Vol. B10 (1979) ACTA PHYSICA POLONICA No 2

О ДИАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ВЕКТОРНОГО И СПИНОРНОГО ПОЛЕЙ

ON DYAL SYMMETRY OF VECTOR AND SPINOR FIELDS

В. И. Стражев, П. Л. Школьников

Институт физики Академии наук Белорусской ССР, Минск*

(Поступила в редакцию 26 июля 1978 г.)

It is shown that equations of a vector field of general type and of an 8-component spinor field have the same matrix formulation. The internal symmetry group of these equations, which we called the dyal symmetry or the D-symmetry, is isomorphic to the O(3,1) group. The explicit form of finite dyal transformations is given. The transformations of the Pauli-Gürsey group of the 4-component massless Dirac field are a particular case (O(3) subgroup) of dyal transformations.

1. Введение

Уже достаточно давно установлено, что уравнениям Максвелла для свободного поля, уравнениям Дирака для 8-ми компонентного поля при $m \neq 0$ и 4-компонентного поля при $m = 0$ присуща внутренняя симметрия. Первые из них инвариантны относительно дуальных преобразований (см. например [1]), вторые — относительно γ_5 преобразований (см. например [2]) и преобразований группы Паули-Гюрши [3]. При определенном обобщении уравнений Максвелла, а также уравнений Прока (это соответствует переходу и уравнениям векторного поля общего типа (см. формулы (2) — (4)), можно расширить группу инвариантности этих уравнений. В работах [4,5] на основе кватернионного рассмотрения было установлено, что уравнения векторного поля общего типа (уравнения В.П.) инвариантны относительно преобразований 6-ти параметрической группы, не затрагивающей пространственно-временных координат. Эта группа была названа группой диальных преобразований или D-группой. В настоящей работе рассмотрена матричная формулировка теории В.П. и показана ее эквивалентность формулировке 8-ми компонентного спинорного поля. Это означает, что D-группа является группой инвариантности и этого поля (см. также [5]), ее преобразования эквивалентны

* Address: Institute of Physics, Lenin Avenue 70, Minsk-72, 220072, USSR.

преобразованиям, ранее рассмотренных Гюрши (см. также [6]). Для нейтринного поля O(3) подгруппа D-группы эквивалентна преобразованиям группы Паули--Гюрши [3]. Отметим, что D-группа является группой инвариантности не только уравнений для свободных полей, но и в присутствии взаимодействия с электромагнитным полем. В рамках развитого подхода показан изоморфизм D-группы группе O(3, 1), установлен явный вид конечных диальных преобразований для рассматриваемых полей. При этом использована векторная параметризация групп SO(n, C) (см. [7, 8]). Сформулируем предварительно некоторые результаты, относящиеся к теории В.П. и ее диальной симметрии, используя тензорный формализм ((см. здесь [9]). Уравнения В. П. могут быть получены из лагранжиана вида

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}^2+(\partial_\mu A_\mu)^2-(\partial_\mu B_\mu)^2+m^2(A_\mu^2-B_\mu^2)\right], \tag{1}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha B_\beta, \tag{2}$$

при варьировании по двум независимым потенциалам A_μ, B_μ. Они имеют вид

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}+\partial_\mu\psi+m^2A_\mu = 0, \qquad \partial_\nu\tilde{F}_{\mu\nu}+\partial_\mu\check{\psi}+m^2B_\mu = 0, \tag{3}$$

$$\partial_\mu A_\mu+\psi = 0, \qquad \partial_\mu B_\mu+\check{\psi} = 0, \tag{4}$$

и $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$, $\varepsilon_{1234} = -i$ (отметим, что ψ, $\check{\psi}$ в (3), (4) отличаются знаком минус от определений, использованных в [4,5,9]). Теория В.П. инвариантна относительно D-группы, инфинитезимальные преобразования которой применительно к потенциалам A_μ, B_μ имеют вид:

$$\delta A_\mu = -\tfrac{1}{4}(\varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}B_\sigma+\delta_{\mu[\alpha}A_{\beta]})\omega_{\alpha\beta}, \qquad \delta B_\mu = -\tfrac{1}{4}(-\varepsilon_{\alpha\beta\mu\sigma}A_\sigma+\delta_{\mu[\alpha}B_{\beta]})\omega_{\alpha\beta}. \tag{5}$$

Шесть независимых значений тензора-параметра $\omega_{\alpha\beta}$ ($\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$) можно выразить через компоненты двух вещественных инфинитезимальных 3-векторов $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{k}$: $\omega_{ij} = \varepsilon_{ijm}n_m$, $\omega_{4n} = -ik_n$.

2. *Матричная формулировка теории В.П.*

Лагранжиан (1) и уравнения (2)—(4) могут быть записаны в следующей 8-ми компонентной матричной форме (эта формулировка является обобщением подхода, развитого в работах [10—12] для безмассового поля (см. также [13]):

$$\mathscr{L} = \overline{\Psi}\Psi-m^2\overline{A}A = -\partial_\mu\overline{A}\alpha_\mu\bar{\alpha}_\nu\partial_\nu A-m^2\overline{A}A, \tag{6}$$

$$\alpha_\mu\partial_\mu\Psi-m^2A = 0, \qquad \bar{\alpha}_\mu\partial_\mu A-\Psi = 0, \tag{7}$$

где

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}A_\mu\\ B_\mu\end{pmatrix}, \qquad \Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}E_\mu\\ H_\mu\end{pmatrix}, \tag{8}$$

и $\overline{\Psi} = -(\partial_\mu \overline{A})\alpha_\mu$, $\overline{A} = A^\dagger \beta$, $E_4 = i\psi$, $H_4 = i\check{\psi}$, $\alpha_\mu = (\boldsymbol{\alpha}, iI_8)$, $\tilde{\alpha}_\mu = (\boldsymbol{\alpha}, -iI_8)$, I_8 — единичная 8-мерная матрица, $\boldsymbol{\alpha}$, β — матрицы 8×8, причем

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\alpha}^{(4)} & i\boldsymbol{\sigma}^{(4)} \\ -i\boldsymbol{\sigma}^{(4)} & -\boldsymbol{\alpha}^{(4)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^{(4)} & -i\boldsymbol{\alpha}^{(4)} \\ i\boldsymbol{\alpha}^{(4)} & \boldsymbol{\sigma}^{(4)} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -K \end{pmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

и $\boldsymbol{\alpha}^{(4)}$, $\boldsymbol{\sigma}^{(4)}$ — матрицы 4×4, $\boldsymbol{\alpha}^\dagger = \boldsymbol{\alpha}$, $\beta^\dagger = \beta$. Справедливы следующие перестановочные соотношения (явный вид матриц $\boldsymbol{\alpha}^{(4)}$, $\boldsymbol{\sigma}^{(4)}$ приведен в работе [11]):

$$[K, \boldsymbol{\sigma}^{(4)}]_- = [K, \boldsymbol{\alpha}^{(4)}]_+ = 0, \quad [\beta, \boldsymbol{\sigma}]_- = [\beta, \boldsymbol{\alpha}]_+ = 0, \tag{10}$$

$$[\sigma_i\ \sigma_k]_+ = [\alpha_i, \alpha_k]_+ = 2\delta_{ik}, \quad [\alpha_j, \sigma_k]_- = 2i\varepsilon_{jkm}\sigma_m, \quad [\sigma_j, \sigma_k]_- = [\alpha_j, \alpha_k]_- = 2i\varepsilon_{jkm}\sigma_m.$$

При переходе к 4-х компонентной матричной формулировке В.П. уравнения (2) — (4) (или (7)) примут вид:

$$\bar{\beta}_\mu \partial_\mu M = mN, \quad \beta_\mu \partial_\mu N = mM, \tag{11}$$

плюс комплексно сопряженные уравнения, где

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} - i\boldsymbol{H} \\ i\psi + \check{\psi} \end{pmatrix}, \quad N = -\frac{m}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} - i\boldsymbol{B} \\ iA_0 + B_0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\beta_\mu = (\beta_k, iI_4), \quad \bar{\beta}_\mu = (\beta_k, -iI_4), \quad \beta_1\beta_2 = i\beta_3, \quad [\beta_i, \beta_k]_+ = 2\delta_{ik},$$

$$[\beta_i, \beta_k]_- = 2i\varepsilon_{ikm}\beta_m. \tag{13}$$

Переход от 8-ми компонентной к 4-х компонентной формулировке осуществляется с помощью унитарной матрицы

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_4 & -iI_4 \\ K & iK \end{pmatrix}. \tag{14}$$

3. Конечные диальные преобразования

Инфинитезимальные преобразования (5) могут быть записаны так:

$$\delta A = SA, \quad \delta\Psi = S\Psi, \quad S = -i\boldsymbol{\sigma}^* \frac{\boldsymbol{n}}{2} - \boldsymbol{\alpha}^* \frac{\boldsymbol{k}}{2}, \tag{15}$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. Как можно непосредственно убедиться $[\alpha_\mu, S]_- = 0$. Полагая $S = \sum J_{[\mu\nu]}\omega_{[\mu\nu]}$ (проводится суммирование по 6-ти независимым индексам), можно установить явный вид генераторов D-группы в матричном 8-компонентном представлении:

$$J_{jk} = -\frac{i}{2}\varepsilon_{jkm}\sigma^*_m, \qquad J_{4k} = \frac{i}{2}\alpha^*_k. \tag{16}$$

Используя (10), можно показать, что генераторы $J_{\mu\nu}$ удовлетворяют алгебре генераторов группы Лоренца:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\varrho\sigma}]_- = \delta_{\nu\varrho}J_{\mu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}J_{\nu\varrho}-\delta_{\mu\varrho}J_{\nu\sigma}-\delta_{\nu\sigma}J_{\mu\varrho}. \tag{17}$$

Матрицу S можно выразить через матрицу инфинитезимального преобразования 4-вектора относительно собственной группы Лоренца $\Lambda(\boldsymbol{q})$ [7,8], где

$$\Lambda(\boldsymbol{q}) = q_+ + q^*_- = \begin{bmatrix} 0 & n_3 & -n_2 & ik_1 \\ -n_3 & 0 & n_1 & ik_2 \\ n_2 & -n_1 & 0 & ik_3 \\ -ik_1 & -ik_2 & -ik_3 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

и матрицы q_+, q_- имеют вид ($\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{n}+i\boldsymbol{k})$, $\boldsymbol{q}$ — вектор-параметр собственной группы Лоренца):

$$q_+ = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & 0 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & 0 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad q^*_- = \begin{bmatrix} 0 & q^*_3 & -q^*_2 & -q^*_1 \\ -q^*_3 & 0 & q^*_1 & -q^*_2 \\ q^*_2 & -q^*_1 & 0 & -q^*_3 \\ q^*_1 & q^*_2 & q^*_3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Исходя из (18) и явного вида матриц $\boldsymbol{\alpha}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^*$, можно показать, что

$$S = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \Lambda(\boldsymbol{q}) & \Lambda(i\boldsymbol{q}) \\ -\Lambda(i\boldsymbol{q}) & \Lambda(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix} = Q_+ + Q^*_-,$$

$$\Lambda(i\boldsymbol{q}) = i(q_+ - q^*_-), \qquad Q_+ = q_+\otimes\omega, \qquad Q^*_- = q^*_-\otimes\omega^*,$$

$$\omega = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \qquad \omega^2 = \omega, \qquad \omega^{*2} = \omega^*, \qquad Q_+Q^*_- = 0. \tag{20}$$

Матрица конечных диальных преобразований запишется так (необходимо учесть, что $q_+^2 = -\boldsymbol{q}^2 I_4$, $q_-^{*2} = -\boldsymbol{q}^{*2}I_4$)

$$D = \exp(Q_+ + Q^*_-) = \exp(q_+)\otimes\omega + \exp(q^*_-)\otimes\omega = \tfrac{1}{2}\cos\sqrt{\boldsymbol{q}^2}\begin{pmatrix} I_4 & iI_4 \\ -iI_4 & I_4 \end{pmatrix}$$

$$+\tfrac{1}{2}\cos\sqrt{\boldsymbol{q}^{*2}}\begin{pmatrix} I_4 & -iI_4 \\ iI_4 & I_4 \end{pmatrix} + \frac{\sin\sqrt{\boldsymbol{q}^2}}{\sqrt{\boldsymbol{q}^2}}\, q_+\otimes\omega + \frac{\sin\sqrt{\boldsymbol{q}^{*2}}}{\sqrt{\boldsymbol{q}^{*2}}}\, q^*_-\otimes\omega^*. \tag{21}$$

Выражение (21) упрощается при переходе к 4-х компонентой матричной формулировке В.П. Можно показать, что

$$UDU^{-1} = \begin{pmatrix} D_4 & 0 \\ 0 & D_4^* \end{pmatrix},$$

где

$$D_4 = I_4 \cos\sqrt{\boldsymbol{q}^{*2}} + i\boldsymbol{q}^*\boldsymbol{d}\,\frac{\sin\sqrt{\boldsymbol{q}^{*2}}}{\sqrt{\boldsymbol{q}^{*2}}}, \tag{22}$$

и матрицы d_i ($d_i = K\beta_i K$) удовлетворяют перестановочным соотношениям (21). Преобразования (22) отвечают приводимому представлению D-группы. Существует унитарное преобразование R такое, что

$$R\boldsymbol{d}R^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = I_2 \otimes \boldsymbol{\tau}, \tag{23}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — матрицы Паули. При этом $R\beta_\mu R^{-1} = \Sigma_\mu$, $\Sigma_1 = -\tau_1 \otimes I_2$, $\Sigma_2 = -\tau_2 \otimes I_2$, $\Sigma_3 = \tau_3 \otimes I_2$, $\Sigma_4 = iI_4$ и полевые уравнения по-прежнему имеют вид (11) при замене $\beta_\mu \to \Sigma_\mu$, $\bar{\beta}_\mu \to \bar{\Sigma}_\mu$, $M \to \check{M}$, $N \to \check{N}$, где

$$\check{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}, \quad \check{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \frac{-m}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G_1 - iG_2 \\ -G_3 + iG_4 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \frac{-m}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G_3 + iG_4 \\ G_1 + iG_2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

и G_1, G_2, G_3, G_4 являются компонентами комплексного 4-вектора $G_\mu = A_\mu - iB_\mu$. Явный вид M_1, M_2 может быть получен из N_1, N_2 соответственно, при замене $-mG_\mu \to iF_\mu$, $F_\mu = E_\mu - iH_\mu$. Относительно D-группы двухкомпонентные величины M_1, M_2, N_1, N_2 преобразуются по неприводимому спинорному представлению $(0, \frac{1}{2})$:

$$\delta M_a = i\boldsymbol{q}^*\boldsymbol{\tau} M_a, \qquad \delta N_a = i\boldsymbol{q}^*\boldsymbol{\tau} N_a, \qquad a = 1, 2. \tag{25}$$

Величины M_a, N_a можно назвать D-спинорами. Конечное преобразование D-группы в этом неприводимом представлении имеет вид (22) при замене $I_4 \to I_2$, $d_\mu \to \tau_\mu$, $\tau_\mu = (\tau_k, iI_2)$.

4. *Диальная симметрия спинорного поля*

Уравнения для 8-ми компонентного спинора (например, нуклонного поля) $N = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$ имеют вид:

$$\Gamma_\mu \partial_\mu N = mN, \qquad \Gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu, \tag{26}$$

где γ_μ — матрицы Дирака, $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что в этом представлении преобразования Гюрши [3] запишутся так:

$$\delta N = \check{S}N, \qquad \check{S} = \begin{pmatrix} \omega I_4 & \varphi_2 I_4 \\ \varphi_1 I_4 & -\omega I_4 \end{pmatrix} = i\boldsymbol{q}^*\boldsymbol{\tau} \otimes I_4, \tag{27}$$

где $\omega = iq_3^*$, $\varphi_1 = iq_1^* + q_2^*$, $\varphi_2 = iq_1^* - q_2^*$. Инвариантность уравнений (26) относительно преобразований (27) очевидна в силу справедливости: $[\check{S}, \Gamma_\mu]_- = 0$. В 8-ми компонентном представлении генераторы преобразований Гюрши имеют вид:

$$J_{kl} = \frac{i}{2}\varepsilon_{klm}\tau_m \otimes I_4, \qquad J_{4i} = \frac{i}{2}\tau_i \otimes I_4$$

и удовлетворяют перестановочным соотношениям (17), т.е. мы доказали изоморфизм преобразований Гюрши группе Лоренца.

Уравнения (26) могут быть записаны в следующей 4-компонентной форме:

$$\check{\alpha}_\mu \partial_\mu L = mP, \qquad \check{\bar{\alpha}}_\mu \partial_\mu P = mL, \tag{28}$$

где

$$L = i\begin{pmatrix}\eta_p\\ \eta_n\end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix}\xi_p\\ \xi_n\end{pmatrix}, \quad \check{\alpha}_\mu = \begin{pmatrix}\tau_\mu & 0\\ 0 & \tau_\mu\end{pmatrix}, \quad \check{\bar{\alpha}}_\mu = \begin{pmatrix}\bar{\tau}_\mu & 0\\ 0 & \bar{\tau}_\mu\end{pmatrix}, \quad \psi_p = \begin{pmatrix}\xi_p\\ \eta_p\end{pmatrix},$$

$$\psi_n = \begin{pmatrix}\xi_n\\ \eta_n\end{pmatrix}, \qquad \tau_\mu = (\boldsymbol{\tau}, iI_2), \qquad \bar{\tau}_\mu = (\boldsymbol{\tau}, -iI_2)$$

и матрица обсуждаемых преобразований приобретает следующий вид:

$$\bar{S}_4 = i(\boldsymbol{\tau} \otimes I_2)\boldsymbol{q}^* = i\check{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{q}^*, \tag{29}$$

где матрицы $\check{d}_i$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (13) и $[\check{d}_i, \check{\alpha}_\mu] = 0$. Посредством унитарного преобразования можно установить взаимосвязь между матрицами $\check{\alpha}_\mu$, $\check{\bar{\alpha}}_\mu$ в (28) и Σ_μ, $\bar{\Sigma}_\mu$, а также $\check{d}_i$ и d_i в (23), т.е. преобразования Гюрши эквивалентны диальным преобразованиям, введенным при рассмотрении В.П. В этом представлении волновые функции спинорного поля будут иметь вид:

$$L' = \begin{pmatrix}L_1\\ L_2\end{pmatrix}, \quad P' = \begin{pmatrix}P_1\\ P_2\end{pmatrix}, \quad L_1 = i\begin{pmatrix}\eta_p^1\\ \eta_n^1\end{pmatrix}, \quad L_2 = i\begin{pmatrix}\eta_p^2\\ \eta_n^2\end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix}\xi_p^1\\ \xi_n^1\end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix}\xi_p^2\\ \xi_n^2\end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix}\xi^1\\ \xi^2\end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix} \tag{30}$$

и являются D-спинорами.

Итак, уравнения В.П. и 8-ми компонентного спинорного поля имеют эквивалентную матричную формулировку и инвариантны относительно 6-ти параметрической группы непространственных преобразований, причем линейные комбинации тензорных и спинорных величин преобразуются по одному и тому же неприводимому представлению этой группы.

5. *Диальные преобразования и группа Паули-Гюрши*

Покажем теперь, что O(3) подгруппой D-группы является группа Паули--Гюрши [3] (см. также [6,14,15]), хорошо известная в теории слабых взаимодействий. Преобразования группы Паули-Гюрши имеют вид:

$$\psi' = a\psi + b\gamma_5 C\bar{\psi}, \qquad \bar{\psi}' = a^*\bar{\psi} + b^*\psi C^{-1}\gamma_5, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{31}$$

При выборе γ_μ-матриц в виде:

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & i\tau_k \\ -i\tau_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \gamma_2\gamma_4 \tag{32}$$

и используя обозначение $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ преобразования (31) запишем по компонентам так: $\xi'_1 = a\xi_1 - b\eta_2^*$, $\xi'_2 = a\xi_2 + b\eta_1^*$, $\eta'_1 = a\eta_1 - b\xi_2^*$, $\eta'_2 = a\eta_2 + b\xi_1^*$. Подгруппа O(3) D-группы соответствует выбору параметра $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{n}$. Запишем явный вид D-преобразования для подгруппы O(3) применительно к двухкомпонентной величине P_1:

$$\psi_{\mathrm{p}}^{1'} = \left(\cos\sqrt{\boldsymbol{n}^2} + in_3 \frac{\sin\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}\right)\psi_{\mathrm{p}}^1 + \frac{\sin\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}(in_1 + n_2)\psi_{\mathrm{n}}^1,$$

$$\psi_{\mathrm{n}}^{1'} = \left(\cos\sqrt{\boldsymbol{n}^2} - in_3 \frac{\sin\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}\right)\psi_{\mathrm{n}}^1 + \frac{\sin\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}(in_1 - n_2)\psi_{\mathrm{p}}^1. \tag{33a}$$

При $m = 0$ уравнение для спинора $\xi_{\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{n}}^1 \\ \psi_{\mathrm{n}}^2 \end{pmatrix}$ эквивалентно уравнению для спинора $\eta_{\mathrm{p}} = \begin{pmatrix} -\psi_{\mathrm{n}}^{4*} \\ \psi_{\mathrm{p}}^3 \end{pmatrix}$, поэтому преобразования (33) можно переписать следующим образом:

$$\psi_{\mathrm{p}}^1 = a\psi_{\mathrm{p}}^1 - b\psi_{\mathrm{p}}^{4*}, \qquad \psi_{\mathrm{p}}^{4'} = a\psi_{\mathrm{p}}^4 + b\psi_{\mathrm{p}}^{1*}, \tag{33b}$$

где

$$a = \cos\sqrt{\boldsymbol{n}^2} + in_3 \frac{\sin\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}, \qquad b = \frac{\sin\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}{\sqrt{\boldsymbol{n}^2}}(in_1 + n_2), \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Преобразования (33) совпадают с первым и третьим выражениями в преобразованиях (31), записанных для компонент спиноров ψ, $\bar{\psi}$. Аналогичное совпадение нетрудно установить для остальных спинорных компонент. Итак, группа Паули--Гюрши есть подгруппа преобразований D-группы (попутно мы дали доказательство ее изоморфизма группе O(3) в рамках подхода, отличного от известных в литературе (см., например, [3,6,14,16]).

6. Заключение

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что возникновение диальной симметрии связано с вырождением по массе либо различных спиновых состояний одной и той же частицы (векторное поле общего типа, включающее как спин 0, так и 1), либо состояний с одним и тем же значением спина, но различающихся внутренними квантовыми числами (например, нуклонное и электрон--мюонное 8-ми компонентное спинорное поле при условии, что $m_p = m_n$ и $m_e = m_\mu$ или же $m_l = m_\mu = 0$ или 4-компонентное нейтринное поле).

Группа Паули-Гюрши применительно к 8-ми компонентному массивному спинорному полю может, как известно [3,6] рассматриваться как пространственно-временной аналог группы изотопической симметрии. Мы сталкиваемся здесь с возможностью описания внутренних свойств в рамках пространственно-временного рассмотрения, то есть определенные пространственновременные свойства релятивистских волновых уравнений связаны с внутренней симметрией полевой системы. Такого рода подход представляет большой интерес с точки зрения кварковых моделей адронов (см. например, [17]).

Диальная симметрия сохраняется и при наличии взаимодействия с электромагнитным полем, если его введение в полевые уравнения осуществляется "минимальным" образом посредством подстановки: $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieC_\mu$, где C_μ – электромагнитный потенциал.

От уравнений (7) легко перейти к уравнениям вида:

$$[\Gamma_\mu(\partial_\mu - ieC_\mu) + \kappa]\Phi = 0,$$

которые хорошо известны в литературе (см. [18—20]), где Γ_μ – матрицы 16×16, построенные из матриц α_μ, $\bar{\alpha}_\mu$ и удовлетворяющие алгебре Дирака, волновая функция Φ составлена из функций mA, Ψ. В работе [21] на основе подхода Гельфанда--Яглома к теории релятивистских волновых уравнений [22,23] показано, что диальная симметрия является свойством всех диракоподобных уравнений. С точки зрения группы Лоренца эти уравнения основаны иа использовании кратных (повторяющихся) неприводимых представлений (см. [24] и цитированную здесь литературу). Если уравнения являются не распадающимися (пример: уравнения В.П.), то они описывают частицу с несколькими значениями спина (мультиспином) и одной массой покоя, которую можно рассматривать как систему слабо связанных фермионов (см. также [21,25,26]). Симметрию можно определить, следовательно, как внутреннюю симметрию релятивистских волновых уравнений, описывающих частицы с мультиспином и одной массой покоя. Отметим также, что с точки зрения D-группы определенные линейные комбинации тензорных и спинорных величин преобразуются по одному и тому же ("спинорному"!) представлению. Этот факт является групповым выражением алгебраической эквивалентности между теориями В.И. и 8-ми компонентного спинорного поля [27,28].

Очевидна и возможность введения локализации параметров диальных преобразований, что для В.П. должно привести к рассмотрению компенсирующего поля со структурой, аналогичной структуре компенсирующего поля, возникающего при локализации параметров группы Лоренца [29], т.е. поля кручения. Однако и этот, и ряд других вопросов, затронутых в заключении, нуждаются в дальнейшем изучении, как и возможность использования диальной симметрии в теории калибровочных полей (см. [4]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Стражев, С. И. Круглов, *Acta Phys. Pol.* **B8**, 807 (1977).
[2] D. L. Weaver, *Ann. Phys.* (USA) **101**, 56 (1976); V. I. Strazhev, *Int. J. Theor. Phys.* **16**, 111 (1977).
[3] W. Pauli, *Nuovo Cimento* **6**, 204 (1957); F. Gursey, *Nuovo Cimento* **7**, 411 (1958).
[4] В. И. Стражев, *Известия вузов СССР, физика* № 8 (1977); *Acta Phys. Pol.* **B9**, 449 (1978).
[5] В. И. Стражев, *Докл. Академии наук БССР* **22**, № 5 (1978).
[6] J. E. Schremp, *Phys. Rev.* **113**, 936 (1959).
[7] Ф. И. Федоров, *Докл. Академии наук БССР* **5**, 104, 194 (1961); **17**, 208 (1973); *Докл. Академии наук СССР* **143**, 56 (1962).
[8] A. A. Bogush, F. I. Fedorov, *Rep. Math. Phys.* **11**, 37 (1977).
[9] С. И. Круглов, В. И. Стражев, *Известия вузов СССР, Физика* № 4 (1978).
[10] T. Ohmura, *Prog. Theor. Phys.* **16**, 684 (1956).
[11] M. M. Bakry, *Nucl. Phys.* **87**, 289 (1966).
[12] J. Brana, K. Ljolje, *Fizika* **6**, 117 (1974).
[13] А. А. Боргардт, *Журн. эксп. теор. физ.* **34**, 1324 (1958).
[14] K. Nishijima, *Fundamental Particles*, W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam 1964.
[15] G. Källen, *Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley Publ. Comp. 1964.
[16] E. Gorinaldesi, I. A. Radicati, *Nuovo Cimento* **13**, 667 (1959).
[17] В. Л. Гинзбург, В. И. Манько, *Элемент, частицы и атомное ядро* **6**, 1 (1976).
[18] А. А. Боргардт, *Журн. эксп. теор. физ.* **45**, 116 (1963).
[19] E. Durand, *Phys. Rev.* **D11**, 3405 (1975).
[20] А. А. Богуш, С. И. Круглов, *Известия АН БССР, сер. физ.-мат.* № 6 (1978).
[21] В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, *Теор. мат. физ.*, будет опубликовано.
[22] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, *Журн. эксп. теор. физ.* **18**, № 8 (1948).
[23] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца*, Физматгиз, Москва 1958.
[24] В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров, *Известия АН БССР, сер. физ.-мат.* № 3, 84 (1970).
[25] L. de Broglie, *Theorie generale des particles a spin (Methode de fission)*, 2 ed., Paris 1955.
[26] А. Б. Пестов, *Теор. мат. физ.* **34**, 48 (1978).
[27] C. Cercignani, *J. Math. Phys.* **8**, 417 (1967).
[28] D. Hestenes, *J. Math. Phys.* **8**, 798 (1967).
[29] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).