Vol. B11 (1980) ACTA PHYSICA POLONICA No 10

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КЛАСС ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ВНЕНЬЮТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА*

ONE-PARAMETER CLASS OF FIRST INTEGRALS OF THE POST-NEWTONIAN EQUATIONS OF MOTION IN THE EINSTEIN THEORY OF GRAVITATION

Ю. Скжипец

Высшая Педагогическая Школа, Жешув**

(Поступила в редакцию 4-го января 1980 г.)

Post-newtonian equations of motion for two bodies are obtained by means of the Lagrange function of many body system in the potential coordinates. Dependence of first integrals on the coordinate system is examined. It is shown that corrections to Newtonian first integrals do not depend on the choice of coordinates.

PACS numbers: 04.20.Me

1. *Введение*

Плебаньски и Бажаньски показали [1], что функция Лагранжа системы тел имеет вид

$$L = L' + L'' \tag{1}$$

где

$$L' = \int I(d\bar{x}), \qquad L'' = \frac{c^2}{16\pi k}\int \sqrt{-g}\, \Lambda(d\bar{x}) \tag{2}$$

причем

$$I = \sum_A m_A \delta(\bar{x}-\bar{\xi}_A)\,(\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta}d\xi^\alpha_A d\xi^\beta_A)^{1/2}, \tag{3}$$

$$\Lambda = g^{\mu\nu}(\Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta}). \tag{4}$$

---

* Субсидировано польским Министерством Науки, Высшего Образования и Техники, проблема M.P.I.7 „Поля, частицы, пространствовремя“.

** Address: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Turkienicza 24, 35-959 Rzeszów, Poland.

(Мы используем обозначения введеные в работе [2].) Явный вид этой функции Лагранжа для вненьютоновского движения тел получается подстановкой до (3) и (4) приближенных решений $g_{\mu\nu}(x, \xi_A)$ уравнений гравитационного поля.

$$R^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^2}T^{\mu\nu}. \tag{5}$$

Для однозначного решения уравнений (5) необходимо ввести добавочные условия. И так, Эйнштейн и Инфельд [3] употребляют координатные условия в виде

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{0\mu}) = 0, \qquad \partial_n(\sqrt{-g}\,g^{mn}) = 0. \tag{6}$$

В отличие от Эйнштейна и Инфельда Фок [4] использует гармонические координаты определяемые уравнениями

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}) = 0. \tag{7}$$

С точностью до вненьютоновского приближения условия (6) и (7) дают одинаковые уравнения движения тел. Различие проявляется при исследовании излучения методом Инфельда ([5] гл. VI).

В работе [6] Инфельд принимает добавочные условия в виде „принципа соответствия решений уравнений поля“. Этот принцип состоит в том, что в найнисшем приближении принимается такое решение уравнений (5) для движущихся тел, которое для одного покоящегося тела переходит в сферически-симметричное решение в изотропных координатах. Заметим, что в найнисшем приближении сферически-симметричное решение в изотропных координатах совпадает с таким-же решением в гармонических координатах. Вненьютоновские уравнения движения следующие из решений уравнений (5) с принципом соответствия принятым Инфельдом совпадают с уравнениями движения следующими из решений уравнений (5) с добовочными условиями (6) или (7).

Хотя с математической точки зрения гармонические координаты имеют некоторые преимущества, однако найбольшее расспространение особенно в астрофизике, получило стандартное решение Шварцшильда в координатах кривизн ([7] гл. VII, §3, 7). Поэтому представляет интерес исследовать вненьютоновские уравнения движения тел следующие из решения уравнений (5) кореспондирующие с решением Шварцшильда в координатах кривизн. В работе [2] методом Плебаньского и Бажаньского [1] выведено функцию Лагранжа для системы тел используя решения уравнений поля (5) в потенциальных координатах определяемых условиями

$$\nabla_\mu\Gamma_\nu-\nabla_\nu\Gamma_\mu = 0, \qquad \nabla_\mu\Gamma^\mu = -\frac{8\pi k\alpha}{c^2}T, \tag{8}$$

где α произвольный параметр. В частном случае для $\alpha = 0$ приближенное решение уравнений (5) корреспондирует с решением Шварцшильда в гармонических координатах а для $\alpha = -1$ с решением Шварцшильда в координатах кривизн (стандартным решением Шварцшильда).

2. Однопараметрический класс вненьютоновых уравнений движения двух тел

Применяя функцию Лагранжа из [2] к двум телам, получаем

$$L = -m_1c^2 - m_2c^2 + \left[\tfrac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}\, m_2 v_2^2 + k\,\frac{m_1 m_2}{|\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2|}\right] + c^{-2}\left\{\tfrac{1}{8}\, m_1 (v_1^k v_1^k)^2\right.$$

$$+\tfrac{1}{8}\, m_2 (v_2^k v_2^k)^2 - \frac{2\alpha+1}{2}\, k^2\, \frac{m_1 m_2 (m_1+m_2)}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|^2} + \tfrac{3}{2}\, k\, \frac{m_1 m_2}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|}(v_1^2+v_2^2)$$

$$-4k\,\frac{m_1 m_2}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|}\, v_1^n v_2^n + \alpha k m_1 m_2\, \frac{\partial}{\partial \xi_1^m}\,\frac{\partial}{\partial \xi_1^n}\,|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|\, v_1^m v_1^n$$

$$\left.+\alpha k m_1 m_2\, \frac{\partial}{\partial \xi_2^m}\,\frac{\partial}{\partial \xi_2^n}\,|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|\, v_2^m v_2^n + (2\alpha-\tfrac{1}{2}) k m_1 m_2\, \frac{\partial}{\partial \xi_1^m}\,\frac{\partial}{\partial \xi_2^n}\,|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|\, v_1^m v_2^n\right\}. \tag{9}$$

Соответствующие этой функции вненьютоновые уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\xi}_1^s - k m_2\, \frac{\partial}{\partial \xi_1^s}\left(\frac{1}{r}\right) = k c^{-2} m_2 \left\{\left[\dot{\xi}_1^k \dot{\xi}_1^k + \tfrac{3}{2}\, \dot{\xi}_2^k \dot{\xi}_2^k - 4\dot{\xi}_1^k \dot{\xi}_2^k - (2\alpha+4) k\, \frac{m_2}{r}\right.\right.$$

$$\left.-(2\alpha+5)k\,\frac{m_1}{r}\right]\frac{\partial}{\partial \xi_1^s}\left(\frac{1}{r}\right) + \left[4\dot{\xi}_1^k(\dot{\xi}_2^s - \dot{\xi}_1^s) - 4\dot{\xi}_2^s \dot{\xi}_2^k + 3\dot{\xi}_1^s \dot{\xi}_2^k\right]\frac{\partial}{\partial \xi_1^k}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\left.+\left[-\alpha \dot{\xi}_1^n \dot{\xi}_1^k - (\alpha-\tfrac{1}{2})\dot{\xi}_2^k \dot{\xi}_2^n + 2\alpha \dot{\xi}_1^n \dot{\xi}_2^k\right]\frac{\partial}{\partial \xi_1^s}\,\frac{\partial}{\partial \xi_1^n}\,\frac{\partial}{\partial \xi_1^k}\,(r)\right\}. \tag{10}$$

Здесь и дальше мы будем писать все формулы только для одного тела. Соответствующие формулы для второго тела получаются заменой $m_1 \leftrightarrow m_2$, $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$. Уравнения (10) можно получить также из уравнений геодезических линии ([5] гл. I, §7). Но для этого нужны решения уравнений поля более высокой точности [8].

В найнисшем приближении решения уравнений (5) при условиях (8) имеют вид [2]

$$\underset{(2)}{g_{00}} = -2k\left(\frac{m_1}{|\bar{x}-\bar{\xi}_1|} + \frac{m_2}{|\bar{x}-\bar{\xi}_2|}\right), \tag{11}$$

$$\underset{(3)}{g_{0n}} = 2(2+\alpha)k\left\{m_1\,\frac{v_1^n}{|\bar{x}-\bar{\xi}_1|} + m_2\,\frac{v_2^n}{|\bar{x}-\bar{\xi}_2|}\right\}$$

$$-2\alpha k\left\{m_1\,\frac{v_1^k(x^k-\xi_1^k)(x^n-\xi_1^n)}{|\bar{x}-\bar{\xi}_1|^3} + m_2\,\frac{v_2^k(x^k-\xi_2^k)(x^n-\xi_2^n)}{|\bar{x}-\bar{\xi}_2|^3}\right\}, \tag{12}$$

$$\underset{(2)}{g_{mn}} = -2(1+\alpha)k\left\{m_1\,\frac{\delta_{mn}}{|\bar{x}-\bar{\xi}_1|} + m_2\,\frac{\delta_{mn}}{|\bar{x}-\bar{\xi}_2|}\right\}$$

$$+2k\alpha\left\{m_1\,\frac{(x^m-\xi_1^m)(x^n-\xi_1^n)}{|\bar{x}-\bar{\xi}_1|^3} + m_2\,\frac{(x^m-\xi_2^m)(x^n-\xi_2^n)}{|\bar{x}-\bar{\xi}_2|^3}\right\}, \tag{13}$$

где

$$v_1^m = \frac{d\xi_1^m}{dt}, \quad v_2^m = \frac{d\xi_2^m}{dt}. \tag{14}$$

Для одного тела покаящегося в начале координат из (11)—(13) получаем

$$g_{00} = 1 - 2kc^{-2}\frac{m}{r}, \quad g_{0n} = 0,$$

$$g_{mn} = -\delta_{mn} - 2c^{-2}\left[(\alpha+1)km\frac{\delta_{mn}}{r} - \alpha km\frac{x^m x^n}{r^3}\right], \tag{15}$$

где $r^2 = x^k x^k$. Из (15) следует, что для $\alpha = 0$ формула (15) представляет приближенное решение Шварцшильда в гармонических координатах а для $\alpha = -1$ решение Шварцшильда в координатах кривизн.

Таким образом вненьютоновые уравнения движения двух тел полученние из решения уравнений поля корреспондирующего из решением Шварцшильда в координатах кривизн имеют вид

$$\ddot\xi_1^s - km_2\frac{\partial}{\partial\xi_1^s}\left(\frac{1}{r}\right) = kc^{-2}m_2\left\{\left[\dot\xi_1^k\dot\xi_1^k + \tfrac{3}{2}\dot\xi_2^k\dot\xi_2^k - 4\dot\xi_1^k\dot\xi_2^k - 2k\frac{m_2}{r} - 3k\frac{m_1}{r}\right]\frac{\partial}{\partial\xi_1^s}\left(\frac{1}{r}\right)\right.$$
$$+\left[4\dot\xi_1^k(\dot\xi_2^s - \dot\xi_1^s) - 4\dot\xi_2^s\dot\xi_2^k + 3\dot\xi_1^s\dot\xi_2^k\right]\frac{\partial}{\partial\xi_1^k}\left(\frac{1}{r}\right) + \left[-\dot\xi_1^n\dot\xi_1^k + \tfrac{3}{2}\dot\xi_2^k\dot\xi_2^n\right.$$
$$\left.\left. - 2\dot\xi_1^n\dot\xi_2^k\right]\frac{\partial}{\partial\xi_1^s}\frac{\partial}{\partial\xi_1^n}\frac{\partial}{\partial\xi_1^k}(r)\right\}. \tag{16}$$

Для $\alpha = 0$ из (10) получаем вненьютоновые уравнения движения выведенные Эйнштейном и Инфельдом

$$\ddot\xi_1^s - m_2\frac{\partial}{\partial\xi_1^s}\left(\frac{1}{r}\right) = kc^{-2}m_2\left\{\left[\dot\xi_1^k\dot\xi_1^k + \tfrac{3}{2}\dot\xi_2^k\dot\xi_2^k - 4\dot\xi_1^k\dot\xi_2^k\right.\right.$$
$$\left. - 4k\frac{m_2}{r} - 5k\frac{m_1}{r}\right]\frac{\partial}{\partial\xi_1^s}\left(\frac{1}{r}\right) + \left[4\dot\xi_1^k(\dot\xi_2^s - \dot\xi_1^s) - 4\dot\xi_2^s\dot\xi_2^k\right.$$
$$\left.\left. + 3\dot\xi_1^s\dot\xi_2^k\right]\frac{\partial}{\partial\xi_1^k}\left(\frac{1}{r}\right) + \tfrac{1}{2}\dot\xi_2^k\dot\xi_2^n\frac{\partial}{\partial\xi_1^s}\frac{\partial}{\partial\xi_1^n}\frac{\partial}{\partial\xi_1^k}(r)\right\}. \tag{17}$$

3. Законы сохранения

Поскольку функция Лагранжа (9) инвариантная при преобразованиях I лилея, то для уравнений движения (10) существует десять законов сохранения.

Из (9) следует, что импульс одного тела с массой m_1 выражается формулой

$$P_1^k = M_1 v_1^k + c^{-2}\left[(2\alpha + \tfrac{7}{2})k\frac{m_1 m_2}{|\xi_1 - \xi_2|}(v_1^k - v_2^k)\right.$$

$$-2\alpha k m_1 m_2 \frac{(\xi_1^k-\xi_2^k)\,[(\xi_1^s-\xi_2^s)v_1^s]-(\xi_2^k-\xi_1^k)\,[(\xi_2^s-\xi_1^s)v_2^s]}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|^3}$$

$$\left.-\tfrac{1}{2}\,k m_1 m_2 \frac{(\xi_2^k-\xi_1^k)\,[(\xi_2^s-\xi_1^s)v_2^s]}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|^3}\right], \tag{18}$$

где

$$M_1 = m_1+c^{-2}\left[\tfrac{1}{2}\,m_1 v_1^2-\tfrac{1}{2}\,k\,\frac{m_1 m_2}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|}\right]. \tag{19}$$

Величина M_1 представляет обобщенную гравитационную массу тела соответствующей покоящееся массе m_1 ([9], [5] гл. V, §3). Таким образом полный импульс двух тел имеет вид

$$P^k = M_1 v_1^k+M_2 v_2^k-\tfrac{1}{2}\,c^{-2}k m_1 m_2\left[\frac{(\xi_1^k-\xi_2^k)\,[(\xi_1^s-\xi_2^s)v_1^s}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|^3}+\frac{(\xi_2^k-\xi_1^k)\,[(\xi_2^s-\xi_1^s)v_2^s]}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|^3}\right], \tag{20}$$

где

$$M = m_1+m_2+c^{-2}\left[\tfrac{1}{2}\,m_1 v_1^2+\tfrac{1}{2}\,m_2 v_2^2-k\,\frac{m_1 m_2}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|}\right]. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что хотя импульс и обобщенная гравитационная масса одного тела зависят от параметра α, то полный импульс и полная обобщенная гравитационная масса не зависят от параметра α. Сохранение полного импульса (20) следует из инвариантности функции Лагранжа (9) при пространственных переносах.

Из формулы

$$E = P_1^k v_1^k+P_2^k v_2^k-L \tag{22}$$

получаем полную энергию двух тел

$$E = Mc^2+c^{-2}\left[\tfrac{3}{8}\,m_1(v_1^k v_1^k)^2+\tfrac{3}{8}\,m_2(v_2^k v_2^k)^2+(\alpha+\tfrac{3}{2})k\,\frac{m_1 m_2}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|}\,(v_1^2+v_2^2)\right.$$

$$-(2\alpha+\tfrac{7}{2})k\,\frac{m_1 m_2}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|}\,v_1^k v_2^k+\frac{2\alpha+1}{2}\,k^2 m_1 m_2\,\frac{m_1+m_2}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|^2}$$

$$\left.-\alpha k m_1 m_2\,\frac{[(\xi_1^k-\xi_2^k)v_1^k]^2+[(\xi_2^k-\xi_1^k)v_2^k]^2}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|^3}-(2\alpha-\tfrac{1}{2})k m_1 m_2\,\frac{[(\xi_1^k-\xi_2^k)v_1^k]\,[(\xi_2^k-\xi_1^k)v_2^k]}{|\bar{\xi}_1-\bar{\xi}_2|^3}\right]. \tag{23}$$

Сохранение полной энергии следует из инвариантности функции Лагранжа (9) при переносе времени. В отличие от полного импульса, полная энергия зависит от параметра α.

Полный момент импульса определяется формулой

$$\bar{K} = \bar{\xi}_1\times\bar{P}_1+\bar{\xi}_2\times\bar{P}_2. \tag{24}$$

Сохранение этого полного момента импульса следует из инвариантности функции Лагранжа (9) при пространственных поворотах. Поскольку импульсы $\bar{P}_1$ и $\bar{P}_2$ в отдельности зависят от параметра α, то как следует из (24) полный момент импульса тоже зависит от параметра α.

Координаты Ξ^k центра двух масс напишем в виде [9]

$$\Xi^k = \frac{M_1\zeta_1^k + M_2\zeta_2^k}{M}. \tag{25}$$

Из (21) следует, что обобщенная полная гравитационная масса является полной энергией в ньютоновым приближении, которая сохраняется в силу нулевого приближения уравнений движения (10). Дифференцируя по времени (25) и учитывая уравнения движения (10) получаем

$$\dot{\Xi}^k = \frac{P^k}{M}. \tag{26}$$

Поскольку полный импульс и полная обобщенная гравитационная масса сохраняются, то центр масс движется прямолинейно с постоянной скоростью. Из независимости полного импульса и полной обобщенной гравитационной массы от параметра α следует, что движение центра масс тоже не зависит от параметра α.

Из приведенных вычислений следует, что из десяти сохраняющихся величин четыре зависят от параметра α и шесть не зависит от параметра α. От параметра α зависят полная энергия и полный момент импульса. Полный импульс и движение центра масс не зависят от параметра α. Эти последние величины можно считать объектывными в потенциальных координатах определяемых формулой (8).

ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Plebański, S. Bażański, *Acta Phys. Pol.* **18**, 307 (1959).
[2] Cz. Jankiewicz, *Acta Phys. Pol.* **B10**, 525 (1979).
[3] A. Einstein, L. Infeld, *Can. J. Math.* **1**, 209 (1949).
[4] V. A. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, A Pergamon Press Book, New York 1964.
[5] L. Infeld, J. Plebański, *Motion and Relativity*, PWN, Warszawa 1960.
[6] L. Infeld, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 398 (1957).
[7] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1964.
[8] J. Skrzypiec, *Zeszyty Naukowe RTN* (1979) (in press).
[9] I. G. Fikhtengolz, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 233 (1950).