ОСОБЕННОСТИ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ ШВАРЦШИЛЬДА*

SINGULARITIES OF SOURCES OF THE SCHWARZSCHILD FIELD

Ч. Янкевич, Р. Ампель

Высшая Педагогическая Школа, Жешув**

(*Поступила в редакцию 4-го январая 1980 г.; переработана версия поступила 29-го мая 1980 г.*)

Spherically symmetric solutions of Einstein equations in a one-parameter class of coordinates which generalize the harmonic coordinates are obtained. It is shown that in these coordinates the time component of the source tensor of the Schwarzschild field is proportional to the Dirac delta function while the remaining components vanish. It is shown also that the gravitational momentum of the Schwarzschild field is equal to the sum of the field momentum and the inertial momentum in two coordinate systems only. This equality may be treated as sort of a "natural" condition which selects priviledged coordinate system.

PACS numbers: 04.20.Me

1. *Введение*

В работах Эйнштейна и его сотрудников [1, 2, 3] для вывода пост-ньютоновских уравнений движения тел используются уравнения поля без тензора массы

$$R^{\mu\nu}-\tfrac{1}{2}Rg^{\mu\nu}=0. \tag{1}$$

(Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3; под этими повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 0 до 3.) Применение этих уравнений связано с тем, что тела рассматриваются как особенности поля. В работе [4] Инфельд показал, что вывод пост-ньютоновских уравнений движения становится более простым, если ввести тензор массы с дираковскими дельта-функциями

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\int\sum_A m_A\delta(x-\xi_A)\frac{d\xi_A^\mu}{d\sigma_A}\frac{d\xi_A^\nu}{d\sigma_A}d\sigma_A, \tag{2}$$

* Субсидировано польским Министерством Науки, Высшего Образования и Техники, проблема М. P.I.7: „Поля, частицы, пространствовремя".

** Address: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Turkienicza 24, 35-959 Rzeszów, Poland.

где

$$d\sigma_A^2 = \int \delta(x-\xi_A) g_{\alpha\beta} d\xi_A^\alpha d\xi_A^\beta (dx) \tag{3}$$

и использовать уравнения поля с тензором массы

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^2} T^{\mu\nu}. \tag{4}$$

Если $\delta(x-\xi_A)$ модифицированные дираковские дельта-функции [5], то из уравнений поля (4) получаются регуляризованные пост-ньютоновские уравнения движения тел.

Как известно, для получения поля Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(\delta_{ab} + \frac{2M}{r-2M}\frac{x^a x^b}{r^2}\right) dx^a dx^b \tag{5}$$

в „прямоугольных" координатах, связанных обычным образом с сферическими координатами кривизн ([6], гл. VII, §2), используются уравнения поля без тензора массы. (Латинские индексы принимают значения 1, 2, 3; под этими повторяющимися индексами подразумевается суммирование от 1 до 3.) Уравнения поля без тензора массы используются тоже для получения поля Шварцшильда в других координатах ([7], [8], §57).

В настоящей работе мы исследуем особенности источников поля Шварцшильда и находим соответствующий этим особенностям тензор массы. Затем при помощи псевдотензора энергии-импульса Эйнштейна

$$\sqrt{-g}\,(t^\sigma{}_\varrho + T^\sigma{}_\varrho) = \partial_\alpha V^{\alpha\sigma}{}_\varrho \tag{6}$$

определяем полевой импульс

$$\theta_\varrho^{(\text{пол})} = \int \sqrt{-g}\, t^0{}_\varrho (d\bar{x}), \tag{7}$$

инерциальный импульс

$$\theta_\varrho^{(\text{ин})} = \int \sqrt{-g}\, T^0{}_\varrho (d\bar{x}), \tag{8}$$

и гравитационный импульс

$$\theta_\varrho^{(\text{гр})} = \int V^{a0}{}_\varrho n_a dS. \tag{9}$$

Используя эти определения, мы исследуем при каких условиях импульсы (7), (8) и (9) удовлетворяют равенству

$$\theta_\varrho^{(\text{пол})} + \theta_\varrho^{(\text{ин})} = \theta_\varrho^{(\text{гр})}. \tag{10}$$

Оказывается, что для поля Шварцшильда равенство (10) не выполняется во всех допустимых координатах. Существуют два класса координатных систем, в которых оно выполняется. Таким образом, равенство (10) можно использовать как натуральные условия определяющие предпочитаемые координатные системы. В работе

[9] показано, что равенство (10) определяет эти самые предпочитаемые координатные системы и для пост-ньютоновского движения тел, рассматриваемых как особенности поля и описываемых тензором массы (2).

2. *Сферически симметричное решение уравнений поля в потенциальных координатах*

Уравнения поля будем решать в потенциальных координатах определяемых условиями [10]

$$\nabla_\mu \Gamma_\nu - \nabla_\nu \Gamma_\mu = 0, \qquad \nabla_\mu \Gamma^\mu = \frac{8\pi k\alpha}{c^2} T, \tag{11}$$

где α произвольный параметр, причём

$$\Gamma^\mu = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu(\sqrt{-g}\, g^{\nu\mu}), \qquad \Gamma_\nu = g_{\nu\mu}\Gamma^\mu. \tag{12}$$

Для фиксированного значения параметра α уравнения (11) определяют класс предпочитаемых координат. Заметим, что координаты, связанные преобразованием Лоренца принадлежат к одному классу. Если использовать уравнения поля с тензором массы равным нулю, то из (11) получаем

$$\nabla_\mu \Gamma_\nu - \nabla_\nu \Gamma_\mu = 0, \qquad \nabla_\mu \Gamma^\mu = 0. \tag{13}$$

В работе [10] показано, что выполнения уравнений (11) можно добиться преобразованием координат. В частности, если x'^α произвольные координаты, то $x^\mu(x'^\alpha)$ удовлетворяющие уравнениям

$$g'^{\alpha\beta}(x')\partial'_\alpha\partial'_\beta x^\mu(x') - \Gamma'^\sigma(x')\partial'_\sigma x^\mu(x')$$
$$= -g'^{\alpha\beta}(x')\partial'_\alpha x^\mu(x')\partial'_\beta f(x'), \tag{14}$$

$$g'^{\alpha\beta}(x')\partial'_\alpha\partial'_\beta f(x') - \Gamma'^\sigma(x')\partial'_\sigma f(x') = 0, \tag{15}$$

являются потенциальными координатами.

Как известно, в сферических координатах метрику сферически симметричного стационарного поля можно привести к виду

$$ds^2 = A^2c^2dt^2 - B^2dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{16}$$

где A, B и R зависят только от r. В этой метрике из уравнений поля (1) следует ([8], §57)

$$2ABR^{-1}\frac{d}{dr}\left(B^{-1}\frac{dR}{dr}\right) + \frac{d^2A}{dr^2} - B^{-1}\frac{dA}{dr}\frac{dB}{dr} = 0,$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} - B^{-1}\frac{dA}{dr}\frac{dB}{dr} + 2R^{-1}\frac{dA}{dr}\frac{dR}{dr} = 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(AB^{-1}R\frac{dR}{dr}\right) - AB = 0. \tag{17}$$

Решения этих уравнений, при условиях в бесконечности

$$(A)_\infty = 1, \quad (B)_\infty = 1, \quad \left(\frac{R}{r}\right)_\infty = 1, \tag{18}$$

имеют вид ([8], §57)

$$A^2 = 1 - \frac{2M}{R}, \quad B^2 = A^{-2}\left(\frac{dR}{dr}\right)^2, \tag{19}$$

где постоянная $M = \frac{km}{c^2}$ определяется из сравнения решений слабого поля тяготения с теорией Ньютона

$$\lim_{r\to\infty} [rg_{00}^{(\text{сл})}] = M, \quad g_{00} = 1 + g_{00}^{(\text{сл})} + \dots \tag{20}$$

Учитывая (16) и сферическую симметрию функции f, из (15) получаем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(AB^{-1}R^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) = 0. \tag{21}$$

Интегрирование этого уравнения, при условии

$$\lim_{r\to\infty} [rf^{(\text{сл})}] = 2\alpha M, \quad f = f^{(\text{сл})} + \dots, \tag{22}$$

даёт

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -2\alpha M A^{-1} B R^{-2}. \tag{23}$$

Если предположим, что координаты

$$x^1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = r\cos\theta \tag{24}$$

являются потенциальными, то из уравнений (14) получаем только одно уравнение

$$A^{-1}B^{-1}\frac{d}{dr}(AB^{-1}R^2 - 2\alpha MR) - 2r = 0 \tag{25}$$

для искомой функции $R(r)$. При выводе этого уравнения мы учли формулу (23). Из (19) и (25) следует

$$\frac{d}{dr}\left[(R^2 - 2MR)\frac{dr}{dR} - 2\alpha MR\right] - 2r = 0. \tag{26}$$

При помощи подстановки

$$r = r^* - \alpha M, \quad R = M(1+z), \tag{27}$$

уравнение (26) приводится к уравнению Лежандра

$$\frac{d}{dz}\left[(z^2-1)\frac{dr^*}{dz}\right] - 2r^* = 0. \tag{28}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (18), имеет вид

$$R = r+(\alpha+1)M. \tag{29}$$

Подстановка (29) в (19) даёт

$$A^2 = \frac{r+(\alpha-1)M}{r+(\alpha+1)M}, \quad B^2 = \frac{r+(\alpha+1)M}{r+(\alpha-1)M}. \tag{30}$$

Таким образом окончательно, в сферических координатах, соответствующих по формулам (24) потенциальным координатам, имеем

$$ds^2 = \frac{r+(\alpha-1)M}{r+(\alpha+1)M}c^2dt^2 - \frac{r+(\alpha+1)M}{r+(\alpha-1)M}dr^2$$
$$-[r+(\alpha+1)M]^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{31}$$

Преобразование к потенциальным координатам даёт

$$ds^2 = \frac{r+(\alpha-1)M}{r+(\alpha+1)M}c^2dt^2 - \left\{\left(1+\frac{\alpha+1}{r}M\right)^2\delta_{ab}\right.$$
$$\left. - \left[\left(1+\frac{\alpha+1}{r}M\right)^2 - \frac{r+(\alpha+1)M}{r+(\alpha-1)M}\right]\frac{x^a x^b}{r^2}\right\}dx^a dx^b. \tag{32}$$

В частном случае, для $\alpha = -1$, из (32) получаем поле Шварцшильда в координатах использованных Шварцшильдом ([11], гл. XIII)

$$ds^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)c^2dt^2 - \left(\delta_{ab}+\frac{2M}{r-2M}\frac{x^a x^b}{r^2}\right)dx^a dx^b. \tag{33}$$

Для $\alpha = 0$, имеем поле Шварцшильда в гармонических координатах ([8], §58)

$$ds^2 = \frac{r-M}{r+M}c^2dt^2 - \left[\left(1+\frac{M}{r}\right)^2\delta_{ab} + \frac{r+M}{r-M}\frac{M^2}{r^2}\frac{x^a x^b}{r^2}\right]dx^a dx^b. \tag{34}$$

Для $\alpha = 1$ поле Шварцшильда не имеет особой сферы Шварцшильда

$$ds^2 = \frac{1}{1+\dfrac{2M}{r}}c^2dt^2 - \left[\left(1+\frac{2M}{r}\right)^2\delta_{ab} - \left(1+\frac{2M}{r}\right)\frac{2M}{r}\frac{x^a x^b}{r^2}\right]dx^a dx^b. \tag{35}$$

3. Тензор массы

Как известно, псевдотензор энергии-импульса Эйнштейна

$$\theta^\sigma{}_\varrho = \sqrt{-g}\,(t^\sigma{}_\varrho + T^\sigma{}_\varrho) \tag{36}$$

связан с сверхпотенциалами

$$V^{\alpha\sigma}{}_\varrho = \frac{c^2}{16\pi k}\frac{g_{\varrho\mu}}{\sqrt{-g}}\partial_\nu[(-g)(g^{\alpha\nu}g^{\sigma\mu}-g^{\sigma\nu}g^{\alpha\mu})] \tag{37}$$

формулой

$$\theta^{\sigma}{}_{\varrho} = \partial_{\alpha} V^{\alpha\sigma}{}_{\varrho}. \tag{38}$$

Полевая часть этого псевдотензора энергии-импульса имеет вид

$$\sqrt{-g}\, t^{\sigma}{}_{\varrho} = \frac{c^2}{16\pi k} \sqrt{-g}\,(L\delta^{\sigma}{}_{\varrho} - H^{\sigma}{}_{\varrho}). \tag{39}$$

Здесь

$$L = g^{\mu\nu}(\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}), \tag{40}$$

$$H^{\sigma}{}_{\varrho} = 2\Gamma^{\sigma\lambda\tau}\Gamma_{\tau\lambda\varrho} - Y_{\tau}(\Gamma^{\sigma\tau}{}_{\varrho} + \Gamma^{\tau\sigma}{}_{\varrho}) + Y_{\varrho}(Y^{\sigma} - \Gamma^{\sigma}), \tag{41}$$

$$Y_{\varrho} = \Gamma^{\alpha}_{\varrho\alpha}, \qquad Y^{\sigma} = g^{\sigma\varrho} Y_{\varrho}, \tag{42}$$

причём индексы величин $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ поднимаются и опускаются при помощи $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ соответственно.

Из формул (36)–(38) мы можем вычислить тензор массы

$$\sqrt{-g}\, T^{\sigma}{}_{\varrho} = (-\sqrt{-g}\, t^{\sigma}{}_{\varrho} + \partial_{\alpha} V^{\alpha\sigma}{}_{\varrho}) \tag{43}$$

для поля Шварцшильда (32).

Вводя обозначения

$$a = 1 + \frac{\alpha - 1}{r} M, \qquad b = 1 + \frac{\alpha + 1}{r} M, \tag{44}$$

из (32) получаем

$$g_{00} = ab^{-1}, \qquad g_{mn} = -b^2\delta_{mn} + (b^2 - ba^{-1})r^{-2}x^m x^n,$$

$$g^{00} = ba^{-1}, \qquad g^{mn} = -b^{-2}\delta_{mn} + (b^{-2} - ab^{-1})r^{-2}x^m x^n,$$

$$\sqrt{-g} = b^2. \tag{45}$$

Неисчезающие для метрики (45) скобки Христоффеля имеют вид

$$\Gamma^{0}_{0n} = \tfrac{1}{2} r^{-1}(a^{-1}\dot{a} - b^{-1}\dot{b})x^n,$$

$$\Gamma^{a}_{00} = \tfrac{1}{2} r^{-1}(ab^{-2}\dot{a} - a^2 b^{-3}\dot{b})x^n,$$

$$\Gamma^{a}_{mn} = [r^{-4}(ab-1) + r^{-3}(a\dot{b} - \tfrac{3}{2} b^{-1}\dot{b} - \tfrac{1}{2} a^{-1}\dot{a})]x^m x^n x^a$$

$$+ [(1-ab)r^{-2} - a\dot{b}r^{-1}]\delta_{mn}x^a + b^{-1}\dot{b}r^{-1}(x^m\delta_{na} + x^n\delta_{mb}). \tag{46}$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по r. Учитывая, что

$$Y_m = 2r^{-1}b^{-1}\dot{b}x^m,$$

$$\Gamma^a = r^{-1}(b^{-1}\dot{a} + ab^{-2}\dot{b})x^a + 2r^{-2}(ab^{-1} - b^{-2})x^a, \tag{47}$$

из (40) получаем

$$\sqrt{-g}\,L = -2\dot a\dot b. \tag{48}$$

Формула (41) даёт

$$\sqrt{-g}\,H^0{}_0 = 0, \quad \sqrt{-g}\,H^0{}_r = 0, \quad \sqrt{-g}\,H^a{}_0 = 0, \tag{49}$$

$$\sqrt{-g}\,H^a{}_r = -4r^{-2}\dot a\dot b x^a x^r. \tag{50}$$

Таким образом, учитывая (44), окончательно имеем

$$\sqrt{-g}\,t^0{}_r = 0, \quad \sqrt{-g}\,t^m{}_0 = 0, \tag{51}$$

$$\sqrt{-g}\,t^0{}_0 = -\frac{c^2}{8\pi k}\,\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)M^2}{r^4}, \tag{52}$$

$$\sqrt{-g}\,t^m{}_r = \frac{(\alpha+1)(\alpha-1)c^2M^2}{8\pi k}\left(2\,\frac{x^m x^r}{r^6} - \frac{\delta^{mr}}{r^4}\right). \tag{53}$$

Нам необходимо вычислить ещё второй член из (43), определяющий тензор массы. Неисчезающие компоненты сверхпотенциалов (37) имеют вид

$$V^{am}{}_r = \frac{(\alpha+1)(\alpha-1)c^2M^2}{8\pi k}\,(\delta^{mr}x^a - \delta^{ar}x^m), \tag{54}$$

$$V^{a0}{}_0 = \frac{c^2}{8\pi k}\left[\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)M^2}{r^4} + \frac{2M}{r^3}\right]x^a. \tag{55}$$

Дифференцируя последние формулы, получаем

$$\partial_a V^{a0}{}_0 = m\delta(\bar x) - \frac{c^2}{8\pi k}\,\frac{(\alpha+1)(\alpha-1)M^2}{r^4}, \tag{56}$$

$$\partial_a V^{am}{}_r = \frac{(\alpha+1)(\alpha-1)c^2M^2}{8\pi k}\left(2\,\frac{x^m x^r}{r^6} - \frac{\delta^{mr}}{r^4}\right). \tag{57}$$

Подстановка (52), (53) и (56) в (43) даёт

$$\sqrt{-g}\,T^m{}_r = 0, \quad \sqrt{-g}\,T^0{}_r = 0, \quad \sqrt{-g}\,T^s{}_0 = 0, \tag{58}$$

$$\sqrt{-g}\,T^0{}_0 = m\delta(\bar x). \tag{59}$$

Таким образом, мы получили тензор массы для поля Шварцшильда в любом классе потенциальных координат определяемым параметром α. Он не зависит от параметра α.

4. *Полевой, инерциальный и гравитационный импульс*

Подставляя (52), (53) и (59) в (7), (8) и (9) получаем полевой импульс

$$\theta_0^{(\text{пол})} = -\frac{km^2(\alpha+1)(\alpha-1)}{8\pi c^2}\int\frac{(d\bar{x})}{r^4}, \qquad \theta_r^{(\text{пол})} = 0, \tag{60}$$

инерциальный импульс

$$\theta_0^{(\text{ин})} = m, \qquad \theta_r^{(\text{ин})} = 0, \tag{61}$$

и гравитационный импульс

$$\theta_0^{(\text{гр})} = m, \qquad \theta_r^{(\text{гр})} = 0. \tag{62}$$

Из сравнения (60), (61) и (62) следует, что равенство

$$\theta_\varrho^{(\text{пол})} + \theta_\varrho^{(\text{ин})} = \theta_\varrho^{(\text{гр})} \tag{63}$$

удовлетвлоряется только в двух классах потенциальных координат соответствующих значениям параметра $\alpha = -1$ и $\alpha = 1$.

Предпочитаемые координаты, соответствующие параметру $\alpha = -1$, это координаты Шварцшильда. Предпочитаемые координаты, соответствующие параметру $\alpha = 1$, это координаты, в которых поле Шварцшильда не имеет особой сферы (35). В этих координатах единственная особая точка — это начало координат. В работе [9] показано, что равенство импульсов для пост-ньютоновского движения тел выполняется тоже только в потенциальных координатах соответствующих значениям параметра $\alpha = -1$ и $\alpha = 1$.

В координатах соответствующих значениям параметра $\alpha = \pm 1$, для поля Шварцшильда импульсы удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \theta_r^{(\text{гр})} &= \theta_r^{(\text{пол})} + \theta_r^{(\text{ин})} = 0, \\ \theta_0^{(\text{гр})} &= \theta_0^{(\text{пол})} + \theta_0^{(\text{ин})} = m. \end{aligned} \tag{64}$$

В координатах соответствующих другим значениям параметра α сумма полевого и инерциального импульса бесконечная.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman, *Ann. Math.* **39**, 65 (1938).
[2] A. Einstein, L. Infeld, *Ann. Math.* **39**, 455 (1940).
[3] A. Einstein, L. Infeld, *Canad. J. Math.* **1**, 209 (1949).
[4] L. Infeld, *Acta Phys. Pol.* **13**, 187 (1954).
[5] L. Infeld, J. Plebański, *Bull. Acad. Pol. Sci.* **18**, 307 (1959).
[6] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory*, Amsterdam 1964.
[7] Н. В. Мицкевич, *Физические поля в общей теории относительности*, Москва 1969.
[8] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Москва 1955.
[9] C. Jankiewicz, D. Sikora, *Acta Phys. Pol.* **B11**, 717 (1980)
[10] C. Jankiewicz, *Acta Phys. Pol.* **B10**, 525 (1979).
[11] P. G. Bergmann, *Introduction to the Theory of Relativity*, 1942.