

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПЕРЕНОРМИРОВКИ S —МАТРИЦЫ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ КАДЫШЕВСКОГО

Some Renormalization Problems of S -Matrix in Kadyshevsky's p -Representation

З. Борелёвски*

Объединенный институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики, Дубна, СССР

(Поступила в редакцию 19 ноября 1969)

Предлагается способ перенормировки некоторых членов S -матрицы в p -представлении Кадышевского для лагранжиана $L(x) = e : J^4(x) :$. Оказывается, что в этом представлении перенормируются только линии модифицированных диаграмм Фейнмана, соответствующие квазичастицам.

1. Введение

Известно, что исходя из общего выражения для S -матрицы

$$S = T \exp \left[\int L(x) dx \right] \quad (1.1)$$

(T — символ хронологического произведения, $L(x)$ -лагранжиан взаимодействия), можем сразу переходить к p -представлению и в этом представлении развивать дальше ее теорию. В. Г. Кадышевский [1,2] дал ковариантную формулировку теории S -матрицы в p -представлении, содержащую условия унитарности и причинности, получил ковариантное “уравнение движения” для матрицы рассеяния, а затем исследовал его по теории возмущений. Оказалось, что для этого нужно было развить специфическую диаграммную технику. В настоящей работе предлагается способ перенормировки некоторых членов S -матрицы для лагранжиана взаимодействия

$$L(x) = e : \varphi^4(x) : \quad (1.2)$$

(e —константа связи, $\varphi(x)$ —скалярная функция поля: “ $:$ ” символ нормального произведения) согласно этой технике.

2. Формулировка теории S -матрицы в импульсном представлении Кадышевского

Запишем формулу (1.1) в виде

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n T[L(x_1) \dots L(x_n)] \quad (2.1)$$

* Адрес: Instytut Fizyki U.J., Kraków, Reymonta 4, Polska.

или

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \theta[\lambda(x_1 - x_n)] \dots \theta[\lambda(x_{n-1} - x_1)] \times :L(x_1) \dots L(x_n): \quad (2.2)$$

$\theta(s) = 1$ для $s > 0$ и $\theta(s) = 0$ для $s < 0$, λ — временноподобный вектор ($\lambda^2 = 1$, $\lambda^0 > 0$).

Если теперь перейти в (2.2) к импульсному пространству, полагая

$$L(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{i(xk)} \tilde{L}(k) \quad (2.3)$$

и

$$\theta(\lambda x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda \tau x}}{\tau - i\varepsilon} d\tau \quad (2.4)$$

то получаем выражение для S -матрицы в T -представлении ([1], [2])

$$S = 1 + iR(\lambda\tau)|_{\tau=0} \quad (2.5)$$

где $R(\lambda\tau)$ подчиняется следующему уравнению движения S -матрицы

$$R(\lambda\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}(\lambda\tau - \lambda\tau') \frac{d\tau'}{\tau' - i\varepsilon} R(\lambda\tau'). \quad (2.6)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде суммы

$$R(\lambda\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\lambda\tau) \quad (2.7)$$

где

$$R_1(\lambda\tau) = \tilde{L}(\lambda\tau)$$

$$R_2(\lambda\tau) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{L}(\lambda\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau - \tau_1 - i\varepsilon} \tilde{L}(\lambda\tau - \lambda\tau_1) \quad (2.8)$$

$$R_3(\lambda\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \tilde{L}(\lambda\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau - \tau_1 - i\varepsilon} \tilde{L}(\lambda\tau_2 - \lambda\tau_1) \frac{d\tau_2}{\tau - \tau_2 - i\varepsilon} \tilde{L}(\lambda\tau - \lambda\tau_2) \quad (2.9)$$

$$\vdots$$

$$R_n(\lambda\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \tilde{L}(\lambda\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau - \tau_1 - i\varepsilon} \tilde{L}(\lambda\tau_2 - \lambda\tau_1) \dots \frac{d\tau_{n-1}}{\tau - \tau_{n-1} - i\varepsilon} \tilde{L}(\lambda\tau - \lambda\tau_{n-1}). \quad (2.10)$$

Из (2.5) (2.6) (2.7) и (2.10) следует, что S -матрица подчиняется условию причинности и унитарности [1], [2]. Очевидно, выражение (2.10) надо привести к нормальной форме. Поскольку это выражение является обычным произведением операторов типа нормальных произведений Фурье-трансформированных функций поля вхо-

дящих в лагранжиан $L(x)$ то в процессе его N -упорядочивания необходимо использовать только обычные спаривания. Рассмотрим теперь самый общий вид матрицы рассеяния S , а именно

$$S = T \exp \left[\int L(x, g) dx \right] \quad (2.11)$$

где

$$L(x, g) = L(x)g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x, x_1, \dots, x_n)g(x_1) \dots g(x_n)dx_1 \dots dx_n \quad (2.12)$$

$g(x)$ — функция включения взаимодействия ($g(x) \equiv 1$)

$A_n(x, x_1, \dots, x_n)$ — квазилокальный контрчлен n -го порядка.

$$A_n(x, x_1, \dots, x_n) = W \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \delta(x-x_1) \dots \delta(x-x_n) \quad (2.13)$$

$\delta(x-x_i)$ — функция (обобщенная) Дирака.

$W \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ — симметричный многочлен частных производных $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, произвольного порядка с постоянными но любыми коэффициентами. Кадышевский показал, что „уравнение движения“ S -матрицы в p -представлении принимает вид

$$R(\lambda\tau) = \tilde{L}(\lambda\tau) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\lambda\tau) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\tau'}{\tau' - i\varepsilon} \left[\tilde{L}(\lambda\tau - \lambda\tau') + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\lambda\tau - \lambda\tau') \right] R(\lambda\tau') \quad (2.14)$$

где явный вид операторов $A_n(\lambda\tau)$ для рассматриваемой модели получается с помощью преобразования фурье соответствующих контрчленов $A_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3. Вопрос перенормировки S -матрицы в p -представлении

В дальнейшем будем рассматривать физическую модель с лагранжианом $L(x) = e : \varphi^4(x) :$ (см. (1.2)).

Вообще говоря, коэффициентные функции отдельных членов S -матрицы могут расходиться при больших импульсах и для устранения этой расходимости можно попытаться соответственно подобрать коэффициенты контрчленов. Суханов, рассматривая тот же лагранжиан, но в x -представлении, получил после интегрирования по $x_1, \dots, x_n$ (см. формулы (2.12) и (2.13)) следующий результат

$$\begin{aligned} L(x, g) = & eg(x) Z_1(g) : \varphi^4(x) : + \\ & + \frac{1}{2} [1 - Z_2(g)] \left[: \varphi(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} : + m^2 : \varphi^2(x) : \right] - \\ & - \delta m^2(g) : \varphi^2(x) : + \frac{1}{2} : \varphi^2(x) : \sum_{i=1}^4 \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{(Z_2(g) - 1)}{g(x)} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} Z_1(g) &= 1 + \sum_s \frac{[eg(x)]^{s-1}}{s!} A_s \\ Z_2(g) &= 1 + \sum_s \frac{[eg(x)]^s}{s!} B_s \\ \delta m^2(g) &= \sum_s \frac{[eg(x)]^s}{s!} C_s \end{aligned} \quad (3.2)$$

A_s, B_s, C_s постоянные, A_s, B_s расходятся квадратично а C_s логарифмически при $M_i^2 \rightarrow \infty$.

Например, контрчлен устраняющий бесконечность диаграммы собственной энергии бозона имеет следующий вид

$$A_1(x, x_1) = -e^2 b : \varphi(x) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \delta(x - x_1) \right] \varphi(x_1) : \quad (3.3)$$

Мы пойдем по несколько иному пути, а именно, сразу перейдем к p -представлению. Разлагая функцию поля $\varphi(x)$ в интеграл Фурье

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ikx} \tilde{\varphi}(k) dk \quad (3.4)$$

(k —4-вектор импульса, $\tilde{\varphi}(k)$ фурье преобразованная функция $\varphi(x)$) получим на основе (1.2) следующий вид фурье образа лагранжиана $L(x)$

$$\tilde{L}(\lambda\tau) = \frac{e}{(2\pi)^2} \int dk_1 \dots \int dk_4 \delta \left[\lambda\tau - \sum_{i=1}^4 k_i \right] : \tilde{\varphi}(k_1) \dots \tilde{\varphi}(k_4) : \quad (3.5)$$

(k_i —4-импульсы).

На основе (3.5) можем переписать (2.10) в виде

$$R_n(\lambda\tau) = \sum_{s=0}^{4n} \int dk_1 \dots dk_s \delta \left[\lambda\tau - \sum_{i=1}^s k_i \right] F_s^{(n)}(\tau; k_1, \dots k_s) : \tilde{\varphi}(k_1) \dots \tilde{\varphi}(k_s) : \quad (3.6)$$

причем суммирование производится только по четным значениям индекса s , а каждый член этой суммы соответствует $4n-s$ кратному спариванию функций $\tilde{\varphi}(k_i)$.

С другой стороны, такой член соответствует “модифицированной” фейнмановской диаграмме с n вершинами, $4n-s$ внутренними и s внешними линиями (точнее — сумме всех диаграмм этого рода). Такая диаграмма отличается от обычной фейнмановской диаграммы тем, что все ее вершины (пронумерованные произвольным образом от 1 до n) нужно соединить первую со второй, вторую с третьей и т.д. добавочными (пунктирными) линиями и кроме этого из вершины с номером n вывести свободную пунктирную линию, приписав ей 4-импульс $\lambda\tau = \sum_{i=1}^s k_i$. Все внутренние линии (пунктирные и обычные — соответствующие спариваниям

$\varphi(k_i)\varphi(k_j) = \delta(k_i + k_j)\theta(k_j^0)\delta(k_j^2 - m^2)$ надо ориентировать так, чтобы они выходили из вершины с меньшим номером и входили в вершину, с большим номером, а внешние линии (кроме пунктирных) должны быть входящими. Сплошным внешним линиям приписывают импульсы $k_1, \dots, k_s$, внутренним пунктирным линиям импульсы $\lambda\tau_1, \dots, \lambda\tau_{n-1}$ внутренним обычным (сплошным) линиям — импульсы $q_1, q_2, \dots$ произвольным образом, но с сохранением суммарного импульса (с учетом импульса пунктирных линий!) в каждой вершине. Чтобы получить коэффициентную функцию $F_i^{(n)}(\tau, k_1, \dots, k_s)$, надо каждый внутренней пунктирной линии с 4 импульсом $\lambda\tau_i$ поставить в соответствие функцию $G(\tau_i) = (2\pi)^{-1}(\tau - \tau_i - i\epsilon)^{-1}$ каждой сплошной внутренней линии с импульсом q_j — функцию $D^{(+)}(q_j) = \theta(q_j^0)\delta[q_j^2 - m^2]$ и по всем независимым переменным τ_i и q_j провести интегрирование в бесконечных пределах.

Как видно, существенная разница между обычным фейнмановским подходом и нашим состоит в том, что мы ввели в теорию “новые частицы” “квазичастицы”, а именно частицы, соответствующие внутренним пунктирным линиям диаграммы, частицы с импульсами $\lambda\tau_1, \dots, \lambda\tau_{n-1}$. Оказывается, что расходимость этих диаграмм обусловлена тем, что “квазичастицам” разрешается переносить слишком большой импульс. Перенормировка этих диаграмм сводится к перенормировке только внутренних пунктирных линий.

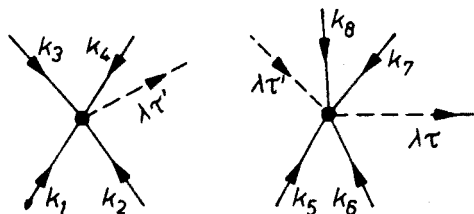


Рис. 1. $\lambda\tau' = \sum_{i=0}^4 k_i$. Коэффициентная функция равна $\frac{e}{(2\pi)^2}$

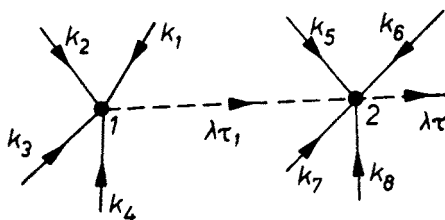


Рис. 2. $s = 8$, нет спариваний $\lambda\tau = \sum_{i=1}^8 k_i$

Вернемся теперь конкретно к лагранжиану (1.2). Как видно из (2.5) (2.7) и (3.5) $R_1(\lambda\tau) = \tilde{L}(\lambda\tau)$. Соответствующая диаграмма дана на рис. 1. Элементу S -матрицы второго порядка в p -представлении $R_2(\lambda\tau)_{\tau=0}$ будет также соответствовать 5 типов диаграмм с двумя вершинами а именно рисунки 2—6. Конечно, к каждому из пре-

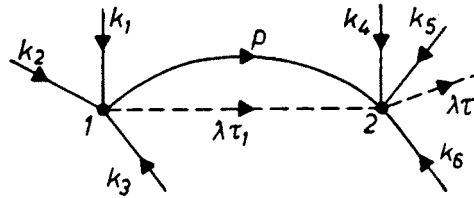


Рис. 3. $\lambda\tau = \sum_{i=1}^6 k_i, p = \sum_{i=1}^3 k_i - \lambda\tau_1, s = 6$, одно спаривание

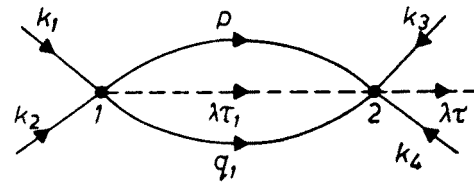


Рис. 4. $p = k_1 + k_2 - \lambda\tau_1 - q_1, \lambda\tau = \sum_{i=1}^4 k_i, s = 4$, два спаривания

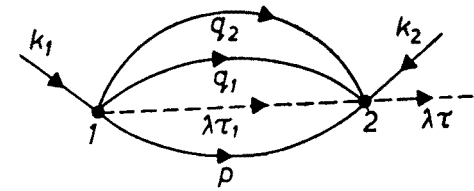


Рис. 5. $p = k_1 - q_1 - q_2 - \lambda\tau_1, \lambda\tau = k_1 + k_2, s = 2$, три спаривания

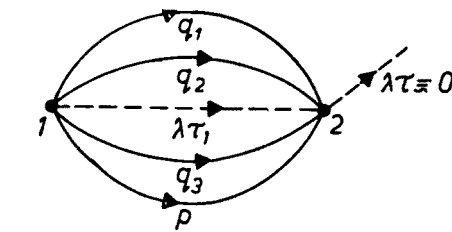


Рис. 6. $p = -\lambda\tau_1 - q_1 - q_2 - q_3, \lambda\tau = 0, s = 0$, четыре спаривания

дыдущих диаграмм (рис. 1—6) надо прибавить такую же вторую диаграмму а за-
меной вершины № 1 на вершину № 2 и обратно.

Легко показать, что такой же результат получим, исходя из выражения для
S-матрицы в x представлении. Из (2.2) и (1.2) получаем

$$S_2 = S_2^{(0)} + S_2^{(1)} + S_2^{(2)} + S_2^{(3)} + S_2^{(4)} \tag{3.7}$$

где

$$S_2^{(0)} = \alpha_0 \int dx_1 \int dx_2 \theta[\lambda(x_1 - x_2)] : \varphi^4(x_1) \varphi^4(x_2) : \quad (3.8)$$

$$S_2^{(1)} = \alpha_1 \int dx_1 \int dx_2 \theta[\lambda(x_1 - x_2)] \varphi(x_1) \varphi(x_2) : \varphi^3(x_1) \varphi^3(x_2) : \quad (3.9)$$

$$S_2^{(2)} = \alpha_2 \int dx_1 \int dx_2 \theta[\lambda(x_1 - x_2)] [\varphi(x_1) \varphi(x_2)]^2 : \varphi^2(x_1) \varphi^2(x_2) : \quad (3.10)$$

$$S_2^{(3)} = \alpha_3 \int dx_1 \int dx_2 \theta[\lambda(x_1 - x_2)] [\varphi(x_1) \varphi(x_2)]^3 : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : \quad (3.11)$$

$$S_2^{(4)} = \alpha_4 \int dx_1 \int dx_2 \theta[\lambda(x_1 - x_2)] [\varphi(x_1) \varphi(x_2)]^4 \quad (3.12)$$

α_ν — числовые множители, символ $\varphi(x_1) \varphi(x_2)$ означает обычное спаривание скалярных функций $\varphi(x)$. Выражая $\varphi(x)$ и $\theta(\lambda x)$ с помощью формул (2.4) и (3.14) и учитывая равенство

$$\varphi(k) \varphi(q) = \delta(k+q) \theta(q^0) \delta(q^2 - m^2) \quad (3.13)$$

получаем, что $S_2^{(\nu)}$ ($\nu = 0, 1, 2, 3, 4$) это часть матричного элемента $R_2(0)$ соответствующая диаграмме с ν спариваниями. И так, для случая а) и б) получаем соответственно (после интегрирования)

$$(S_2^{(0)})_{\tau=0} = \alpha_0 e^2 \int dk_1 \dots \int dk_8 \delta(\sum_{i=1}^8 k_i) : \tilde{\varphi}(k_1) \dots \tilde{\varphi}(k_8) : \quad (3.14)$$

$$(S_2^{(1)})_{\tau=0} = d_1 e^2 \int dk_1 \dots \int dk_6 \delta\left(\sum_{i=1}^6 k_i\right) \frac{1}{\sqrt{m^2 + \hat{K}^2} (K^0 - \sqrt{m^2 + \hat{K}^2})} : \tilde{\varphi}(k_1) \dots \tilde{\varphi}(k_6) : \quad (3.15)$$

$$\hat{K} = \sum_{i=1}^3 \hat{k}_i, \quad K^0 = \sum_{i=1}^3 k_i^0.$$

Однако уже для $S_2^{(2)}$ получаем выражение

$$(S_2^{(2)})_{\tau=0} = \alpha_2 e^2 \int dk_1 \dots \int dk^4 \delta(\sum_{i=1}^4 k_i) F_2^{(2)}(0, k_1 \dots k_4) : \tilde{\varphi}(k_1) \dots \tilde{\varphi}(k_4) : \quad (3.16)$$

в котором

$$F_2^{(2)}(\tau, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \frac{1}{\tau - \tau_1 - i\varepsilon} \theta(q_1^0) \delta(q_1^2 - m^2) \theta(k_1^0 + k_2^0 - \lambda \tau_1) \times \\ \times \delta[(k_1 + k_2 - \lambda \tau_1)^2 - m^2] \quad (3.17)$$

и, как видно, $F_2^{(2)}$ расходится. Таким образом надо провести перенормировку пунктирной внутренней линии диаграммы на рис. 4. Физически это соответствует перенормировке массы квазичастицы. Эта операция производится стандартным образом, а именно, полагая

$$\frac{1}{\tau - \tau_1 - i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{\tau - \tau_1 - i\varepsilon} - \frac{1}{\tau - \tau_1 - M - i\varepsilon} \quad (3.18)$$

(соответственно $F_2^{(2)} \rightarrow F_{2,M}^{(2)}$). Выполнив интегрирование в (3.17) при условии $M \rightarrow \infty$ получаем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} F_{2,M}^{(2)}(\tau, k_1, \dots, k_4) = F_{2,0}^{(2)} + \lim_{M \rightarrow \infty} Q_2^{(2)} \quad (3.19)$$

где $F_{2,0}^{(2)}$ конечный член, а

$$Q_2^{(2)} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{M}{4m} \right| (k_1^{(0)} k_2^{(0)} - 2m) \quad (3.20)$$

$Q_2^{(2)}$ расходится логарифмически. Переходя опять к представлению легко получить конкретный вид контрчлена устраняющего расходимость диаграммы на рис. 4 (в системе координат где $\hat{k}_1 + \hat{k}_2 - \hat{\lambda}\tau_1 = 0$)

$$\begin{aligned} \Lambda_2^{(2)}(x_1, x_2) = d_2 e^2 \int dx_1 \int dx_2 \left[m - \frac{1}{4i} \left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} - \frac{\partial}{\partial x_2^0} \right) \right] \times \\ \times \delta(x_1 - x_2) : \varphi^2(x_1) \varphi^2(x_2) : \ln \left| \frac{M}{4m} \right|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Подобным образом можем вычислять матричные элементы $S_2^{(3)}$ и $S_2^{(4)}$. Вычисления будут, конечно, гораздо сложнее чем для $S_2^{(2)}$. Но всегда перенормируем “ $\lambda\tau_1$ ” — линию. Для $S_2^{(3)}$ надо положить

$$\frac{1}{\tau - \tau_1 - i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{\tau - \tau_1 - i\varepsilon} - \frac{1}{(\tau - \tau_1 - M - i\varepsilon)^4}$$

для $S_2^{(4)}$.

$$\frac{1}{\tau - \tau_1 - i\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{\tau - \tau_1 - i\varepsilon} + \frac{1}{(\tau - \tau_1 - M - i\varepsilon)^6}.$$

В качестве примера можно показать, что контрчлен $\Lambda_2^{(3)}(x_1, x_2)$ устраняющий бесконечность диаграммы на рис. 5 имеет (в системе координат где $\hat{k}_1 - \hat{\lambda}\tau_1 = 0$) вид

$$\begin{aligned} \Lambda_2^{(3)}(x_1, x_2) = d_3 e^2 \int dx_1 \int dx_2 \left[a \left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} - \frac{\partial}{\partial x_2^0} \right) + b \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^{02}} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{02}} \right) + \right. \\ \left. + c \left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^{03}} - \frac{\partial^3}{\partial x_2^{03}} \right) + d \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^{04}} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^{04}} \right) + f \right] \delta(x_1 - x_2) : \varphi(x_1) \varphi(x_2) : \end{aligned} \quad (3.22)$$

где

$$\begin{aligned} a = \frac{81}{2} \ln 3 \left| \frac{M}{m} \right| + \frac{243}{2} \ln \left| \frac{M}{m} \right| + \frac{405}{2} \left(\frac{M}{m} \right)^2 \\ b = \frac{243}{2} \left(\frac{M}{m} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= -\frac{1}{2} \left(\frac{M}{m} \right)^2 \\
 d &= \frac{1}{2} \left(\frac{M}{m} \right) \\
 f &= -\left(\frac{M}{m} \right)^2 + \frac{81}{4} \left(\frac{M}{m} \right).
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

В заключение можно подчеркнуть, что специфика перенормировки S -матрицы в p -представлении Кадышевского а именно необходимость перенормировки только линий квазичастиц, очень существенна, так как есть основания полагать, что квазичастицы являются в определенном смысле динамическим эквивалентом пространства-времени [2].

Автор благодарит дирекцию ОИЯИ за гостеприимство во время его пребывания в Дубне, сотрудников ЛТФ и особенно В. Г. Кадышевского за предложение темы этой работы и полезные обсуждения, а также С. М. Елисеева за помощь в подготовке рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Г. Кадышевский, *ЖЭТФ*, **46**, 654 (1964).
- [2] В. Г. Кадышевский, *ЖЭТФ*, **46**, 872 (1964).
- [3] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Гостехиздат 1957.