Vol. B10 (1979) ACTA PHYSICA POLONICA No 11

ЛАРМОРОВСКАЯ СИММЕТРИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ БЕЗМАССОВОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

LARMOR SYMMETRY OF QUANTUM THEORY OF MASSLESS VECTOR FIELD

С. И. Круглов, В. И. Стражев

Институт физики Академии наук Белорусской ССР, Минск*

(Поступила в редакцию 29 Мая 1979 г.)

Internal symmetries of the two-potential theory of electromagnetic field are considered. It is shown that the group of internal symmetries is O(3)⊗U(1)⊗U(1). Physical interpretation of the related conservation laws is given.

1. Введение

Двухпотенциальная формулировка уравнений электромагнитного поля, основанная на использовании определения

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu M_\nu - \partial_\nu M_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha N_\beta = M_{\mu\nu} - \tilde{N}_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где $\tilde{N}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha N_\beta$, $\varepsilon_{1234} = -i$, инвариантна относительно преобразований группы внутренней (ларморовской) симметрии SL(2, C) [1]. В силу определения (1) уравнения Максвелла

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \tag{2}$$

эквивалентны системе двух пар уравнений

$$\partial_\nu M_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu \tilde{M}_{\mu\nu} = 0,$$

$$\partial_\nu N_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu \tilde{N}_{\mu\nu} = 0, \tag{3}$$

которые могут быть получены из лагранжиана следующего вида

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{4}(M_{\mu\nu}^2 + N_{\mu\nu}^2). \tag{4}$$

---

* Address: Institute of Physics, Lenin Avenue 70, 220072, Minsk-72, USSR.

При отсуствии связи между потенциалами M_μ, N_μ лагранжиан (4) описывает два взаимно независимых безмассовых поля, максвелловского поля, систему которых будем называть безмассовым векторным полем.

Группой инвариантности электромагнитного поля в двухпотенциальной формулировке является, как будет показано далее, группа $O(3) \otimes U(1) \otimes U(1)$, где $O(3)$ является подгруппой ларморовских преобразований, $U(1)\otimes U(1)$ соответствуют дуальной симметрии и закону сохранения числа квантов для свободного поля.

Преобразования группы ларморовской симметрии $O(3)$ имеют следующий вид [1]:

$$M'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} - \tilde{M}_{\mu\gamma}k_3\sin\frac{\theta}{2} - N_{\mu\nu}k_2\sin\frac{\theta}{2} - \tilde{N}_{\mu\nu}k_1\sin\frac{\theta}{2},$$

$$N'_{\mu\nu} = N_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} + \tilde{N}_{\mu\nu}k_3\sin\frac{\theta}{2} + M_{\mu\nu}k_2\sin\frac{\theta}{2} - \tilde{M}_{\mu\nu}k_1\sin\frac{\theta}{2}, \tag{5}$$

где $k_1^2+k_2^2+k_3^2 = 1$. Удобно выделить в явном виде преобразования ее трех однопараметрических подгрупп:

$$M'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} - N_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}, \quad N'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2} + N_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2}, \tag{6}$$

$$M'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} - \tilde{M}_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}, \quad N'_{\mu\nu} = N_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} + \tilde{N}_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{7}$$

$$M'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} - \tilde{N}_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}, \quad N'_{\mu\nu} = N_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} - \tilde{M}_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}. \tag{8}$$

Преобразования группы дуальной симметрии $U(1)$ имеют по форме тот же вид, что и преобразования (7), но с одинаковым углом повотора для обоих полей $M_{\mu\nu}$ и $N_{\mu\nu}$.

В настоящей работе мы рассмотрим законы сохранения, связанные с группой инвариантности теории безмассового векторного поля в рамках гамильтонова и лагранжева формализмов в классическом и квантовом случаях и установим соответствие с внутренними симметриями теории электромагнитного поля.

2. Гамильтонова форма теории и законы сохранения

Константы движения, соответствующие симметрии теории, могут быть найдены для преобразований, оставляющих инвариантным ее гамильтониан (см., например, [2]). Гамильтониан теории в обсуждаемой двухпотенциальной формулировке имеет вид:

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\left[(\pi_\mu^M)^2 + k_0^2(q_\mu^M)^2 + (\pi_\mu^N)^2 + k_0^2(q_\mu^N)^2\right], \tag{9}$$

где $q_\mu^M = M_\mu(\vec{k}, t) + M_\mu^+(\vec{k}, t)$, $\pi_\mu^M = (-ik_0)(M_\mu(\vec{k}, t) - M_\mu^+(\vec{k}, t))$ канонические координаты и импульс, соответственно, и $M_\mu(\vec{k}, t)$, $M_\mu^+(\vec{k}, t)$ Фурье-компоненты для поля $M_\mu(x)$. Аналогичные соотношения справедливы и для поля $N_\mu(x)$.

Рассмотрим вначале преобразования (6)–(8), которым соответствуют следующие канонические преобразования, оставляющие инвариантным гамильтониан (9)

$$q_\mu^{M'} = q_\mu^M \cos\frac{\theta}{2} - q_\mu^N \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \pi_\mu^{M'} = \pi_\mu^M \cos\frac{\theta}{2} - \pi_\mu^N \sin\frac{\theta}{2},$$

$$q_\mu^{N'} = q_\mu^N \cos\frac{\theta}{2} + q_\mu^M \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \pi_\mu^{N'} = \pi_\mu^N \cos\frac{\theta}{2} + \pi_\mu^M \sin\frac{\theta}{2}, \tag{10}$$

$$q_n^{M'} = q_n^M \cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l q_m^M \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \pi_n^{M'} = \pi_n^M \cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l \pi_m^M \sin\frac{\theta}{2},$$

$$q_n^{N'} = q_n^N \cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l q_m^N \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \pi_n^{N'} = \pi_n^N \cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l \pi_m^N \sin\frac{\theta}{2}, \tag{11}$$

$$q_n^{M'} = q_n^M \cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l q_m^N \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \pi_n^{M'} = \pi_n^M \cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l \pi_m \sin\frac{\theta}{2},$$

$$q_n^{N'} = q_n^N \cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l q_m^M \sin\frac{\theta}{2}, \qquad \pi_n^{N'} = \pi_n^N \cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l \pi_m^M \sin\frac{\theta}{2}, \tag{12}$$

где $\varepsilon_{123} = 1$ и при записи (11), (12) используется кулоновская калибровка для потенциалов $M_\mu(x)$, $N_\mu(x)$. Записывая таким же образом ларморовские преобразования для подгруппы O(2,1) можно убедиться, что они не оставляют инвариантным гамильтониан теории (9).

Для получения явного вида констант движения воспользуемся методом производящей функции, изложенным в книге Голдстейна [2]. Для бесконечно малых канонических преобразований производящая функция имеет вид:

$$F = q_i\pi'_i + \varepsilon G(q, \pi'), \tag{13}$$

где ε — бесконечно малый параметр преобразования и выражение $G(q, \pi')$ при $\pi' \to \pi$ является интегралом движения. Для случая преобразований (10)–(12) имеем:

$$G_1 = \tfrac{1}{2}\sum_{\vec{k}} (\pi_\mu^N q_\mu^M - \pi_\mu^M q_\mu^N) = \frac{i}{2}\sum_{\vec{k}} (n_\mu^+ m_\mu - m_\mu^+ n_\mu), \tag{14}$$

$$G_2 = \tfrac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l(q_m^N\pi_n^N - q_m^M\pi_n^M) = \frac{i}{2}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l(m_m^+ m_n - n_m^+ n_n), \tag{15}$$

$$G_3 = -\tfrac{1}{2}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l(q_m^N\pi_n^M + q_m^M\pi_n^N) = \frac{i}{2}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{k_0}\varepsilon_{nlm}k_l(m_m^+ n_n + n_m^+ m_n), \tag{16}$$

где при вычислении выражений (14)–(16) использовалась связь канонических координат и импульсов с величинами типа $M_\mu(\vec{k}, t)$, $N_\mu(\vec{k}, t)$ и следующее определение: $m_\mu^+ = (2k_0)^{1/2} M_\mu^+(\vec{k}, t)$ и, соответсвенно, для величин m_μ, n_μ^+, n_μ. Во вторично квантованной теории величины $m_\mu^+, n_\mu^+, m_\mu, n_\mu$ являются операторами рождения и уничтожения соответствующих полевых квантов. Предполагая выполнение следующих канонических перестановочных соотношений

$$[m_\mu(\vec{k}), m_\nu^+(\vec{k}')] = [n_\mu(\vec{k}), n_\nu^+(\vec{k}')] = \delta_{\mu\nu}\delta_{\vec{k}\vec{k}'},$$

$$[m_\mu^+(\vec{k}), n_\nu(\vec{k}')] = [m_\mu(\vec{k}), n_\nu^+(\vec{k}')] = [m_\mu(\vec{k}), n_\nu(\vec{k}')] = 0, \tag{17}$$

можно убедиться, что величины G_1, G_2, G_3 удовлетворяют перестановочным соотношениям группы O(3)

$$[G_i, G_j] = i\varepsilon_{ijk}G_k. \tag{18}$$

Используемый метод производящей функции примечателен тем, что позволяет устанавливать прямое соответсвие между классическим и квантовым рассмотрением внутренней симметрии теории.

3. Лагранжева формулировка теории и законы сохранения

Инвариантность лагранжиана (4) относительно преобразований (6) приводит к закону сохранения следующего выражения:

$$\Pi_\mu^1(x) = \tfrac{1}{2}\,(M_{\mu\nu}(x)N_\nu(x) - N_{\mu\nu}(x)M_\nu(x)). \tag{19}$$

В то же время преобразования (7), (8) не оставляют инвариантным лагранжиан (6), хотя гамильтониан теории является инвариантом этих преобразований. Но преобразования (7), (8) для бесконечно малых значений параметров оставляют инвариантным интеграл действия, поскольку приводят к изменению лагранжиана на члены, имеющие характар 4-мерной дивергенции, именно: $\partial_\mu(\widetilde{M}_{\mu\nu}M_\nu - \tilde{N}_{\mu\nu}N_\nu)\dfrac{\delta\theta}{2}$, $\partial_\mu(\tilde{N}_{\mu\nu}M_\nu + \widetilde{M}_{\mu\nu}N_\nu)\dfrac{\delta\theta}{2}$, соответственно. Согласно теореме Нетер (см. [3]) таким преобразованиям соответствует закон сохранения следующего вида [3] (см. также [4, 5]);

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\psi_\mu)}\,\delta\psi_\nu + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_\mu)}\,\delta\varphi_\nu + \delta\Omega_\mu\right) = 0, \tag{20}$$

где $\partial_\mu\Omega_\mu$ выражение типа дивергенции и ψ_ν, φ_ν — канонические „координаты". В обсуждаемых случаях $\delta\psi_\nu = \delta M_\nu$ и $\delta\varphi_\nu = \delta N_\nu$. Для преобразований (7) имеем: $\partial_\mu\delta M_\nu - \partial_\nu\delta M_\mu = -\tfrac{1}{2}\widetilde{M}_{\mu\nu}\delta\vartheta$, $\partial_\mu\delta N_\nu - \partial_\nu\delta M_\mu = \tfrac{1}{2}\tilde{N}_{\mu\nu}\delta\vartheta$. Для свободного поля эти уравнения можно решить, определяя, что $\widetilde{M}_{\mu\nu} = \partial_\mu K_\nu - \partial_\nu K_\mu$ и $\tilde{N}_{\mu\nu} = \partial_\mu P_\nu - \partial_\mu P_\mu$. Необходимо подчеркнуть, что потенциалы K_μ и P_μ носят вспомогательный характер.

Можно, в принципе, обойтись и без их введения, поскольку в кулоновской калибровке имеем, что (см. также [5])

$$K_m(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{\tilde{M}_{mn}(\vec{k})k_n}{\vec{k}^2} e^{i\vec{k}\vec{x}}d^3k,$$

$$P_m(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int \frac{\tilde{N}_{mn}(\vec{k})k_n}{k^2} e^{i\vec{k}\vec{x}}d^3k,$$

где

$$\tilde{M}_{mn}(\vec{k}) = \int \tilde{M}_{mn}(x)e^{-i\vec{k}\vec{x}}d^3x, \qquad \tilde{N}_{mn}(\vec{k}) = \int \tilde{N}_{mn}(x)e^{-i\vec{k}\vec{x}}d^3x.$$

С учетом вышесказанного, преобразованиям (7) и (8) соответствуют законы сохранения следующего вида:

$$\Pi^2_\mu = \tfrac{1}{2}(N_{\mu\nu}P_\nu - M_{\mu\nu}K_\nu + \tilde{M}_{\mu\nu}M_\nu - \tilde{N}_{\mu\nu}N_\nu), \tag{21}$$

$$\Pi^3_\mu = \tfrac{1}{2}(\tilde{N}_{\mu\nu}M_\nu + \tilde{M}_{\mu\nu}N_\nu - M_{\mu\nu}P_\nu - N_{\mu\nu}K_\nu). \tag{22}$$

Интеграл действия инвариантен также относительно дуальных преобразований для полей $M_{\mu\nu}$, $N_{\mu\nu}$, которые имеют по форме тот же вид, что и преобразования (7), но с одинаковым углом поворота для обоих полей. Соответствующая сохраняющаяся величина будет иметь вид:

$$R_\mu = \tfrac{1}{2}(\tilde{M}_{\mu\nu}M_\nu - M_{\mu\nu}K_\nu + \tilde{N}_{\mu\nu}N_\nu - N_{\mu\nu}P_\nu) \tag{23}$$

и константа движения, которая может быть получена в рамках гамильтонова рассмотрения, запишется так:

$$S = \frac{i}{2}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{k_0}\, \varepsilon_{nlm}k_l(m_n^+ m_m + n_n^+ n_m). \tag{24}$$

В квантовой теории будут справедливы следующие перестановочные соотношения (см., например, [4])

$$[E^M_k(\vec{x}), H^M_l(\vec{y})] = i\varepsilon_{kln}\frac{\partial}{\partial y_n}\delta(\vec{x}-\vec{y}),$$

$$[E^M_k(\vec{x}), E^M_l(\vec{y})] = [H^M_k(\vec{x}), H^M_l(\vec{y})] = [M_k(\vec{x}), H^M_l(\vec{y})] = [K_k(\vec{x}), E^M_l(\vec{y})] = 0,$$

$$[M_k(\vec{x}), E^M_l(\vec{y})] = [K_k(\vec{x}), H^M_l(\vec{y})] = -i\delta_{kl}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + i\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}D(\vec{x}-\vec{y}),$$

$$[M_k(\vec{x}), K_l(\vec{y})] = -i\varepsilon_{kln}\frac{\partial}{\partial y_n}D(\vec{x}-\vec{y}), \qquad D(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}, \tag{25}$$

где $E^M_l = iM_{l4}$, $H^M_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{lkn}M_{kn}$. Аналогичные соотношения справедливы и для величин $E^N_l = \frac{1}{2}\varepsilon_{lkn}N_{kn}$, $H^N_l = iN_{l4}$, N_l, P_l. Кроме того, все величины, относящиеся к полю M_μ, коммутируют с величинами, характеризующими поле N_μ.

Используя эти перестановочные соотношения, можно убедиться, что величины

$$I_1 = -\int \Pi_4^1 d^3x = \frac{i}{2}\int (\vec{H}^N\vec{M} - \vec{E}^M\vec{N})d^3x,$$

$$I_2 = -\int \Pi_4^2 d^3x = \frac{i}{2}\int (\vec{E}^M\vec{K} - \vec{H}^M\vec{M} - \vec{H}^N\vec{P} + \vec{E}^N\vec{N})d^3x,$$

$$I_3 = -\int \Pi_4^3 d^3x = \frac{i}{2}\int (\vec{E}^M\vec{P} + \vec{H}^N\vec{K} - \vec{E}^N\vec{M} - \vec{H}^M\vec{N})d^3x \tag{26}$$

удовлетворяют перестановочным соотношениям группы O(3) (18) и являются, следовательно, генераторами рассматриваемых ларморовских преобразований в координатном представлении.

Заметим, что генератор дуальных преобразований $R = -\int R_4 d^3x = \frac{i}{2}\int(\vec{E}^M\vec{K} - \vec{H}^M\vec{M} + \vec{H}^N\vec{P} - \vec{E}^N\vec{N})d^3x$ коммутирует со всеми генераторами ларморовской группы: $[R, I_i] = 0$.

4. *Закон сохранения числа частиц*

Гамильтонова форма позволяет установить еще один закон сохранения, связь которого с преобразованиями внутренней симметрией теории неочевидна в лагранжевом подходе. Гамильтониан (9) инвариантен относительно следующих канонических преобразований:

$$q_\mu^{M(N)'} = q_\mu^{M(N)}\cos\varphi + \frac{1}{k_0}\pi_\mu^{M(N)}\sin\varphi, \qquad \pi_\mu^{M(N)'} = \pi_\mu^{M(N)}\cos\varphi - k_0 q_\mu^{M(N)}\sin\varphi. \tag{27}$$

Для бесконечно малых преобразований (27) производящая функция запишется так:

$$F = \sum_{\vec{k}}\left[q_\mu^M\pi_\mu^{M'} + q_\mu^N\pi_\mu^{N'} + \varphi\left(\frac{(\pi_\mu^{M'})^2}{2k_0} + \frac{(q_\mu^M)^2k_0}{2} + \frac{(\pi_\mu^{N'})^2}{2k_0} + \frac{(q_\mu^N)^2k_0}{2}\right)\right], \tag{28}$$

так что $\pi_\mu^{M(N)} = \dfrac{\partial F}{\partial q_\mu^{M(N)}}$, $q_\mu^{M(N)'} = \dfrac{\partial F}{\partial \pi_\mu^{M(N)'}}$, и соответствующий интеграл движения имеет вид (см. также [6]):

$$G = \sum_{\vec{k}}(\overset{+}{m}_\mu m_\mu + \overset{+}{n}_\mu n_\mu). \tag{29}$$

Сохранение величины G соответствует закону сохранения числа квантов для свободного поля. В координатном представлении выражение для числа квантов свободного электромагнитного поля имеет вид:

$$G = \frac{1}{2(2\pi)^3}\iint \frac{\vec{E}^M(x)\vec{E}^M(y) + \vec{E}^N(x)\vec{E}^N(y) + \vec{H}^M(x)\vec{H}^M(y) + \vec{H}^N(x)\vec{H}^N(y)}{|\vec{x}-\vec{y}|^2}d^3xd^3y. \tag{30}$$

Выражение (30) есть непосредственное обобщение на двухпотенциальный случай выражения, данного в работе [7]. Преобразования (27) имеют локальный вид только применительно к полям

$$M_\mu(\vec{k},t),\ N_\mu(\vec{k},t): M'_\mu(\vec{k},t) = M_\mu(\vec{k},t)e^{-i\varphi}, \qquad N'_\mu(\vec{k},t) = N_\mu(\vec{k},t)e^{-i\varphi}$$

и, как следует из вида (30), в координатном пространстве будут соответствовать некоторым интегральным преобразованиям. Можно убедиться также (проще всего это сделать в импульсном представлении), что в квантовой теории $[G, I_k] = [G, R] = 0$ $(k = 1, 2, 3)$. Таким образом, полная группа инвариантности теории есть группа $O(3)\otimes U(1)\otimes U(1)$.

5. *Заключение*

Использование двух независимых потенциалов означает в общем случае увеличение числа степеней свободы при описании наблюдаемых. Однако в квантовой теории при введении ограничения на выбор векторов состояния для описания электромагнитного поля двухпотенциальная формулировка электромагнитного поля эквивалентна традиционной однопотенциальной [8]. Дополнительное условие имеет при этом вид:

$$(\partial_\mu M_\nu - \partial_\nu M_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha N_\beta)_+|\Phi\rangle = 0, \tag{31}$$

где $|\Phi\rangle$ — векторы состояний и знак плюс означает, что рассматривается часть операторов, содержащая положительные частоты. Применительно к операторам рождения и уничтожения квантов полей M_μ, N_μ условие (31) примет вид:

$$[m_1(\vec{k}) - n_2(\vec{k})]\,|\Phi\rangle = [m_2(\vec{k}) + n_1(\vec{k})]\,|\Phi\rangle = 0, \tag{31а}$$

$$[m_3(\vec{k}) + im_4(\vec{k})]\,|\Phi\rangle = [n_3(\vec{k}) + in_4(\vec{k})]\,|\Phi\rangle = 0, \tag{31б}$$

и условие (31б) означает также, что (31) содержит в себе и условие Лоренца для потенциалов M_μ, N_μ.

С учетом условий (31а, б) можно убедиться, что

$$\langle\Phi|G_2|\Phi\rangle = \langle\Phi|G_3|\Phi\rangle = 0, \tag{32}$$

а также

$$\langle\Phi|G_1|\Phi\rangle = \langle\Phi|S|\Phi\rangle = N_R - N_L,$$

$$\langle\Phi|G|\Phi\rangle = N_R + N_L, \tag{33}$$

где N_L, N_R обозначают собственные значения операторов числа лево- и правополяризованных фотонов, так что $\hat{N}_L = \sum_k m_L^+ m_L$, $\hat{N}_R = \sum_k m_R^+ m_R$, где $m_L(\vec{k}) = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(m_1(\vec{k}) + im_2(\vec{k}))$, $m_R(\vec{k}) = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(m_1(\vec{k}) - im_2(\vec{k}))$. Из (32)–(33) следует, что с учетом условий

(31) имеет место редукция обсуждаемой группы внутренней симметрии на группу $U(1)\otimes U(1)$ соответствующей дуальной симметрии уравнений Максвелла и внутренней симметрии теории электромагнитного поля, приводящей к закону сохранения числа фотонов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. I. Strazhev, S. I. Kruglov, *Acta Phys. Pol.* **B8**, 807 (1977).
[2] Г. Голдстейн, *Классическая Механика*, Наука, Москва 1975.
[3] E. L. Hill, *Rev. Mod. Phys.* **23**, 253 (1953).
[4] В. И. Стражев, Л. М. Томильчик, *Электродинамика с магнитным зарядом*, Наука и техника, глава П, Минск 1975.
[5] S. Deser, C. Teitelboim, *Phys. Rev.* **D13**, 1592 (1976).
[6] С. И. Круглов, *ДАН БССР* **22**, 708 (1978).
[7] Я. Б. Зельдович, *ДАН СССР* **163**, № 6 (1965).
[8] Ю. В. Кресин, В. И. Стражев, *ТМФ* **36**, 426 (1978).