Vol. B10 (1979) *ACTA PHYSICA POLONICA* No 6

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КЛАСС ВНЕНЬЮТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТЕЛ СДЕДУЮЩИЙ ИЗ УРАВНЕНИЙ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА*

DERIVATION OF THE ONE-PARAMETER CLASS OF POST-NEWTONIAN EQUATIONS OF MOTION

Ч. Янкевич

Выжшая Педагогическая Школа, Жешув**

(*Поступила в редакцию 14 ноября 1978 г.*)

One parameter class of post-Newtonian equations of motion is derived from the Einstein field equations. The equations have been obtained in the potential coordinates which are a generalization of the harmonic coordinates.

1. *Введение*

В 1927 году Эйнштейн и Громмер [1] и Эйнштейн [2] показали, что если рассматривать тела как особенные точки поля, то не можно, не нарушая уравнений тяготения, наперед предписать произвольным образом движение особенных точек. Движение этих точек вытекает из уравнений тяготения. Дальнейшие исследования этой проблемы начались в 1938 году, совершенно независимо по двум направлениям. К одному из этих направлений относятся работы Эйнштейна, Инфельда и других сотрудников, а к другому — работы Фока и его сотрудников.

В работах Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [3], Эйнштейна и Инфельда [4, 5], был разработан метод позволяющий вывести из уравнений тяготения и написать в явной форме ньютоновы и вненьютоновы уравнения движения для точечных особенностей поля.

В работе [6] Фок получил из уравнений тяготения ньютоновые уравнения движения сферически симетричных невращающихся тел. Вненьютоновые уравнения движения получила из уравнений тяготения Петрова методом Фока [7]. В ме-

* Субсидировано польским Министерством Науки, Высшего Образования и Техники, проблема M.P.I.7: „Поля, частицы, пространствовремя".

** Address: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Turkienicza 24, 35-959 Rzeszów, Poland.

тоде Фока тела рассматриваются как отдельные области вне которых компоненты тензора массы равны нулю.

В некотором смысле объединением трактировки тел в методе Эйнштейна–Инфельда и в методе Фока является использование Инфельдом [8] тензора массы с дираковскими дельта-функциями. Применение дираковских дельта-функций сделало все выкладки несравненно простыми и дало возможность написать уравнения движения тел в ковариантной форме [9].

Для получения вненьютоновых уравнений движения в работах [3, 4, 5, 7] используются решения уравнений тяготения высокой точности. Плебаньски и Бажаньски рассматривая в работе [10] общий принцип действия Фоккера показали, что вненьютоновые уравнения движения можно получить из функции Лагранжа, для составления которой достаточны приближенные решения уравнений тяготения только с точностью c^{-2}, c^{-3} соответственно.

В предполагаемой работе мы выводим из уравнений тяготения однопараметрический класс вненьютоновых уравнений движения. Эти уравнения получены нами в однопараметрической потенциальной системе координат, которая является обобщением гармонической системы координат [6]. Для вывода уравнений движения мы используем метод разработанный Плебаньским и Бажаньским [10].

2. *Решение приближенных уравнений тяготения в потенциальных координатах*

Уравнения тяготения

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^2}\,\theta_{\mu\nu}, \tag{1}$$

где ([11], Добавление Г)

$$R_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}, \qquad M_{\mu\nu} = g^{\alpha\varrho}g^{\beta\sigma}g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}\Gamma^{\tau}_{\alpha\beta}\Gamma^{\lambda}_{\varrho\sigma} - g^{\alpha\beta}g^{\varrho\sigma}\partial_\alpha g_{\varrho\mu}\partial_\beta g_{\sigma\nu},$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu\Gamma_\nu + \partial_\nu\Gamma_\mu) - \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}\Gamma_\varrho, \qquad \Gamma^\nu = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}), \tag{2}$$

будем решать методом последовательных приближений, разлагая все функции в ряды по обратным степеням скорости света c. (Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3; под этими повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 0 до 3.)

Величины $\theta_{\mu\nu}$ связаны с тензором массы $T_{\mu\nu}$ формулой

$$\theta_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, T g_{\mu\nu}, \qquad T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}, \tag{3}$$

где ([12], гл. 1, § 4)

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\int\sum_A \mu_A\delta(x-\xi_A)\frac{d\xi^\mu_A}{d\sigma_A}\,\frac{d\xi^\nu_A}{d\sigma_A}\,d\sigma_A,$$

$$d\sigma_A^2 = \int\delta(x-\xi_A)g_{\alpha\beta}d\xi^\alpha_A d\xi^\beta_A(dx). \tag{4}$$

(Индексы A, B, C пробегают значения 1, 2, ..., N.) В этих формулах ξ_A^μ обозначают пространствовременные координаты тел рассматриваемых как особенности поля.

Однопараметрический класс потенциальных координат определяем условиями

$$\nabla_\mu \Gamma^\mu = -\frac{8\pi k\alpha}{c^2} T, \tag{5}$$

$$\nabla_\mu \Gamma_\nu - \nabla_\nu \Gamma_\mu = 0, \tag{6}$$

где α произвольный параметр. Поскольку в условиях (5) и (6) ковариантная производная применяется к нетензорным величинам, то эти условия являются добавочными независимыми уравнениями присоединенными к уравнениям тяготения (1). Эквивалентная форма уравнений (5) и (6) имеет вид

$$\Gamma_\mu = \partial_\mu f, \tag{7}$$

$$g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu f - \partial_\mu f \partial_\nu f) = \frac{8\pi k\alpha}{c^2} T. \tag{8}$$

Поскольку выполнения условий (7) и (8) можно добиться преобразованием координат, то условия эти ограничивают только допустимые координаты. Действительно, в производной системе координат x'^α можем написать ковариантные волновые уравнения для скалярных функций $x^\mu(x'^\alpha)$ и $f(x'^\alpha)$ в виде

$$g'^{\alpha\beta}\partial'_\alpha\partial'_\beta x^\mu(x') - \Gamma'^\sigma \partial'_\sigma x^\mu(x') = -g'^{\varrho\sigma}\partial'_\varrho f(x')\partial'_\sigma x^\mu(x'), \tag{9}$$

$$g'^{\alpha\beta}\partial'_\alpha\partial'_\beta f(x') - \Gamma'^\sigma \partial'_\sigma f(x') = \frac{8\pi k\alpha}{c^2} T(x'). \tag{10}$$

Решая уравнение (10) а затем применяя четыре независимых решения $x^\mu(x'^\alpha)$ линейных уравнений (9) к преобразованию координат, получаем в координатах x^μ формулы (7) и (8).

Для получения приближенных решений уравнений (1), (7) и (8) полагаем, что метрический тензор можно представить в виде

$$g_{00} = 1 + c^{-2}\underset{(2)}{g_{00}} + c^{-4}\underset{(4)}{g_{00}} + \ldots, \qquad g_{0n} = c^{-3}\underset{(3)}{g_{0n}} + \ldots,$$

$$g_{mn} = -\delta_{mn} + c^{-2}\underset{(2)}{g_{mn}} + \ldots . \tag{11}$$

(Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3; под этими повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 1 до 3.) Из формул (2) и (11) следует разложение

$$f = c^{-2}\underset{(2)}{f} + c^{-4}\underset{(4)}{f} + \ldots . \tag{12}$$

Используя (11) и (12) из (1—4), (7) и (8) легко получаем уравнения для метрического тензора

$$\underset{(2)}{\Delta g_{00}} = 8\pi k \sum_A \mu_A \delta(x-\bar{\xi}_A), \qquad \underset{(3)}{\Delta g_{0n}} + 2\underset{(3)}{\Gamma_{0n}} = -16\pi k \sum_A \mu_A V_A^n \delta(\bar{x}-\bar{\xi}_A), \tag{13}$$

$$\underset{(2)}{\Delta g_{mn}} + 2\underset{(2)}{\Gamma_{mn}} = 8\pi k \sum_A \mu_A \delta_{mn} \delta(\bar{x}-\bar{\xi}_A)$$

и уравнение для функции f:

$$\underset{(2)}{\Delta f} = -8\pi k\alpha \sum_A \mu_A \delta(\bar{x}-\bar{\xi}_A), \tag{14}$$

где

$$\underset{(3)}{\Gamma_{0n}} = \partial_n \underset{(2)}{\dot{f}}, \qquad \underset{(2)}{\Gamma_{mn}} = \partial_m \partial_n \underset{(2)}{f}, \tag{15}$$

$$V_A^n = \left.\frac{d\xi_A^n}{d\tau_A}\right|_{\tau_A = t}, \qquad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}, \tag{16}$$

причем введены обозначения $\Delta = \partial_m \partial_m$, $\xi_A^0 = c\tau_A$, $x^0 = ct$.

Решение уравнения (14) имеет вид

$$\underset{(2)}{f} = 2\alpha k \sum_A \frac{\mu_A}{|\bar{x}-\bar{\xi}_A|}. \tag{17}$$

Учитывая тождество

$$\underset{(2)}{f} = \alpha \Delta \varrho, \tag{18}$$

где

$$\varrho = k \sum_A \mu_A |\bar{x}-\bar{\xi}_A|, \tag{19}$$

получаем решения уравнений (13)

$$\underset{(2)}{g_{00}} = -2k \sum_A \mu_A \frac{1}{|\bar{x}-\bar{\xi}_A|},$$

$$\underset{(3)}{g_{0n}} = 2(\alpha+2)k \sum_A \mu_A \frac{V_A^n}{|\bar{x}-\bar{\xi}_A|} - 2\alpha k \sum_A \mu_A \frac{V_A^m (x^m-\xi_A^m)(x^n-\xi_A^n)}{|\bar{x}-\bar{\xi}_A|^3},$$

$$\underset{(2)}{g_{mn}} = -2(\alpha+1)k \sum_A \mu_A \frac{\delta_{mn}}{|\bar{x}-\bar{\xi}_A|} + 2\alpha k \sum_A \mu_A \frac{(x^m-\xi_A^m)(x^n-\xi_A^n)}{|\bar{x}-\bar{\xi}_A|^3}. \tag{20}$$

В гармонической системе координат, которой соответствует параметр $\alpha = 0$, из (20) получаем известные решения ([11], § 55).

$$\underset{(2)}{g^*_{00}} = -2k\sum_A \mu_A \frac{1}{|\bar{x}-\bar{\xi}_A|}, \qquad \underset{(3)}{g^*_{0n}} = 4k\sum_A \mu_A \frac{V^n_A}{|\bar{x}-\bar{\xi}_A|},$$

$$\underset{(2)}{g^*_{mn}} = -2k\sum_A \mu_A \frac{\delta_{mn}}{|\bar{x}-\bar{\xi}_A|}. \tag{21}$$

3. Функция Лагранжа в потенциальных координатах

В работе [10] показано, что функция Лагранжа системы тел имеет вид

$$L = L'+L'', \tag{22}$$

где

$$L' = \int I(d\bar{x}), \tag{23}$$

$$L' = \frac{c^2}{16\pi k}\int\sqrt{-g}\,\Lambda(d\bar{x}), \tag{24}$$

причем

$$I = \sum_A \mu_A\delta(\bar{x}-\bar{\xi}_A)\,(\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}d\xi^\alpha_A d\xi^\beta_A)^{1/2}, \tag{25}$$

$$\sqrt{-g}\,\Lambda = \sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}(\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}-\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}), \tag{26}$$

$$\overset{A}{\tilde{g}}_{\mu\nu} = \int g_{\mu\nu}\delta(x-\xi_A)\,(dx). \tag{27}$$

Из (11) и (25) с точностью до c^{-4} имеем

$$I = \sum_A \mu_A\delta(\bar{x}-\bar{\xi}_A)\,\{1+\tfrac{1}{2}c^{-2}(\underset{(2)}{g_{00}}-V^m_AV^m_A)+c^{-4}[\tfrac{1}{2}\underset{(4)}{g_{00}}+\underset{(3)}{g_{0m}}V^m_A$$
$$+\tfrac{1}{2}\underset{(2)}{g_{mn}}V^m_AV^n_A-\tfrac{1}{8}\underset{(2)}{g^2_{00}}+\tfrac{1}{4}\underset{(2)}{g_{00}}V^m_AV^m_A-\tfrac{1}{8}(V^m_AV^m_A)^2]\}. \tag{28}$$

Учитывая (11) и (26), более длинные вычисления с точностью до c^{-4} дают

$$\sqrt{-g}\,\Lambda = c^{-4}(-\tfrac{1}{2}\underset{(2)}{g_{00}}\Delta\underset{(2)}{g_{00}}+\partial_mA_m)+c^{-6}[-\tfrac{1}{8}\partial_m\underset{(3)}{g^*_{0m}}\partial_n\underset{(3)}{g^*_{0n}}+\tfrac{1}{2}\underset{(3)}{g_{0m}}\Delta\underset{(3)}{g^*_{0m}}-\underset{(4)}{g_{00}}\Delta\underset{(2)}{g_{00}}$$
$$+\tfrac{1}{2}\underset{(2)}{g^2_{00}}\Delta\underset{(2)}{g_{00}}+\alpha\partial_m\varrho\partial_m\underset{(2)}{g_{00}}\Delta\underset{(2)}{g_{00}}+\partial_0B_0+\partial_mB_m], \tag{29}$$

где A_m, B_m и B_0 являются функциями от ϱ, $\underset{(2)}{g_{00}}$, $\underset{(3)}{g_{0n}}$, $\underset{(2)}{g_{mn}}$ и их производных по пространствовременным координатам. Из (22—24), (28) и (29) после интегрирования получаем

$$L = \sum_A \mu_A + c^{-2}\{\sum_A \mu_A(\tfrac{1}{4}\underset{(2)}{\overset{A}{\tilde g_{00}}} - \tfrac{1}{2}V_A^2)\} + c^{-4}\{\sum_A \mu_A[\underset{(3)}{\overset{A}{\tilde g_{0n}}}V_A^n + \tfrac{1}{2}\underset{(2)}{\overset{A}{\tilde g_{mn}}}V_A^m V_A^n + \tfrac{1}{8}\underset{(2)}{\overset{A}{\tilde g^2_{00}}}$$

$$+\tfrac{1}{4}\underset{(2)}{\overset{A}{\tilde g_{00}}}V_A^2 - \tfrac{1}{8}(V_A^m V_A^m)^2 + \tfrac{1}{2}\alpha\overset{A}{\widetilde{\partial_m\varrho}}\underset{(2)}{\overset{A}{\widetilde{\partial_m g_{00}}}}]\} - \frac{c^4}{8\cdot 16\pi k}\int \partial_m \underset{(3)}{g^*_{0m}}\partial_n \underset{(3)}{g^*_{0n}}(d\bar x) + F, \tag{30}$$

где

$$F = \frac{1}{16\pi k}\int [c^{-2}\partial_m A_m + c^{-4}(\partial_0 B_0 + \partial_m B_m)]\,(d\bar x). \tag{31}$$

Поскольку член (31) не влияет на лагранжевы уравнения, то из (30) следует, что для получения вненьютоновых уравнений движения не нужна функция $\underset{(4)}{g_{00}}$.

Формулы (20) дают

$$\underset{(2)}{\overset{A}{\tilde g_{00}}} = -2k\sum_B \mu_B\frac{1}{|\bar\xi_A - \bar\xi_B|}, \qquad \underset{(2)}{\overset{A}{\tilde g^2_{00}}} = 4k^2\sum_{\substack{B\\ B\neq A\\ C\neq A}}\sum_C \mu_B\mu_C\frac{1}{|\bar\xi_A-\bar\xi_B|\,|\bar\xi_A-\bar\xi_C|},$$

$$\underset{(2)}{\overset{A}{\tilde g_{mn}}} = -2k\sum_{\substack{B\\ B\neq A}}\mu_B\frac{\delta_{mn}}{|\bar\xi_A-\bar\xi_B|} - 2\alpha k\sum_{\substack{B\\ B\neq A}}\mu_B\frac{\partial}{\partial\xi_A^m}\frac{\partial}{\partial\xi_A^n}|\bar\xi_A-\bar\xi_B|, \tag{32$$

$$\underset{(3)}{\overset{A}{\tilde g_{0n}}} = 4k\sum_{\substack{B\\ B\neq A}}\mu_B\frac{V_B^n}{|\bar\xi_A-\bar\xi_B|} + 2\alpha k\sum_{\substack{B\\ B\neq A}}\mu_B V_A^m\frac{\partial}{\partial\xi_A^m}\frac{\partial}{\partial\xi_A^n}|\bar\xi_A-\bar\xi_B|,$$

$$\overset{A}{\widetilde{\partial_m\varrho}} = k\sum_{\substack{B\\ B\neq A}}\mu_B\frac{\partial}{\partial\xi_A^m}|\bar\xi_A-\bar\xi_B|, \qquad \underset{(2)}{\overset{A}{\widetilde{\partial_m\varrho_{00}}}} = 2k\sum_{\substack{B\\ B\neq A}}\mu_B\frac{\xi_A^m-\xi_B^m}{|\bar\xi_A-\bar\xi_B|^3}.$$

Интеграл

$$\int\partial_m\underset{(3)}{g^*_{0m}}\partial_n\underset{(3)}{g^*_{0n}}(d\bar x) = -32\sum_{\substack{A\\ A\neq B}}\sum_B \mu_A\mu_B V_A^m V_B^n\frac{\partial}{\partial\xi_A^m}\frac{\partial}{\partial\xi_B^n}|\bar\xi_A-\bar\xi_B| \tag{33}$$

вычисленный в работе [12], гл. 4, § 2. Подстановка (32) и (33) в (30) дает функцию Лагранжа для системы тел во вненьютоновом приближении в потенциальных координатах

$$L = \sum_A \mu_A - c^{-2}\left\{\tfrac{1}{2}k\sum_{\substack{A\\ A\neq B}}\sum_B\frac{\mu_A\mu_B}{|\bar\xi_A-\bar\xi_B|} + \tfrac{1}{2}\sum_A\mu_A V_A^2\right\}$$

$$+c^{-4}\left\{-\tfrac{1}{8}\sum_A \mu_A (V_A^m V_A^m)^2 + 2k \sum_A \sum_{\substack{B\\A\neq B}} \mu_A\mu_B \frac{V_A^a V_B^a}{|\xi_A-\xi_B|}\right.$$

$$-\tfrac{3}{2}k \sum_A \sum_{\substack{B\\A\neq B}} \mu_A\mu_B \frac{V_A^2}{|\xi_A-\xi_B|} + \tfrac{1}{2}k^2 \sum_A \sum_{\substack{B\\A\neq B, A\neq C}} \sum_B \frac{\mu_A\mu_B\mu_C}{|\xi_A-\xi_B|\,|\xi_A-\xi_C|}$$

$$+\tfrac{1}{4}k \sum_A \sum_{\substack{B\\A\neq B}} \mu_A\mu_B V_A^m V_B^n \frac{\partial}{\partial\xi_A^m}\frac{\partial}{\partial\xi_B^n}|\xi_A-\xi_B|$$

$$+\alpha k \sum_A \sum_{\substack{B\\A\neq B}} \mu_A\mu_B (V_A^m V_B^n - V_A^m V_A^n) \frac{\partial}{\partial\xi_A^m}\frac{\partial}{\partial\xi_A^n}|\xi_A-\xi_B|$$

$$+\alpha k^2 \sum_A \sum_{\substack{B\\A\neq B, A\neq C}} \sum_C \mu_A\mu_B\mu_C \frac{(\xi_A^m-\xi_B^m)(\xi_A^m-\xi_C^m)}{|\xi_A-\xi_B|\,|\xi_A-\xi_C|^3}\,. \tag{34}$$

Из этой функции Лагранжа обычным образом получаем вненьютоновые уравнения движения. Для $\alpha = 0$, то есть в гармонической системе координат из (34) следует функция Лагранжа выведена Инфельдом и Плебаньским ([12], гл. 4, § 3).

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Einstein, J. Grommer, *Sitzb. Berl. Akad.*, S. 2 (1927).
[2] A. Einstein, *Sitzb. Berl. Akad.*, S. 235 (1927).
[3] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman, *Ann. Math.* **39**, 65 (1938).
[4] A. Einstein, L. Infeld, *Ann. Math.* **39**, 455 (1940).
[5] A. Einstein, L. Infeld, *Canad. J. Math.* **1**, 209 (1949).
[6] В. А. Фок, *ЖЭТФ* **9**, 375 (1939).
[7] Н. М. Петрова, *ЖЭТФ* **19**, 989 (1949).
[8] L. Infeld, *Acta Phys. Pol.* **13**, 187 (1954).
[9] L. Infeld, J. Plebański, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.* Cl. III, **4**, (1956).
[10] J. Plebański, S. Bażański, *Acta Phys. Pol.* **18**, 307 (1959).
[11] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, ГИФМЛ., Москва 1961.
[12] L. Infeld, J. Plebański, *Motion and Relativity*, Pergamon Press — New York, PWN, Warszawa 1960.