Vol. B11 (1980) ACTA PHYSICA POLONICA No 10

ПОЛЕВОЙ, ИНЕРЦИАЛЬНЫЙ И ГРАВИТАЦИОННЫЙ ИМПУЛЬС СИСТЕМЫ ТЕЛ В ПОСТ-НЬЮТОНОВСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ*

FIELD MOMENTUM, INERTIAL MOMENTUM AND GRAVITATIONAL MOMENTUM OF A SYSTEM OF BODIES IN THE POST-NEWTONIAN APPROXIMATION

Ч. Янкевич, Д. Сикора

Высшая Педагогическая Школа, Жешув**

(Поступила в редакцию 4-го января 1980 г.)

It is shown that in the post-newtonian approximation the gravitational momentum of a system of point particles is equal to the sum of field momentum and inertial momentum only in two classes of coordinate systems. This equality may be treated as a natural condition on a coordinate system in which the generally covariant Einstein equations are to be solved.

PACS numbers: 04.20.Me

1. *Введение*

В работах Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [1], Эйнштейна и Инфельда [2] и Инфельда [3] был разработан метод, позволяющий вывести из уравнений поля тяготения пост-ньютоновские уравнения движения тел. В этом методе тела рассматриваются как точечные особенности поля. Вне этих особенностей метрический тензор удовлетворяет уравнениям тяготения

$$R^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = 0. \tag{1}$$

В отличие от метода Эйнштейна, Инфельда и Гофмана, в методе Фока [4—6] тела рассматриваются как конечные области, вне которых тензор массы $T^{\mu\nu}$ равен нулю. Для вывода пост-ньютоновских уравнений движения сферически симметричных невращающихся тел предполагается, что компоненты тензора массы выражаются через глобальные величины, характеризующие тела, такие как плотность,

---

* Субсидировано польским Министерством Науки, Высшего Образования и Техники, проблема M.P.I.7 „Поля, частицы, пространствовремя".

** Address: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Turkienicza 24, 35-959 Rzeszów, Poland.

скорость, давление и другие. Согласно этим предположениям используются уравнения тяготения с тензором массы

$$R^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^2}T^{\mu\nu}. \tag{2}$$

Как видно, в обоих методах принимаются разные абстрактно-математические модели [7] системы тел. Обе модели приблизительно отображают действительную систему тел. Эти модели подобраны так, что оба метода ведут к одинаковым пост-ньютоновским уравнениям движения тел.

В работе [8] Инфельд уточнил модель системы тел рассматриваемых как особенности поля, вводя тензор масс с дираковскими дельта-функциями соответствующими сферически симметричным особенностям. Дальнейшее уточнение состоит в применении модифицированных дираковских дельта-функций [9, 10]. Применение этих функций устранило особенности метрического тензора на мировых линиях тел. Окончательная абстрактно-математическая модель системы тел, рассматриваемых как особенности поля, описывается тензором массы ([11], гл. I, §4)

$$\sqrt{-g}\,T^{\mu\nu} = \int \sum_A m_A\delta(x-\xi_A)\frac{d\xi_A^\mu}{d\sigma_A}\frac{d\xi_A^\nu}{d\sigma_A}\,d\sigma_A,$$

$$d\sigma_A^2 = \int \delta(x-\xi_A)g_{\alpha\beta}d\xi_A^\alpha d\xi_A^\beta(dx), \tag{3}$$

где $\delta(x-\xi_A)$ модифицированные дираковские дельта-функции. Из этого тензора методом Эйнштейна, Инфельда и Гофмана получаются регуляризованные пост-ньютоновские уравнения движения системы сферически симметричных невращающихся тел.

Как известно, псевдотензор энергии-импульса

$$\theta^\sigma{}_\varrho = \sqrt{-g}\,(t^\sigma{}_\varrho+T^\sigma{}_\varrho) \tag{4}$$

введенный Эйнштейном, выражается через супер-потенциалы

$$V^{\alpha\sigma}{}_\varrho = \frac{c^2}{16\pi k}\frac{g_{\varrho\mu}}{\sqrt{-g}}\,\partial_\nu[(-g)\,(g^{\alpha\nu}g^{\sigma\mu}-g^{\sigma\nu}g^{\alpha\mu})] \tag{5}$$

по формулам

$$\theta^\sigma{}_\varrho = \partial_\alpha V^{\alpha\sigma}{}_\varrho. \tag{6}$$

Следуя Инфельду и Плебаньскому ([11], гл. VI, §7), при помощи (4) и (5) определяем полевой импульс

$$P_\varrho^{(\text{пол})} = \int\sqrt{-g}\,t^0{}_\varrho(d\bar{x}), \tag{7}$$

инерциальный импульс

$$P_\varrho^{(\text{ин})} = \int\sqrt{-g}\,T^0{}_\varrho(d\bar{x}) \tag{8}$$

и гравитационный импульс

$$P_\varrho^{(\text{гр})} = \int V^{\alpha 0}{}_\varrho n_\alpha dS. \tag{9}$$

В настоящей работе, последовательно придерживаясь модели тел рассматриваемых как особенности поля, мы исследуем, при каких условиях импульсы (7), (8) и (9) удовлетворяют соотношению

$$P_\varrho^{(\text{пол})}+P_\varrho^{(\text{ин})} = P_\varrho^{(\text{гр})}. \tag{10}$$

Мы доказываем, что для пост-ньютоновского движения тел существуют два класса координитных систем, в которых выполняется равенство (10). Только в этих координатных системах сумма полевого и инерциального импульсов конечная и равна гравитационному импульсу. Таким образом уравнения (10) можно интерпретировать как натуральные условия, определяющие предпочитаемые координатные системы.

2. *Преобразование уравнений поля и псевдотензора энергии-импульса*

Уравнения поля (2) будем решать в потенциальных координатах $\Pi(\alpha)$, которые определяются условиями [12]

$$\nabla_\mu \Gamma^\mu = \frac{8\pi k\alpha}{c^2}\, T, \tag{11}$$

$$\nabla_\mu \Gamma_\nu - \nabla_\nu \Gamma_\mu = 0, \tag{12}$$

где

$$\Gamma^\mu = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\nu(\sqrt{-g}\, g^{\nu\mu}). \tag{13}$$

Здесь T скаляр образованный из тензора массы (3). Для фиксированного значения параметра α уравнения (11) и (12) определяют класс предпочитаемых координат. Заметим, что координаты, связанные преобразованием Лоренца, принадлежат одному классу.

Из тензорных плотностей

$$G^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}, \qquad G_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} \tag{14}$$

образуем символы Томаса ([13], т. II, §19)

$$\Pi^{\mu\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,(G^{\mu\varrho}\partial_\varrho G^{\alpha\beta} - G^{\alpha\varrho}\partial_\varrho G^{\mu\beta} - G^{\beta\varrho}\partial_\varrho G^{\mu\alpha}), \qquad \Pi^\mu{}_{\varrho\sigma} = G_{\varrho\alpha}G_{\sigma\beta}\Pi^{\mu\alpha\beta}. \tag{15}$$

Легко проверить, что символы Христоффеля выражаются формулой

$$\Gamma^\mu{}_{\varrho\sigma} = \Pi^\mu{}_{\varrho\sigma} + \Lambda^\mu{}_{\varrho\sigma}, \tag{16}$$

где

$$\Lambda^{\mu\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\,(X^\alpha G^{\mu\beta} + X^\beta G^{\mu\alpha} - X^\mu G^{\alpha\beta}), \qquad \Lambda^\mu{}_{\varrho\sigma} = G_{\varrho\alpha}G_{\sigma\beta}\Lambda^{\mu\alpha\beta}, \tag{17}$$

причём

$$X_\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu \sqrt{-g}\,, \qquad X^\nu = G^{\nu\mu}X_\mu. \tag{18}$$

В этих обозначениях функция Лагранжа

$$\mathscr{L} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}) \tag{19}$$

имеет вид

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{2}\, \Pi^{\nu}{}_{\alpha\beta}\partial_{\nu}G^{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\, X^{\nu}X_{\nu}. \tag{20}$$

Учитывая формулы, выведенные Фоком ([14], Добавление Г), получаем преобразованные уравнения поля

$$\begin{gathered} G^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}G^{\mu\nu} - 2\Pi^{\mu}{}_{\alpha\beta}\Pi^{\nu\alpha\beta} + X^{\mu}X^{\nu} - \mathscr{L}G^{\mu\nu} \\ -2\Omega^{\mu\nu} + \Omega G^{\mu\nu} = \frac{16\pi k}{c^2}\sqrt{-G}\,\mathscr{T}^{\mu\nu}, \end{gathered} \tag{21}$$

где

$$\Omega_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\,(X_{\mu}\Pi_{\nu} + X_{\nu}\Pi_{\mu}),$$

$$\Omega^{\varrho\sigma} = G^{\varrho\mu}G^{\sigma\nu}\Omega_{\mu\nu}, \qquad \Omega = G^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu}, \tag{22}$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\,(\partial_{\mu}\Pi_{\nu} + \partial_{\nu}\Pi_{\mu}) - \Lambda^{\varrho}{}_{\mu\nu}\Pi_{\varrho}, \qquad \Pi^{\varrho\sigma} = G^{\varrho\mu}G^{\sigma\nu}\Pi_{\mu\nu}, \tag{23}$$

$$\Pi^{\mu} = \partial_{\varrho}G^{\varrho\mu}, \qquad \Pi_{\nu} = G_{\nu\mu}\Pi^{\mu}. \tag{24}$$

Для плотности тензора массы (3) вводим обозначения

$$\mathscr{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-G}\; T^{\mu\nu}, \qquad \mathscr{T}_{\varrho\sigma} = G_{\varrho\mu}G_{\sigma\nu}\mathscr{T}^{\mu\nu}, \qquad \mathscr{T} = G_{\mu\nu}\mathscr{T}^{\mu\nu} \tag{25}$$

причём

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = \det(G^{\mu\nu}) = G. \tag{26}$$

(Заметим, что величины $\Pi^{\alpha\mu\nu}$ введенные Фоком [14] не совпадают с символами Томаса). Условия (11) и (12), определяющие потенциальные координаты можем написать в виде

$$\nabla_{\mu}\Pi^{\mu} = -\frac{8\pi k\alpha}{c^2}\sqrt{-G}\,\mathscr{T}, \tag{27}$$

$$\nabla_{\mu}\Pi_{\nu} - \nabla_{\nu}\Pi_{\mu} = 0. \tag{28}$$

Из уравнений (28) следует

$$\Pi_{\mu} = \partial_{\mu}f. \tag{29}$$

Подставляя (29) в (22) и (23), а затем в (21) и (27), получаем преобразованные уравнения поля в потенциальных координатах

$$\begin{gathered} G^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}G^{\mu\nu} - 2\Pi^{\mu\alpha\beta}\Pi^{\nu}{}_{\alpha\beta} + X^{\mu}X^{\nu} - \mathscr{L}G^{\mu\nu} \\ +2G^{\mu\varrho}G^{\nu\sigma}\partial_{\varrho}\partial_{\sigma}f - 2\Pi^{\varrho\mu\nu}\partial_{\varrho}f = \frac{16\pi k}{c^2}\sqrt{-G}\,(\mathscr{T}^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\,\mathscr{T}G^{\mu\nu}), \end{gathered} \tag{30}$$

причём функция f удовлетворяет уравнению

$$G^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\partial_\beta f - \partial_\alpha f \partial_\beta f) = \frac{8\pi k\alpha}{c^2}\sqrt{-G}\,\mathscr{T}. \tag{31}$$

Как известно, полевая часть псевдотензора энергии-импульса (4) имеет вид

$$\sqrt{-g}\, t^\sigma{}_\varrho = \frac{c^2}{16\pi k}(\mathscr{L}\delta^\sigma_\varrho - H^\sigma{}_\varrho), \tag{32}$$

где

$$H^\sigma{}_\varrho = \sqrt{-g}\,[2\Gamma^{\sigma\lambda\tau}\Gamma_{\tau\lambda\varrho} - \Gamma^\alpha_{\alpha\tau}(\Gamma^{\sigma\tau}{}_\varrho + \Gamma^{\tau\sigma}{}_\varrho) + \Gamma^\alpha_{\alpha\varrho}(g^{\sigma\lambda}\Gamma^\beta_{\beta\lambda} - g^{\lambda\tau}\Gamma^\sigma_{\lambda\tau})]. \tag{33}$$

Здесь индексы величин $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ поднимаются и опускаются при помощи $g^{\varrho\sigma}$ и $g_{\varrho\sigma}$ соответственно. Подставляя (14), (15) и (16) в (33), получаем

$$H^\sigma{}_\varrho = (2\Pi^{\sigma\lambda\tau}\Pi_{\tau\lambda\varrho} + X^\sigma X_\varrho). \tag{34}$$

Подстановка (34) в (32) даёт

$$\sqrt{-g}\, t^\sigma{}_\varrho = \frac{c^2}{16\pi k}(\mathscr{L}\delta^\sigma_\varrho - 2\Pi^{\sigma\lambda\tau}\Pi_{\tau\lambda\varrho} - X^\sigma X_\varrho). \tag{35}$$

Здесь функция $\mathscr{L}$ выражается формулой (20). Используя (14) из (5) имеем

$$V^{\alpha\sigma}{}_\varrho = \frac{c^2}{16\pi k} G_{\varrho\mu}\partial_\nu(G^{\alpha\nu}G^{\sigma\mu} - G^{\sigma\nu}G^{\alpha\mu}). \tag{36}$$

Из (29) следует, что в потенциальных координатах суперпотенциалы (36) имеют вид

$$V^{\alpha\sigma}{}_\varrho = \frac{c^2}{16\pi k}[G_{\varrho\mu}(G^{\alpha\nu}\partial_\nu G^{\sigma\mu} - G^{\sigma\nu}\partial_\nu G^{\alpha\mu}) + (\delta^\alpha_\varrho G^{\sigma\beta} - \delta^\sigma_\varrho G^{\alpha\beta})\partial_\beta f]. \tag{37}$$

Таким образом мы выразили уравнения поля, псевдотензор энергии-импульса и суперпотенциалы через $G^{\mu\nu}$, $G_{\alpha\beta}$, $\Pi^{\alpha\mu\nu}$ и X_μ, причём индексы у этих последних величин поднимаются и опускаются при помощи $G^{\mu\nu}$ и $G_{\alpha\beta}$ соответственно. (Во всех формулах греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3; под этими повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 0 до 3.)

3. Приближённое решение уравнений поля

Для получения приближённых решений уравнений (30) и (31) полагаем, что тензорную плотность $G^{\mu\nu}$ можно представить в виде ряда ([11], гл. II, §5)

$$G^{00} = 1 + c^{-2}\underset{(2)}{\gamma^{00}} + c^{-4}\underset{(4)}{\gamma^{00}} + \ldots, \qquad G^{0n} = c^{-3}\underset{(3)}{\gamma^{0n}} + \ldots,$$

$$G^{mn} = -\delta^{mn} + c^{-2}\underset{(2)}{\gamma^{mn}} + \ldots. \tag{38}$$

(Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3; под этими повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 1 до 3.) Из формул (29) и (38) следует разложение

$$f = c^{-2}\underset{(2)}{f}+c^{-4}\underset{(4)}{f}+\ \ldots\ . \tag{39}$$

Используя разложения (38) и (39) из уравнений (31) и тензора массы (3), легко получаем

$$\Delta \underset{(2)}{f} = -8\pi k\alpha \sum_A m_A\delta(\bar{x}-\xi_A), \tag{40}$$

где $\Delta = \partial_a\partial_a$. Решение этого уравнения

$$\underset{(2)}{f} = 2k\alpha \sum_A \frac{m_A}{|\bar{x}-\xi_A|} \tag{41}$$

удовлетворяет соотношению

$$\underset{(2)}{f} = \alpha\Delta\varrho, \tag{42}$$

где

$$\varrho = \tau \sum_A m_A|\bar{x}-\xi_A|. \tag{43}$$

Из (30) и (42) следует

$$\Delta \underset{(2)}{\gamma^{00}} = -8\pi k(\alpha+2)\sum_A m_A\delta(\bar{x}-\xi_A), \tag{44}$$

$$\Delta(\underset{(3)}{\gamma^{0n}}+2\alpha\partial_n\dot{\varrho}) = -16\pi k\sum_A m_A V_A^n\delta(\bar{x}-\xi_A), \tag{45}$$

$$\Delta(\underset{(2)}{\gamma^{mn}}+\alpha\Delta\varrho\delta_{mn}-2\alpha\partial_m\partial_n\varrho) = 0. \tag{46}$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по времени t, причём $V_A^n(t) = \dot{\xi}_A^n$. Решения этих уравнений имеют вид

$$\underset{(2)}{\gamma^{00}} = 2(\alpha+2)\varphi, \qquad \underset{(3)}{\gamma^{0n}} = 4A_n-2\alpha\partial_n\dot{\varrho},$$
$$\underset{(2)}{\gamma^{mn}} = 2\alpha(\partial_m\partial_n\varrho-\varphi\delta_{mn}), \tag{47}$$

где введены обозначения

$$\varphi = k\sum_A \frac{m_A}{|\bar{x}-\xi_A|}, \qquad A_n = k\sum_A m_A\frac{V_A^n}{|\bar{x}-\xi_A|}. \tag{48}$$

Учитывая, что

$$\sqrt{-G} = 1+2c^{-2}(\alpha+1)\varphi+\ \ldots, \tag{49}$$

из (31) получаем для функции $\underset{(4)}{f}$ уравнение

$$\Delta \underset{(4)}{f} - 2\alpha\ddot{\varphi} - 4\alpha^2 \partial_a\varphi\partial_a\varphi - 4\alpha^2 \partial_a\partial_b\varrho\partial_a\partial_b\varphi$$
$$= -16\pi k\alpha^2 \sum_A m_A\varphi\delta(\bar{x}-\xi_A) - 8\pi k\alpha \sum_A m_A(\varphi + \tfrac{1}{2} V_A^2)\delta(\bar{x}-\xi_A). \tag{50}$$

Преобразование этого уравнения при помощи тождеств

$$\partial_a\varphi\partial_a\varphi = \tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \varphi\Delta\varphi,$$
$$\partial_a\partial_b\varphi\partial_a\partial_b\varrho = \tfrac{1}{2}\Delta(\partial_a\varphi\partial_a\varrho) - \tfrac{1}{2}\partial_a\varrho\partial_a\Delta\varphi - \partial_a\varphi\partial_a\varphi \tag{51}$$

даёт

$$\Delta(\underset{4}{f} - \alpha\ddot{\varrho} - 2\alpha^2\partial_a\varphi\partial_a\varrho) = 16\pi k\alpha^2 \sum_A m_A\varphi\delta(\bar{x}-\xi_A)$$
$$+ 8\pi k\alpha \sum_A m_A(\varphi + \tfrac{1}{2} V_A^2)\delta(\bar{x}-\xi_A) + 8\pi k\alpha^2 \sum_A m_A\partial_a\varrho\partial_a\delta(\bar{x}-\xi_A). \tag{52}$$

Из последнего уравнения следует

$$\underset{(4)}{f} = \alpha\ddot{\varrho} + 2\alpha^2\partial_a\varphi\partial_a\varrho - 2k\alpha \sum_A m_A(\overset{A}{\tilde{\varphi}} + \tfrac{1}{2} V_A^2)\frac{1}{|\bar{x}-\xi_A|}$$
$$-2k\alpha^2 \sum_A m_A \overset{A}{\widetilde{\partial_a\varrho}}\,\partial_a \frac{1}{|\bar{x}-\xi_A|}. \tag{53}$$

Нам осталось ещё вычислить $\underset{(4)}{\gamma}^{00}$. Из (20) и из формул

$$\underset{(2)}{X}_n = 2(\alpha+1)\partial_n\varphi,$$
$$\underset{(2)}{\Pi}^{a00} = -(\alpha+2)\partial_a\varphi, \qquad \underset{(2)}{\Pi}^{00a} = (\alpha+2)\partial_a\varphi,$$
$$\underset{(2)}{\Pi}^{mab} = \alpha(\delta_{ab}\partial_m\varphi - \delta_{mb}\partial_a\varphi - \delta_{ma}\partial_b\varphi) + \alpha\partial_m\partial_a\partial_b\varphi, \tag{54}$$

получаем

$$\mathscr{L} = 2(2\alpha^2+1)\partial_a\varphi\partial_a\varphi - \alpha^2\partial_a\partial_b\partial_m\varrho\partial_a\partial_b\partial_m\varrho. \tag{55}$$

Подстановка (47), (54) и (55) в (30) даёт

$$\Delta\underset{(4)}{\gamma}^{00} - (6\alpha+4)\ddot{\varrho} - 4\alpha(\alpha+2)\partial_a\partial_b\varphi\partial_a\partial_b\varrho - \alpha^2\partial_a\partial_b\partial_m\varrho\partial_a\partial_b\partial_m\varrho - (4\alpha^2+24\alpha+22)\partial_a\varphi\partial_a\varphi$$
$$= 8\pi k \sum_A m_A[\tfrac{1}{2}(\alpha-2)V_A^2 - 3(\alpha+2)\varphi]\delta(\bar{x}-\xi_A). \tag{56}$$

Из (51) и тождества

$$\partial_a\partial_b\partial_m\varrho\partial_a\partial_b\partial_m\varrho = \tfrac{1}{2}\Delta(\partial_a\partial_b\varrho\partial_a\partial_b\varrho) - 2\partial_a\partial_b\varrho\partial_a\partial_b\varphi \tag{57}$$

следует

$$\Delta[\underset{(4)}{\gamma^{00}}-(3\alpha+2)\ddot{\varrho}-(\alpha^2+8\alpha-7)\varphi^2-\alpha(\alpha+4)\partial_a\varphi\partial_a\varrho-\tfrac{1}{2}\alpha^2\partial_a\partial_b\varrho\partial_a\partial_b\varrho]$$

$$= 8\pi k\sum_A m_A[\tfrac{1}{2}(\alpha-2)V_A^2+(\alpha^2+5\alpha+1)\varphi]\delta(\bar{x}-\xi_A)$$

$$+4\pi k\alpha(\alpha+4)\sum_A m_A\partial_a\varrho\partial_a\delta(\bar{x}-\xi_A). \tag{58}$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\underset{(4)}{\gamma^{00}} = (3\alpha+2)\ddot{\varrho}+(\alpha^2+8\alpha+7)\varphi^2+\alpha(\alpha+4)\partial_a\varphi\partial_a\varrho$$

$$+\tfrac{1}{2}\alpha^2\partial_a\partial_b\varrho\partial_a\partial_b\varrho-2k(\alpha+1)\overset{A}{\tilde{\varphi}}\frac{1}{|\bar{x}-\xi_A|}-k(\alpha-2)\sum_A m_A\frac{V_A^2}{|\bar{x}-\xi_A|}$$

$$-k\alpha(\alpha+4)\sum_A m_A\overset{A}{\widetilde{\partial_a\varrho}}\partial_a\frac{1}{|\bar{x}-\xi_A|}. \tag{59}$$

В частном случае, для $\alpha = 0$ решения (47) и (59) совпадают с решениями в гармонической системе координат.

4. *Гравитационный импульс*

Приближённое выражение для суперпотенциалов (37) имеет вид

$$V^{a0}{}_0 = \frac{1}{16\pi k}[\partial_m\underset{(2)}{\gamma^{am}}-\partial_a\underset{(2)}{\gamma^{00}}]$$

$$+\frac{c^{-2}}{16\pi k}[(\partial_a\underset{(4)}{f}-\partial_a\underset{(4)}{\gamma^{00}})+\underset{(2)}{\gamma^{am}}(\partial_m\underset{(2)}{\gamma^{00}}-\partial_m\underset{(2)}{f})-\underset{(2)}{\gamma^{00}}\partial_a\underset{(2)}{\gamma^{00}}-\underset{(3)}{\dot{\gamma}^{a0}}], \tag{60}$$

$$V^{a0}{}_r = \frac{c^{-1}}{16\pi k}[\partial_a\underset{(3)}{\gamma^{0r}}+\underset{(2)}{\dot{\gamma}^{ar}}+\delta_{ar}\underset{(2)}{\dot{f}}]. \tag{61}$$

Учитывая, что

$$\underset{(2)}{\gamma^{00}}\partial_a\underset{(2)}{\gamma^{00}} = -4(\alpha+2)^2\varphi\partial_a\varphi, \qquad \underset{(3)}{\dot{\gamma}^{0a}} = -2\alpha\partial_a\ddot{\varrho}+4\dot{A}_a,$$

$$\underset{(2)}{\gamma^{am}}(\partial_m\underset{(2)}{\gamma^{00}}-\partial_m\underset{(2)}{f}) = -8\alpha\varphi\partial_a\varphi+8\alpha\partial_m\varphi\partial_a\partial_m\varrho,$$

$$\partial_a\underset{(4)}{f}-\partial_a\underset{(4)}{\gamma^{00}} = -2(\alpha+1)\partial_a\ddot{\varrho}+\alpha(\alpha-4)\partial_a\partial_b\varphi\partial_b\varrho+\alpha(\alpha-4)\partial_b\varphi\partial_a\partial_b\varrho$$

$$-2(\alpha^2+8\alpha+7)\varphi\partial_a\varphi-\alpha^2\partial_a\partial_b\partial_c\varrho\partial_b\partial_c\varrho+2k\sum_A m_A\overset{A}{\tilde{\varphi}}\partial_a\frac{1}{|\bar{x}-\xi_A|}$$

$$-2k\sum_A m_A V_A^2\partial_a\frac{1}{|\bar{x}-\xi_A|}-k\alpha(\alpha-4)\sum_A m_A\overset{A}{\widetilde{\partial_b\varrho}}\partial_a\partial_b\frac{1}{|\bar{x}-\xi_A|}, \tag{62}$$

из (60) и (61) получаем

$$V^{a0}{}_0 = -\frac{1}{4\pi k}\partial_a\varphi + \frac{c^{-2}}{16\pi k}\Big[\alpha(\alpha-4)\partial_a\partial_b\varphi\partial_b\varrho + \alpha(\alpha+4)\partial_a\partial_b\varrho\partial_b\varphi + 2(\alpha^2-4\alpha+1)\varphi\partial_a\varphi$$

$$-\alpha^2\partial_a\partial_b\partial_c\varrho\partial_b\partial_c\varrho - 2\partial_a\ddot{\varrho} - 4\dot{A}_a + 2k\sum_A m_A\overset{A}{\tilde{\varphi}}\partial_a\frac{1}{|\bar{x}-\xi_A|}$$

$$-2k\sum_A m_A V_A^2\partial_a\frac{1}{|\bar{x}-\xi_A|} - k\alpha(\alpha-4)\sum_A m_A\overset{A}{\widetilde{\partial_b\varrho}}\partial_a\partial_b\frac{1}{|\bar{x}-\xi_A|}\Big], \tag{63}$$

$$V^{a0}{}_r = \frac{c^{-1}}{4\pi k}\partial_a A_r. \tag{64}$$

Для вычисления интегралов (9) по бесконечно удалённой поверхности достаточно учитывать в (63) и (64) члены, убывающие медленнее, чем r^{-3}. Таким образом, вместо (63) и (64) можно использовать

$$V^{a0}{}_0 = \frac{1}{4\pi}\sum_A m_A r^{-3}x^a + \frac{c^{-2}}{16\pi k}\Big[-2k\sum_A m_A w_A^a r^{-1} - 2k\sum_A m_A w_A^b r^{-3}x^a x^b$$

$$+4k\sum_A m_A V_A^2 r^{-3}x^a - 6k\sum_A m_A V_A^c V_A^b r^{-5}x^a x^b x^c - 2k\sum_A m_A\overset{A}{\tilde{\varphi}}r^{-3}x^a\Big], \tag{65}$$

$$V^{a0}{}_r = \frac{c^{-1}}{4\pi}\sum_A m_A V_A^r r^{-3}x^a. \tag{66}$$

Из ньютоновых уравнений движения следует

$$\sum_A m_A w_A^a = 0. \tag{67}$$

Учитывая интегралы [3]

$$\int r^{-3}x^a n_a dS = 4\pi, \qquad \int r^{-5}x^a x^b x^c n_a dS = \tfrac{4}{3}\pi\delta_{bc}, \tag{68}$$

окончательно получаем

$$\theta_0^{(\text{гр})} = \sum_A m_A + \tfrac{1}{2}c^{-2}\Big(\sum_A m_A V_A^2 - k\sum_A\sum_{\substack{B\\ A\neq B}}\frac{m_A m_B}{|\xi_A-\xi_B|}\Big), \tag{69}$$

$$\theta_r^{(\text{гр})} = -c^{-1}\sum_A m_A V_A^r. \tag{70}$$

В рассматриваемом приближении нулевая компонента гравитационного импульса умноженная на c^2 представляет полную ньютонову энергию системы тел с энергией покоя. Пространственные компоненты представляют трёхмерный импульс системы тел в ньютоновом приближении. Заметим, что в этом приближении гравитационный импульс не зависит от параметра α.

5. *Полевой и инерциальный импульс*

Расписывая (32), получаем

$$\sqrt{-g}\, t^0{}_0 = \frac{c^2}{16\pi k}(\mathscr{L} - H^0{}_0), \qquad \sqrt{-g}\, t^0{}_r = -\frac{c^2}{16\pi k} H^0{}_r, \tag{71}$$

где $\mathscr{L}$, $H^0{}_0$ и $H^0{}_r$ выражаются формулами (20) и (34). Подстановка (54) и (55) в (71) даёт

$$\sqrt{-g}\, t^0{}_r = 0, \tag{72}$$

$$\sqrt{-g}\, t^0{}_0 = \frac{c^{-2}}{16\pi k}[2(2\alpha^2+1)\partial_a\varphi\partial_a\varphi - \alpha^2\partial_a\partial_b\partial_c\varrho\partial_a\partial_b\partial_c\varrho]. \tag{73}$$

Таким образом, пространственные компоненты полевого импульса в рассматриваемом приближении равны нулю

$$\theta_r^{(\text{пол})} = 0. \tag{74}$$

Члены, стоящие с правой стороны (73), являются произведениями рядов (43) и (48). Напишем их в виде

$$\sqrt{-g}\, t^0{}_0 = \frac{c^{-2}}{16\pi k}[2(2\alpha^2+1)\underbrace{\partial_a\varphi\partial_a\varphi}_{A=B} - \alpha^2\underbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\varrho\partial_a\partial_b\partial_c\varrho}_{A=B}$$
$$+ 2(2\alpha^2+1)\underbrace{\partial_a\varphi\partial_a\varphi}_{A\neq B} - \alpha^2\underbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\varrho\partial_a\partial_b\partial_c\varrho}_{A\neq B}]. \tag{75}$$

Из (43) и (48) получаем

$$2(2\alpha^2+1)\underbrace{\partial_a\varphi\partial_a\varphi}_{A=B} - \alpha^2\underbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\varrho\partial_a\partial_b\partial_c\varrho}_{A=B} = -2(\alpha+1)(\alpha-1)k^2\sum_A \frac{m_A^2}{|\bar{x}-\xi_A|^4}, \tag{76}$$

$$2(2\alpha^2+1)\underbrace{\partial_a\varphi\partial_a\varphi}_{A\neq B} - \alpha^2\underbrace{\partial_a\partial_b\partial_c\varrho\partial_a\partial_b\partial_c\varrho}_{A\neq B} = -2\underbrace{\varphi\Delta\varphi}_{A\neq B} + \partial_a K^a, \tag{77}$$

где

$$K^a = 2(2\alpha^2+1)\underbrace{\varphi\partial_a\varphi}_{A\neq B} - \alpha^2\underbrace{\partial_b\partial_c\varrho\partial_a\partial_b\partial_c\varrho}_{A\neq B} + 2\alpha^2\underbrace{\partial_a\partial_c\varphi\partial_c\varrho}_{A\neq B} - 2\alpha^2\underbrace{\partial_a\varrho\Delta\varphi}_{A\neq B}. \tag{78}$$

Подставляя (76) и (77) в (75), имеем

$$\sqrt{-g}\, t^0{}_0 = -\frac{c^{-2}}{8\pi k}\underbrace{\varphi\Delta\varphi}_{A\neq B} - \frac{c^{-2}}{8\pi}(\alpha+1)(\alpha-1)k\sum_A \frac{m_A^2}{|\bar{x}-\xi_A|^4} + \frac{c^{-2}}{16\pi k}\partial_a K^a. \tag{79}$$

Поскольку выражения стоящие с левой стороны (77) имеют особенности типа r^{-2}, то объемный интеграл из этих выражений существует. Существует тоже объемный интеграл из $\varphi\Delta\varphi$. Таким образом существует объемный интеграл из $\partial_a K^a$. Заменяя последний объемный интеграл на поверхностный интеграл из (79) получаем

$$\theta_0^{(\text{пол})} = \tfrac{1}{2} c^{-2} k \sum_{A} \sum_{\substack{B \\ A \neq B}} \frac{m_A m_B}{|\bar{\xi}_A - \bar{\xi}_B|} - \frac{c^{-2}}{8\pi} (\alpha+1)(\alpha-1) \int \sum_A \frac{m_A^2}{|\bar{x} - \bar{\xi}_A|^4} (d\bar{x}). \quad (80)$$

Таким образом, нулевая компонента полевой части импульса бесконечна для $\alpha \neq 1$ и $\alpha \neq -1$.

Из (3), (47), (48) и (49) легко получаем инерциальный импульс

$$\theta_0^{(\text{ин})} = \sum_A m_A + c^{-2} \left(\tfrac{1}{2} \sum_A m_A V_A^2 - k \sum_A \sum_{\substack{B \\ A \neq B}} \frac{m_A m_B}{|\bar{\xi}_A - \bar{\xi}_B|} \right), \quad (81)$$

$$\theta_r^{(\text{ин})} = -c^{-1} \sum_A m_A V_A^r. \quad (82)$$

6. Обсуждение полученных результатов

Из (74), (80) и (81), (82) получаем

$$\theta_0^{(\text{пол})} + \theta_0^{(\text{ин})} = \sum_A m_A + c^{-2} \left(\tfrac{1}{2} \sum_A m_A V_A^2 - \tfrac{1}{2} k \sum_A \sum_{\substack{B \\ A \neq B}} \frac{m_A m_B}{|\bar{\xi}_A - \bar{\xi}_B|} \right)$$

$$- \frac{kc^{-2}}{8\pi} (\alpha+1)(\alpha-1) \int \sum_A \frac{m_A^2}{|\bar{x} - \bar{\xi}_A|^4} (d\bar{x}), \quad (83)$$

$$\theta_r^{(\text{пол})} + \theta_r^{(\text{ин})} = -c^{-1} \sum_A m_A V_A^r. \quad (84)$$

Напишем ещё раз формулы (69) и (70) для гравитационного импульса

$$\theta_0^{(\text{гр})} = \sum_A m_A + c^{-2} \left(\tfrac{1}{2} \sum_A m_A V_A^2 - \tfrac{1}{2} \sum_A \sum_{\substack{B \\ A \neq B}} \frac{m_A m_B}{|\bar{\xi}_A - \bar{\xi}_B|} \right), \quad (85)$$

$$\theta_r^{(\text{гр})} = -c^{-1} \sum_A m_A V_A^r. \quad (86)$$

Сравнение (83), (84) и (85), (86) показывает, что равенство

$$\theta_\varrho^{(\text{пол})} + \theta_\varrho^{(\text{ин})} = \theta_\varrho^{(\text{гр})} \quad (87)$$

выполняется только для $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$. Таким образом, в рассматриваемом приближении равенство (87) определяет два класса предпочитаемых потенциальных координат $\Pi(\alpha)$ соответствующих значениям параметра $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$. Но можно принять и другую точку зрения. Отказаться от определения потенциальных координат (11) и (12) и уравнения (87) рассматривать как условия, определяющие предпочитаемые координаты.

Исследуем ближе координаты соответствующие параметру $\alpha = -1$. В этих координатах решения (47), (48) и (59) для одного тела, покоящегося в начале координат, имеют вид

$$G^{00} = 1+2\frac{k}{c^2}\frac{m}{r}+4\frac{k^2}{c^{-4}}\frac{m^2}{r^2}+O(c^{-5}); \quad G^{0n} = O(c^{-4}),$$

$$G^{ab} = -\delta_{ab}+\frac{k}{c^2}\frac{m}{r}\frac{x^a x^b}{r^2}+O(c^{-4}), \quad \sqrt{-G} = 1+O(c^{-4}). \tag{88}$$

Отсюда получаем

$$g_{00} = 1-2\frac{k}{c^2}\frac{m}{r}+O(c^{-6}), \quad g_{0n} = O(c^{-4}),$$

$$g_{ab} = -\delta_{ab}-\frac{k}{c^2}\frac{m}{r}\frac{x^a x^b}{r^2}+O(c^{-4}). \tag{89}$$

Формулы (89) совпадают с приближённым решением Шварцшильда. Таким образом, в рассматриваемом приближении, один класс предпочитаемых координат определённых условиями (87) — это координаты Шварцшильда.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman, *Ann. Math.* **39**, 65 (1938).
[2] A. Einstein, L. Infeld, *Ann. Math.* **41**, 455 (1940).
[3] A. Einstein, L. Infeld, *Can. J. Math.* **1**, 209 (1949).
[4] V. A. Fock, *J. Phys.* (USSR) **1**, 81 (1939).
[5] N. M. Petrova, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **19**, 989 (1949).
[6] A. Papapetrou, *Proc. Phys. Soc.* **A64**, 57 (1951).
[7] A. Trautman, *Teoria względności*, Ossolineum, 1971.
[8] L. Infeld, *Acta Phys. Pol.* **13**, 187 (1954).
[9] L. Infeld, J. Plebański, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, Cl. III **4**, 689 (1956).
[10] L. Infeld, J. Plebański, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, Cl. V **5**, 51 (1957).
[11] L. Infeld, J. Plebański, *Motion and Relativity*, Pergamon Press, New York, PWN, Warszawa 1960.
[12] C. Jankiewicz, *Acta Phys. Pol.* **B10**, 525 (1979).
[13] J. A. Schouten, D. J. Struik, *Einführung in die Neueren Methoden der Differentialgeometrie*, 1938.
[14] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Москва 1961.