième possibilité.

2. Quand l'amplitude de dispersion n'est pas une fonction analytique au sens propre, sa partie réelle $u(x, y)$ et sa partie imaginaire $v(x, y)$ vérifient l'équation générale (1.4).

Dans l'esprit de la théorie linéaire, nous pouvons supposer que g et h sont deux fonctions linéaires de leurs arguments. Alors le cas général est la combinaison de deux cas suivants:

1) $u(x, y)$ et $v(x, y)$ vérifient l'équation

$$u_y = \frac{1}{p(x, y)} v_y \quad u_x = -\frac{1}{p(x, y)} v_x \quad (2.1)$$

$$p(x, y) > 0$$

2) $u(x, y)$ et $v(x, y)$ vérifient l'équation

$$u_x = v_y + au + bv \quad u_y = -v_x + cu + dv. \quad (2.2)$$

Dans le premier cas, $f(z)$ s'appelle fonction p -analytique [4]; Dans le deuxième cas, elle s'appelle fonction analytique généralisée de Vékua [5].

Dans ce travail, nous nous bornons aux fonctions p -analytiques¹.

D'après Poloji, la fonction $p(x, y)$ dans l'équation (1.4) s'appelle fonction caractéristique et nous devons poser sur elle la condition mathématique suivante:

$p(x, y)$ et ses premières dérivées partielles sont régulières et continues dans tout le plan fini.

Nous avons alors le théorème suivant, analogue au théorème de Phragmen-Lindelof que nous appelons théorème généralisé de Phragmen-Lindelof:

Théorème généralisé de Phragmen-Lindelof²:

Etant donnée une fonction p -analytique $f(z)$ de la variable complexe

$$z = re^{i\theta}.$$

Supposons qu'elle soit p -analytique dans le domaine D qui est borné par deux droites formant un angle $\frac{\pi}{\alpha}$ à l'origine et aussi p -analytique sur ces droites elles-mêmes. Supposons en outre que

$$|f(z)| \leq M$$

sur ces deux droites et que l'on ait

$$f(z) \sim 0 (e^{i\beta})$$

uniformément dans cet angle quand $z \rightarrow \infty$ et $\beta < \alpha$.

Alors l'inégalité

$$|f(z)| \leq M$$

est vérifié dans tout le domaine.

Si la fonction $f(z)$ tend vers a quand z tend vers l'infini sur une de ces deux droites et $f(z)$ tend vers b sur l'autre droite quand z tend vers l'infini, on a alors $a = b$ et $f(z)$ tend vers a uniformément dans cet angle.

En se basant sur ce théorème nous pouvons montrer les relations asymptotiques pour les processus suivantes:

$$a_1 + b_1 \rightarrow a_2 + b_2 \quad (\text{I})$$

$$\bar{a}_2 + b_1 \rightarrow \bar{a}_1 + b_2. \quad (\text{II})$$

Pour simplifier, nous supposons que les particules participant dans ces processus sont scalaires. Nous pouvons généraliser aisément les résultats obtenus pour les autres cas.

La démonstration de la relation asymptotique entre les processus (I) et (II) est analogue à celle du travail [6].

¹ Dans le cas des fonctions analytiques généralisées de Vékua nous obtenons aussi les résultats analogues.

² La démonstration est donnée dans l'appendice.

La section différentielle du processus (I) est donnée par la formule suivante:

$$\frac{d\sigma^{\text{I}}(s, t)}{dt} = \frac{1}{64\pi s k_{\text{I}}^2} |T^{\text{I}}(s, t)|^2 \quad (2.3)$$

où

$$k_{\text{I}} = \frac{1}{4s} [s^2 - 2s(\mu_1^2 + m_1^2) + (\mu_1^2 - m_1^2)^2].$$

La section différentielle du processus (II) est égale à

$$\frac{d\sigma^{\text{II}}(s, t)}{dt} = \frac{1}{64\pi s k_{\text{II}}^2} |T^{\text{II}}(s, t)|^2 \quad (2.4)$$

où

$$k_{\text{II}} = \frac{1}{4s} [s^2 - 2s(\mu_1^2 + m_2^2) + (\mu_1^2 - m_2^2)^2].$$

Nous avons la relation de crossing-symétrie

$$T^{\text{I}}(u, t) = T^{\text{II}}(s, t)^* \quad (2.5)$$

Nous supposons que T^J ($J = \text{I}, \text{II}$) ont des pôles sur le demi-axe positif réel des s . Alors T^J peut se représenter sous la forme d'une somme des termes polaires et d'une partie régulière dans le plan fini de s . Pour simplifier, nous désignons aussi par $T^J(s, t)$ la partie régulière. Il est clair que le terme polaire tend vers zéro quand s tend vers l'infini.

Suivant l'esprit de [6], nous introduisons une classe des fonctions complémentaires $\varphi(s, t)$ qui a deux propriétés suivantes:

1) La fonction $\varphi(s, t)$ et sa fonction inverse $\frac{1}{\varphi(s, t)}$ sont analytiques sur l'axe réel de s .

$$2) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\varphi(s, t)}{\varphi(-s, t)} = e^{-i\alpha(t)}$$

où $\alpha(t)$ est une certaine fonction réelle de t .

Nous avons alors le théorème suivant:

Théorème:

Supposons que les fonctions $\frac{T^J(s, t)}{\varphi(s, t)}$ soient p -analytiques afin que les limites

$$V^{\text{I}}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{T^{\text{I}}(s, t)}{\varphi(s, t)}$$

$$V^{\text{II}}(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{T^{\text{II}}(s, t)^*}{\varphi(-s, t)}$$

existent. Nous avons alors

$$V^{\text{I}}(t) = V^{\text{II}}(t)$$

d'où nous obtenons la relation asymptotique

$$\frac{d\sigma^{\text{I}}(s, t)}{dt} \approx \frac{d\sigma^{\text{II}}(s, t)}{dt} \quad \text{quand } s \rightarrow \infty.$$

Démonstration:

Nous trouvons que les fonctions

$$V^J(s, t) = \frac{T^J(s, t)}{\varphi(s, t)}$$

sont p -analytiques quand t est fixe. Alors le théorème généralisé de Phragmen-Lindelof nous donne

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} V^J(s, t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} V^J(s, t).$$

En nous basant sur la crossing-symétrie (2.5) nous avons

$$V^I(t) = V^{II}(t).$$

Donc, en tenant compte de (2.3) et (2.4), nous avons

$$\frac{d\sigma^I(s, t)}{dt} \approx \frac{d\sigma^{II}(s, t)}{dt}$$

quand $s \rightarrow \infty$ et t est fixe.

3. Conclusion

Les résultats que nous avons obtenus montrent que le fait de considérer les relations asymptotiques comme critère du principe de causalité microscopique est un fait qu'on doit démontrer, si un tel critère existe réellement. D'autre part, il est aussi possible que les relations asymptotiques soient liées au caractère analytique généralisé des amplitudes de dispersion et par celà, liées à un certain principe de causalité généralisé ou modifié.

Enfin, l'auteur adresse ses remerciements sincères au professeur Ta quang Bu'u pour ses observations fructueuses et au Dr. Nguyễn Hoàng Phu'o'ng pour ses utiles discussions.

APPENDICE

En nous basant sur les résultats de Poloji, nous pouvons démontrer aisément les théorèmes suivants:

Théorème I:

Etant donnée la fonction p -analytique $f(z)$ de la variable complexe

$$z = ze^{i\theta}.$$

Supposons qu'elle soit p -analytique dans le domaine D qui est limité par deux droites formant un angle π/α à l'origine et aussi p -analytique sur ces deux droites elles-mêmes.

Supposons en outre que

$$|f(z)| \leq M$$

sur les deux droites et que l'on ait

$$f(z) \sim 0 (e^{\beta}) \text{ quand } z \rightarrow \infty$$

uniformément dans cet angle avec $\beta < \alpha$. Alors, l'inégalité

$$|f(z)| \leq M$$

est vérifié dans tout le domaine.

Démonstration:

Nous pouvons supposer que ces deux droites soient

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2\alpha}.$$

En nous basant sur la compacité de l'ensemble des fonctions p -analytiques, nous pouvons choisir une fonction p -analytique $F(z)$, vérifiant l'inégalité suivante

$$e^{-\varepsilon'\gamma \cos \gamma \theta} |f(z)| \leq |F(z)| \leq e^{-\varepsilon\gamma \cos \gamma \theta} |f(z)|$$

où $\beta < \gamma < \alpha$ et $\varepsilon' \geq \varepsilon > 0$. Sur les deux droites $\theta = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$ on a $\cos \gamma \theta > 0$ parce que $\gamma < \alpha$. Donc sur ces deux droites on a

$$|F(z)| \leq |f(z)| \leq M.$$

Sur l'arc du cercle $\left\{ |\theta| \leq \frac{\pi}{2\alpha}, |z| = R \right\}$ nous avons

$$|F(z)| \leq e^{-\varepsilon R \cos \gamma \frac{\pi}{2\alpha}} |f(z)| \leq e^{R\beta - \varepsilon R \gamma \cos \gamma \frac{\pi}{2\alpha}}.$$

Le membre de droite tend vers zéro quand z tend vers l'infini. Donc, quand R est suffisamment grand, on a $|F(z)| \leq M$ sur cet arc. Par conséquent, en se basant sur le principe de module maximum des fonctions p -analytiques, on a

$$|F(z)| \leq M$$

dans le domaine $\left\{ |\theta| \leq \frac{\pi}{2\alpha}, |z| \leq R \right\}$.

Comme R est une constante arbitrairement grande, nous avons dans tout le domaine D

$$|f(z)| \leq M$$

C Q. F. D.

Théorème II:

Supposons que la fonction $f(z)$ tend vers a quand z tend vers l'infini sur les deux droites et que $f(z)$ soit p -analytique et bornée dans cet angle.

Alors $f(z)$ tend vers a uniformément dans cet angle.

Démonstration:

Nous pouvons supposer que la limite a est égale à zéro et l'angle entre deux droites soit $\theta = \pm \theta'$ où $\theta' < \frac{\pi}{2\alpha}$.

Choisissons la fonction p -analytique $F(z)$ de façon que son module vérifié l'inégalité

$$\frac{1}{\sqrt{1^2 + \lambda^2 + 1}} |f(z)| \leq |F(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{1^2 + \lambda^2}} |f(z)|.$$

Or, $|f(z)| < M$ presque dans tout l'angle et $|f(z)| < \varepsilon$ avec $z < z_1$ et $\theta = \pm \theta'$. Choisissons $\lambda = z_1 M/\varepsilon$. Pour tout $z \leq z_1$ on a $|F(z)| < \frac{z}{\lambda} M < \varepsilon$ et $|F(z)| < |f(z)| < \varepsilon$ pour $z > z_1$ et $\theta = \pm \theta'$.

Appliquant le théorème I nous avons

$$|F(z)| < \varepsilon$$

uniformément dans tout l'angle, ce qui entraîne

$$|f(z)| < \left(1 + \frac{\lambda+1}{r}\right) |F(z)| < 2\varepsilon \quad \text{si } z > \lambda$$

et le théorème est entièrement démontré.

Théorème III:

Si la fonction p -analytique $f(z)$ tend vers a quand z tend vers l'infini sur l'une des droites et tend vers b sur l'autre droite quand z tend vers l'infini, on a alors $a = b$ et $f(z)$ tend vers a uniformément dans cet angle.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle dans la théorie des fonctions analytiques ordinaires.

REFERENCES

- [1] I. Pomeranchuk, *JETP*, **34**, 725 (1958).
- [2] N. N. Neiman, *JETP*, **43**, 1277 (1962).
- [3] A. A. Logunov, *Preprint*, Dubna P-2873, 1966.
- [4] Poloji, *Les fonctions analytiques généralisées*, Kiev 1965.
- [5] I. N. Vekua, *Les fonctions analytiques généralisées*, Moscou 1959.
- [6] A. A. Logunov et al., *Les résultats des sciences physiques*, tome 88, fasc. I, 1966.