О ДВУХПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С МАГНИТНЫМИ МОНОПОЛЯМИ

ON TWO-POTENTIAL FORMULATION OF ELECTRODYNAMICS WITH MAGNETIC MONOPOLES

В. И. Стражев, П. Л. Школьников

Институт физики Академии наук Белорусской ССР, Минск*

(Поступила в редакцию 23-го августа 1979 г.)

The two-potential Lagrange formulation of the theory of magnetic charge is developed. The connection with the Dirac and Cabibbo–Ferrari formulations of electrodynamics with magnetic monopoles is stated.

1. Введение

Появление магнитных источников в уравнениях неабелева поля, в калибровочных теориях со спонтанно нарушенной симметрией, в составных моделях адронов усилило внимание к решению „старых" проблем магнитного заряда. Одной из центральных является здесь построение лагранжевой формулировки теории. Ее решение, предложенное Дираком [1], основано на введении „Dirac strings" — линий сингулярности для электромагнитного потенциала. Как следствие, магнитному монополю в теории сопоставляется такой нефизический объект, как „Dirac string". Однопотенциальная формулировка электродинамики несовместима с включением магнитных частиц в теорию, поэтому можно предположить, что введение „Dirac string" является характерной чертой именно однопотенциального формализма, но не теории магнитного заряда в целом. Это предположение лежит в основе переформулировок классической и квантовой теорий магнитного монополя в рамках подхода, отличного от использованного Дираком (см., например, [2–10]). Поиск новых путей к формулировке теории магнитного монополя стимулируется и теми трудностями, с которыми сталкиваются попытки построения неабелевой теории калибровочной теории с двумя типами зарядов на базе прямого обобщения дираковского формализма (см. например, [11–13]).

* Address: Institute of Physics, Lenin Avenue 70, Minsk-72, 220072, USSR.

Известно в то же время, что уравнения Максвелла в присутствии источников двух типов

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = J^{(e)}_\mu, \qquad \partial_\nu F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} = J^{(g)}_\mu, \tag{1}$$

где $F^{\mathrm{D}}_{\nu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}$, $F^{\mathrm{DD}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$, $\varepsilon_{1234} = -i$ могут быть естественно разрешены с помощью введения двух независимых потенциалов, именно:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\partial_\varrho B_\sigma,$$

$$F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\partial_\varrho A_\sigma. \tag{2}$$

Но попытки построения вариационной процедуры, основанной на определении (2), не были успешными (см., например, [3, 14, 15]). В работах [14, 15] лагранжева формулировка теории предполагала использование уравнений Максвелла, что с точки зрения вариационной процедуры является незаконной операцией. В настоящей работе предложено решение этой проблемы на основе развития подхода Рорлиха [14] и использования метода неопределенных множителей Лагранжа. При этом выясняется, что условие самосогласованности схемы требует введения в теорию потенциалов, зависящих по определению от некоторого пространственно-подобного пути. На выбор путей необходимо также наложить ограничения, не вытекающие из вариационного принципа. Как следствие, на уровне полевых уравнений устанавливается взаимосвязь развитого формализма с подходом Швингера [16] и с беспотенциальной мандельстамовской формулировкой квантовой электродинамики в присутствии магнитных монополей (см. [2, 5, 6, 16]).

Устанавливаемая связь двухпотенциальной формулировки электродинамики с магнитными монополями и теорией, основанной на использовании сингулярных потенциалов, говорит о том, что „Dirac strings“ являются характерной чертой теории магнитного монополя вне зависимости от используемого подхода. В то же время двухпотенциальный подход является по нашему мнению более физически приемлемым при формулировке исходных посылок теории магнитного заряда, поскольку объекты типа „Dirac string“ являются здесь не следствием исходных посылок (и отражением внутренней непоследовательности теории: теоретической несовместимости наличия магнитных источников и однопотенциального описания электромагнитного поля), а условием самосогласованного описания взаимодействия электрических и магнитных зарядов с электромагнитным полем. Заметим также, что проведенное в работах [17], [18] обсуждение возможности формулировки уравнений движения в теории магнитного заряда без явного использования „Dirac strings“ является частным случаем развитого формализма.

2. *Лагранжева формулировка классической теории*

В качестве интеграла действия рассмотрим выражение:

$$S = \int \{\tfrac{1}{4}(F'_{\mu\nu})^2 + \tfrac{1}{4}(F''_{\mu\nu})^2 + J^{(e)}_\mu(A_\mu - \tilde{B}_\mu) + J^{(g)}_\mu(\tilde{A}_\mu + B_\mu)$$

$$- \tfrac{1}{2}F'_{\mu\nu}(A_{\mu\nu} - \tilde{B}_{\mu\nu}) - \tfrac{1}{2}F''_{\mu\nu}(\tilde{A}_{\mu\nu} + B_{\mu\nu})$$

$$+\lambda_\mu(\tilde{A}_\mu - \int_{-\infty}^{0} A^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma}(z)\partial_\mu z_\varrho \partial z_\sigma dy) + \omega_\mu(\tilde{B}_\mu - \int_{-\infty}^{0} B^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma}(z)\partial_\mu z_\varrho \partial z_\sigma dy\}d^4x,$$

$$A_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,$$

$$\tilde{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu, \quad \tilde{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \tilde{B}_\nu - \partial_\nu \tilde{B}_\mu, \tag{3}$$

где $\lambda_\mu(x)$, $\omega_\mu(x)$ — множители Лагранжа, в интегралах $\int_{-\infty}^{0}(\ldots)dy$ интегрирование ведется по произвольному пространственно-подобному пути от $-\infty$ до точки x, причем $z_\mu(x_\mu, 0) = x_\mu$, $z_\mu(x, y) \xrightarrow[y \to -\infty]{}$ пространственно-подобная бесконечность, $A^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}A_{\varrho\sigma}$, $\varepsilon_{1234} = -i$, $A^{\mathrm{DD}}_{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}$ и справедливы аналогичные соотношения для тензоров $B^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$; $J^{(e)}_\mu = \sum_{i=1}^{n} J^{(e_i)}_\mu$, $J^{(g)}_\mu = \sum_{i=1}^{n} J^{(g_i)}_\mu$, $J^{(e_i)}_\mu = e_i u^i_\mu$, $J^{(g_i)}_\mu = g_i u^i_\mu$, где индекс i означает i-тый тип дуально заряженной частицы, обладающей электрическим (e_i) и магнитным (g_i) зарядами. Варьировать будем по потенциалам A_μ, B_μ, $\tilde{A}_\mu, \tilde{B}_\mu$ тензорам $F'_{\mu\nu}, F''_{\mu\nu}$, множителям Лагранжа λ_μ, ω_μ и координатам дуально--заряженных частиц.

Выберем для $z_\mu(x, y)$ параметризацию следующего вида[1]

$$z_\mu(x, y) = x_\mu - \xi_\mu(y), \tag{4а}$$

где $\xi_\mu(y)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию:

$$\xi_\mu(0) = 0, \quad \xi_\mu \xrightarrow[y\to-\infty]{} \text{пространственно-подобная бесконечность} \tag{4б}$$

т.е. ξ_μ меняется от начала координат до бесконечности. В результате варьирования по $F'_{\mu\nu}, F''_{\mu\nu}$ получаем

$$F'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - \tilde{B}_{\mu\nu}, \tag{5}$$

$$F''_{\mu\nu} = \tilde{A}_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}. \tag{6}$$

Варьирование по множителям Лагранжа λ_μ, ω_μ приводит к установлению связей между потенциалами $A_\mu, B_\mu, \tilde{A}_\mu, \tilde{B}_\mu$ (см. здесь также [14]):

$$\tilde{A}_\mu(x) = \int_{-\infty}^{0} A^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma}(z)\partial_\mu z_\sigma \partial z_\varrho dy = \int A^{\mathrm{D}}_{\mu\sigma}(x')f_\varrho(x-x')d^4x', \tag{7}$$

$$\tilde{B}_\mu(x) = \int_{-\infty}^{0} B^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma}(z)\partial_\mu z_\sigma \partial z_\varrho dy = \int B^{\mathrm{D}}_{\mu\sigma}(x')f_\sigma(x-x')d^4x', \tag{8}$$

где $f_\sigma(y) = \int_{0}^{\infty} \delta(y-\xi)d\xi_\sigma$ и учтена параметризация (4).

---

[1] Выбор $\xi_\mu(y) = -\varepsilon_\mu y$, где ε_μ — постоянный 4-вектор, эквивалентен по своему смыслу выбору “Dirac string“ в виде прямых линий (см. например [19]).

Варьирование по потенциалам $A_\mu, B_\mu, \tilde{A}_\mu, \tilde{B}_\mu$ приводит к следующим полевым уравнениям

$$\partial_\nu(F'_{\sigma\nu}(x)+\varepsilon_{\nu\sigma\varrho\mu}\int\lambda_\mu(x')f_\varrho(x'-x)d^4x') = J^{(e)}_\mu, \tag{9а}$$

$$\partial_\nu(F''_{\sigma\nu}(x)+\varepsilon_{\nu\sigma\varrho\mu}\int\omega_\mu(x')f_\varrho(x'-x)d^4x') = J^{(g)}_\sigma, \tag{9б}$$

$$\partial_\nu F'_{\sigma\nu}+\omega_\sigma = J^{(e)}_\sigma, \tag{9в}$$

$$\partial_\nu F''_{\sigma\nu}-\lambda_\sigma = J^{(g)}_\sigma. \tag{9г}$$

Наконец, варьирование по координатам частиц (к примеру, частицы i-того типа) приводит к уравнению движения вида:

$$\frac{dp^{(i)}_\nu}{ds} = (A_{\mu\nu}-B_{\mu\nu})J^{(ei)}_\mu+(\tilde{A}_{\mu\nu}+B_{\mu\nu})J^{(gi)}_\mu. \tag{10}$$

С учетом (7), (8) определения (5), (6) перепишутся так:

$$F'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}-B^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}-\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\int\partial_\lambda B_{\sigma\lambda}(x')f_\varrho(x-x')d^4x', \tag{11а}$$

$$F''_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}+A^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\int\partial_\lambda A_{\sigma\lambda}(x')f_\varrho(x-x')d^4x'. \tag{11б}$$

Из (9), (11) вытекают уравнения для множителей Лагранжа

$$\omega_\sigma = \partial_\nu\varepsilon_{\varrho\mu\nu\sigma}\int\lambda_\mu(x')f_\varrho(x'-x)d^4x', \tag{12а}$$

$$\lambda_\sigma = -\partial_\nu\varepsilon_{\varrho\mu\nu\sigma}\int\omega_\mu(x')f_\varrho(x'-x)d^4x', \tag{12б}$$

из которых следует, что $\partial_\sigma\omega_\sigma = \partial_\sigma\lambda_\sigma = 0$.

Используя последнее условие, а также то, что $\partial_\nu f_\nu(x) = \delta(x)$, в (9в) можем заменить $\omega_\mu(x)$ выражением $-\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\displaystyle\int\omega_\mu(x')f_\nu(x'-x)dx' = -\partial_\nu\int(\omega_\mu(x')f_\nu(x'-x)-\omega_\nu(x')f_\mu(x'-x))d^4x'$, аналогично и для λ_μ в (9г).

В силу неоднозначности выбора множителей Лагранжа ω_μ, λ_μ мы имеем дело с множеством систем полевых уравнений и определений полевых тензоров через потенциалы. Конкретный выбор множителей Лагранжа может быть сделан на основе физических соображений, которые заключаются в том, что полевые величины, описывающие электромагнитное поле, не должны иметь нефизической зависимости от пространственно-подобного пути.

Объединяя уравнения (9), получаем

$$\partial_\nu(F'_{\mu\nu}-\varphi_{\mu\nu}) = J^{(e)}_\mu, \tag{13а}$$

$$\partial_\nu(F''_{\mu\nu}-\varphi^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}) = J^{(g)}_\mu, \tag{13б}$$

где использованы определения (2) и

$$\varphi_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\int d^4x'[\omega_\mu(x')f_\nu(x'-x)-\omega_\nu(x')f_\mu(x'-x)-\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\lambda_\alpha(x')f_\beta(x'-x)]. \tag{14}$$

Из (13) при выполнении следующих соотношений:

$$\partial_\nu(\varphi_{\mu\nu}+\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\int\partial_\lambda B_{\sigma\lambda}(x')f_\varrho(x-x')d^4x') = 0, \tag{15а}$$

$$\partial_\nu(\varphi^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}-\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\int\partial_\lambda A_{\sigma\lambda}(x')f_\varrho(x-x')d^4x') = 0, \tag{15б}$$

и отождествлении $F_{\mu\nu}$, $F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}$ с „истинными" тензорами электромагнитного поля следуют уравнения Максвелла (1). Из (15) вытекает, что

$$\omega_\mu = \partial_\nu\int\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\lambda B_{\beta\lambda}(x')f_\alpha(x-x')d^4x', \tag{16а}$$

$$\lambda_\mu = -\partial_\nu\int\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\lambda A_{\beta\lambda}(x')f_\alpha(x-x')d^4x'. \tag{16б}$$

Как следует из (15), (16), определения (14) могут быть записаны также в виде:

$$\partial_\nu\varphi_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\int J^{(g)}_\gamma(x')f_\beta(x-x')d^4x', \tag{17а}$$

$$\partial_\nu\varphi^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\int J^{(e)}_\gamma(x')f_\beta(x-x')d^4x'. \tag{17б}$$

Уравнение движения (10) перепишется при этом так:

$$\frac{dp^{(i)}_\nu}{ds} = F_{\mu\nu}J^{(e_i)}_\mu+F^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}J^{(g_i)}_\mu-\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^{(e_i)}_\mu\int J^{(g)}_\beta f_\alpha(x-x')d^4x'$$
$$+\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}J^{(g_i)}_\mu\int J^{(e)}_\beta(x')f_\alpha(x-x')d^4x'. \tag{18}$$

Итак, мы получили из вариационного принципа корректный вид уравнений Максвелла и определение полевого тензора через два потенциала. В то же время в уравнении движения присутствуют нефизические члены, зависящие от выбора пути интегрирования. Если отношение электрического и магнитного зарядов для всех частиц универсально (g/e = univ) (а этот случай эквивалентен обычной однозарядовой электродинамике (см., например, [20–22]), то эти члены взаимно сокращаются. В противном случае необходимо введение дополнительного ограничения на выбор пути интегрирования в определении множителей Лагранжа: путь интегрирования не должен соединять частицы с различными g/e отношениями (см. здесь также [5]). Введение такого ограничения обусловлено здесь необходимостью согласования вида полевых уравнений и уравнений движения через устранение нефизического вклада в их определения.

Это ограничение, как нетрудно убедиться, имеет вид следующего условия:

$$J^{(e)}_\beta(x')J^{(g)}_\alpha(x)-J^{(g)}_\beta(x')J^{(e)}_\alpha(x) = 0. \tag{19}$$

Оно содержит в себе как частный случай условие вида

$$J^{(e)}_\beta(x)J^{(g)}_\alpha(x)-J^{(g)}_\beta(x)J^{(e)}_\alpha(x) = 0$$

полученного ранее в работе [15] при анализе вариационного принципа в теории магнитного заряда.

3. *О взаимосвязи с подходом Швингера*

Сопоставим полученные результаты с результатами работы [23], являющейся развитием подхода Швингера [24] применительно к классической теории магнитного монополя. В качестве лагранжиана здесь рассматривается следующее выражение:

$$\mathscr{L} = \tfrac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu}(\partial_\mu \check{A}_\nu - \partial_\nu \check{A}_\mu) + J_\mu^{(e)} \check{A}_\mu + J_\mu^{(g)} \check{B}_\mu, \tag{20a}$$

$$\check{B}_\mu = \int F_{\nu\mu}^{\mathrm{D}}(x') f_\nu(x'-x) d^4x', \tag{21a}$$

и для получения полевых уравнений проводится варьирование по $F_{\mu\nu}$ и $\check{A}_\mu$ (потенциал $\check{B}_\mu$ не является независимой величиной). Эквивалентные результаты могут быть получены на основе следующего лагранжиана:

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} + \lambda_\mu(\check{B}_\mu(x) - \int F_{\nu\mu}^{\mathrm{D}}(x') f_\nu(x'-x) d^4x'), \tag{22}$$

где $\mathscr{L}$ в (22) есть выражение (20). Варьирование по $F_{\mu\nu}$, $\tilde{A}_\mu$, $\check{B}_\mu$ и λ_μ приводит к уравнениям (23)–(24) и (21a)

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = J_\mu^{(e)}, \tag{23a}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \check{A}_\nu - \partial_\nu \check{A}_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \int \lambda_\beta(x') f_\alpha(x-x') d^4x', \tag{23б}$$

$$J_\mu^{(g)} + \lambda_\mu = 0. \tag{24}$$

С учетом (24) определение (23б) перепишется в виде:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \check{A}_\nu - \partial_\nu \check{A}_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \int J_\beta^{(g)}(x') f_\alpha(x-x') d^4x'. \tag{23в}$$

Определение (21a) эквивалентно соотношению вида:

$$F_{\mu\nu}^{\mathrm{D}} = \partial_\mu \check{B}_\nu - \partial_\nu \check{B}_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \int J_\beta^{(e)}(x) f_\alpha(x-x') d^4x'. \tag{20б}$$

Вторая пара уравнений Максвелла с магнитными источниками следует при этом из определения (23б).

Можно установить взаимосвязь основных соотношений настоящей работы, использующих два потенциала, с соотношениями, вводимыми в подходе Швингера, если ввести определения:

$$\check{A}_\mu = A_\mu - \tilde{B}_\mu, \tag{25}$$

$$\check{B}_\mu = \tilde{A}_\mu + B_\mu. \tag{26}$$

4. *Квантовомеханическое рассмотрение*

Обсудим теперь квантовомеханическое описание взаимодействия дуально заряженных частиц с электромагнитным полем в рамках двухпотенциального подхода.

Определим лагранжиан теории следующим образом (для простоты ограничимся наличием двух дуально заряженных частиц с зарядами e_1, g_1 и e_2, g_2):

$$\mathscr{L} = \tfrac{1}{4}(F'_{\mu\nu})^2 + \tfrac{1}{4}(F''_{\mu\nu})^2 - \tfrac{1}{2}F'_{\mu\nu}(A_{\mu\nu} - \tilde{B}_{\mu\nu}) - \tfrac{1}{2}F''_{\mu\nu}(\tilde{A}_{\mu\nu} + B_{\mu\nu})$$
$$- \bar{\psi}\gamma_\mu[\partial_\mu - ie_1(A_\mu - \tilde{B}_\mu) - ig_1(\tilde{A}_\mu + B_\mu)]\psi - m_1\bar{\psi}\psi$$
$$- \bar{\chi}\gamma_\mu[\partial_\mu - ie_2(A_\mu - \tilde{B}_\mu) - ig_2(\tilde{A}_\mu + B_\mu)]\chi - m_2\bar{\chi}\chi, \tag{27}$$

где $\tilde{A}_\mu$, $\tilde{B}_\mu$ определяются формулами (7), (8) и эти соотношения могут быть получены из лагранжиана при использовании метода множителей Лагранжа, аналогично тому, как это было сделано ранее. С помощью описанной в п. 2 процедуры, получим полевые уравнения (15), определения (16), и уравнения движения:

$$\gamma_\mu[\partial_\mu - ie_1(A_\mu - \int_{-\infty}^{0} B^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma}\partial_\mu z_\sigma \partial z_\varrho dy) - ig_1(\int_{-\infty}^{0} A^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma}\partial_\mu z_\sigma \partial z_\varrho dy + B_\mu)]\psi + m\psi = 0, \tag{28а}$$

$$\gamma_\mu[\partial_\mu - ie_2(A_\mu - \int_{-\infty}^{0} B^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma}\partial_\mu z_\sigma \partial z_\varrho dy) - ig_2(\int_{-\infty}^{0} A^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma}\partial_\mu z_\sigma \partial z_\varrho dy + B_\mu)]\psi + m\psi = 0. \tag{28б}$$

Уравнения (28) включают члены, зависящие от пути. Условие непротиворечивости теории заключается теперь в том, чтобы изменение пути было эквивалентно градиентному преобразованию потенциалов и могло быть компенсировано калибровочным преобразованием заряженных полей. Введем обозначение:

$$q_1 C_\mu = -e_1 \int_{-\infty}^{0} B^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma}\partial_\mu z_\sigma \partial z_\varrho dy + g_1 \int_{-\infty}^{0} A^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma}\partial_\mu z_\sigma \partial z_\varrho dy. \tag{29}$$

Вариация $q_1\delta C_\mu$ при изменении пути $z_\mu(x, y)$ имеет вид:

$$q_1\delta C_\mu = \partial_\mu \int_{-\infty}^{0} (-e_1 B^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma} + g_1 A^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma})\partial z_\varrho dy \delta z_\sigma$$
$$- \varepsilon_{\mu\varrho\sigma\lambda} \int_{-\infty}^{0} (e_1 J^{(g)}_\lambda - g_1 J^{(e)}_\lambda)\partial_\mu z_\varrho \partial z_\omega \delta z_\sigma dy. \tag{30}$$

Первое слагаемое в (30) имеет градиентный характер и может быть компенсировано калибровочным преобразованием поля ψ, второе слагаемое в (30) не представимо в виде градиента от некоторой функции и поэтому не может быть компенсировано калибровочным преобразованием поля ψ. Но если подинтегральные выражения в (30) определены только для путей, вдоль которых $J^{(g_2)}_\mu$, $J^{(e_2)}_\mu$ удовлетворяют условию (19), тогда имеем, что второе слагаемое в (30) обращается в нуль.

Это означает, что одно из условий непротиворечивости квантовомеханической теории аналогично „вето Дирака" в классике (см. [25]). Однако это условие необходимо, но не достаточно для непротиворечивости теории.

Рассмотрим теперь первое слагаемое в (30). Для его компенсации необходимо проведение фазового преобразования: $\psi' = e^{i\delta\varphi}\psi$, где

$$\delta\varphi = \int_{-\infty}^{0} (-e_1 B^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma} + g_1 A^{\mathrm{D}}_{\varrho\sigma})\partial z_\varrho \delta z_\sigma dy. \tag{31}$$

Подинтегральное выражение в (31), учитывая введенные ограничения на пути интегрирования, можно представить следующим образом:

$$q_1(\partial_\varrho a_\sigma - \partial_\sigma a_\varrho) \tag{32}$$

так что

$$\delta\varphi = -q_1\delta \int_{-\infty}^{0} a_\sigma \partial z_\sigma dy = q_1\delta \int_{-\infty}^{0} a_\sigma(\xi)d\xi_\sigma. \tag{33}$$

При конечном изменении пути интегрирования поле ψ приобретает фазу, зависящую от выбора пути. Требование однозначности фазы означает необходимость выполнения следующего условия:

$$q_1 \int \partial_\nu a^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} dV_\mu = 2\pi n, \tag{34}$$

которое приводит к условию зарядового квантования:

$$\begin{aligned} q_1 \int \partial_\nu a^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} dV_\mu &= \int \partial_\nu(-e_1 B^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} + g_1 A^{\mathrm{D}}_{\mu\nu})^{\mathrm{D}} dV_\mu \\ &= \int [e_1(g_1 J^1_\nu + g_2 J^2_\nu) - g_1(e_1 J^1_\nu + e_2 J^2_\nu)] dV_\mu \\ &= \int (e_1 g_2 - e_2 g_1) J^2_\nu dV_\mu = 2\pi n. \end{aligned} \tag{35}$$

Возникает, конечно, вопрос об увеличении числа степеней свободы при описании электромагнитного поля с помощью двух независимых потенциалов A_μ, B_μ. Определение (15) допускает проведение следующих преобразований [2]

$$A_\mu \to A_\mu + A^0_\mu, \qquad B_\mu \to B_\mu + B^0_\mu, \tag{36}$$

где „калибровочные" потенциалы удовлетворяют условию:

$$\partial_\mu A^0_\nu - \partial_\nu A^0_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha B^0_\beta = 0. \tag{37}$$

С учетом преобразований (36) описание радиационного поля с помощью определения (15) не означает введения двух независимых типов фотонов: „электрического" и „магнитного" (см. здесь также [26, 27]).

5. *Квантовая теория*

Существует тесная взаимосвязь развитого подхода с квантовой теорией дуально--заряженных частиц, основанной на использовании безпотенциальной формулировки квантовой электродинамики, данной Мандельстамом (см., например, [28, 29]). В работах [6, 30] (см. изложение в [21], гл. V) дана лагранжева формулировка теории и установлена связь развитого формализма с двухпотенциальным описанием электромагнитного поля (см. также [5, 10]). Мы покажем, что с учетом ограничения на пути интегрирования, о котором шла речь выше, имеется прямое соответствие с этими результатами. В формализме Мандельстама используется следующее определение градиентно-инвариантной производной $\bar{\partial}_\mu$:

$$\bar{\partial}_\mu \phi(x, P) = \lim_{\Delta x_\mu \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x_\mu, P') - \phi(x, P)}{\Delta x_\mu}, \tag{38}$$

где путь P' отличается от P на отрезок Δx_μ в направлении μ-той оси. Применительно к функции $\psi(x)$ производная $\bar{\partial}_\mu$ совпадает с „обычной" производной. Из определения (38) следует, что

$$\bar{\partial}_\mu \int_P^x A_\varrho(\xi) d\xi_\varrho = A_\mu(x) \tag{39}$$

в то время как для „обычной" производной имеем:

$$\partial_\mu \int_P^x A_\varrho(\xi) d\xi_\varrho = A_\mu + \int_P^x F_{\mu\varrho}(\xi) d\xi_\varrho \tag{40}$$

если

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{41}$$

Если $\Psi = \psi \exp(-ie \int_P^x A_\varrho(\xi) d\xi_\varrho)$, то с учетом (38)–(41) можно показать, что

$$\partial_\mu \Psi = \bar{\partial}_\mu \Psi + ie \int_P^x F_{\varrho\mu}(\xi) d\xi_\varrho \cdot \Psi. \tag{42}$$

Вводя определение

$$qC_\mu = e(A_\mu - \tilde{B}_\mu) + g(\tilde{A}_\mu + B_\mu) \tag{43}$$

уравнение вида (28) перепишем так:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - iqC_\mu)\psi = m\psi. \tag{44}$$

Путем длинных, но прямых вычислений можно убедиться, используя (43), что

$$qC_{\mu\nu} = eF_{\mu\nu} + gF^{\mathrm{D}}_{\mu\nu} + \varepsilon_{\lambda\gamma\mu\nu} \int_P^x d\xi_\lambda (e\partial_\sigma B_{\gamma\sigma}(\xi) - g\partial_\sigma A_{\gamma\sigma}(\xi)), \tag{45}$$

где третий член справа в выражении (45) обращается в нуль при введении обсужденных ранее ограничений на пути интегрирования.

В результате калибровочного преобразования

$$C_\mu \to C'_\mu = C_\mu - \partial_\mu \int_P^x C_\varrho(\xi) d\xi_\varrho = \int_P^x C_{\varrho\mu}(\xi) d\xi_\varrho = \int_P^x (eF_{\varrho\mu} + gF^{\mathrm{D}}_{\varrho\mu})(\xi) d\xi_\varrho, \tag{46а}$$

$$\psi \to \Psi = \exp(-iq \int_P^x C_\mu(\xi) d\xi_\mu) \cdot \psi \tag{46б}$$

можно перейти от уравнения (44) и, следовательно, от (28) к уравнению вида:

$$\gamma_\mu(\partial_\mu - \imath \int_P^x (eF_{\varrho\mu}(\xi) + gF^{\mathrm{D}}_{\varrho\mu}(\xi))d\xi_\varrho)\Psi - m\Psi = 0, \tag{47}$$

которое эквивалентно следующему уравнению

$$\gamma_\mu \bar{\partial}_\mu \Psi - m\Psi = 0. \tag{48}$$

Последнее утверждение доказывается по аналогии с доказательством уравнений (40)–(42).

Таким образом, мы пришли к уравнению для $\Psi(x, P)$ и определению зависимости $\Psi(x, P)$ от пространственно-подобного пути, которые были использованы в [5, 6, 30] и являются дуально симметричным обобщением и развитием формализма, предложенного в работах [2, 16].

6. Заключение

Итак, возможно построение теории дуально заряженных частиц, основанной на двухпотенциальном определении полевого тензора и не использующей „Dirac strings" при формулировке вариационной процедуры. Самосогласованность и физическая непротиворечивость теории требуют в то же время введения дополнительных предположений, которые аналогичны по форме и содержанию дополнительным условиям в теории магнитного монополя Дирака. Это означает, что объекты типа „Dirac strings" являются характерной чертой самосогласованной формулировки теории магнитного заряда.

Обсудим перспективы применения развитого формализма в неабелевой калибровочной теории. Уравнения свободного поля Янга-Милла можно записать в следующей форме [29]:

$$\bar{\partial}_\nu \mathscr{F}^a_{\mu\nu}(x, P) = 0, \qquad \bar{\partial}_\nu \mathscr{F}^{a\mathrm{D}}_{\mu\nu}(x, P) = 0, \tag{49}$$

где тензоры $\mathscr{F}_{\mu\nu}$, $\mathscr{F}^{\mathrm{D}}_{\mu\nu}$ инвариантны относительно преобразований калибровочной группы, но зависят не только от x, но и от некоторого пространственно-подобного пути P. Уравнения (39) допускают следующее определение [29]:

$$\mathscr{F}^a_{\mu\nu}(x, P) = \bar{\partial}_\mu A^a_\nu(x, P) - \bar{\partial}_\nu A^a_\mu(x, P). \tag{50}$$

Введение „магнитных" источников можно описывать в духе подхода Дирака через обобщение определения (50)

$$\mathscr{F}^a_{\mu\nu}(x, P) = \bar{\partial}_\mu A^a_\nu(x, P) - \bar{\partial}_\nu A^a_\mu(x, P) - \tilde{G}^a_{\mu\nu}(x, P), \tag{51}$$

где $\tilde{G}^a_{\mu\nu}$ соответствует вкладу магнитных источников и имеет сингулярный характер. Такой подход рассматривался, в частности, в работах [11–13]. Однако построить лагранжев формализм и убедиться в самосогласованности постулируемых уравнений при этом не удается.

Уравнения (49) с отличными от нуля правыми частями можно решать путем введения двух независимых потенциалов

$$\mathscr{F}^a_{\mu\nu}(x, P) = \bar{\partial}_\mu A^a_\nu - \bar{\partial}_\nu A^a_\mu(x, P) - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\partial}_\alpha B^a_\beta(x, P). \tag{52}$$

Преобразования

$$A^a_\mu(x, P) \to A^a_\mu(x, P)\cos\vartheta + B^a_\mu(x, P)\sin\vartheta,$$

$$B^a_\mu(x, P) \to B^a_\mu(x, P)\cos\vartheta - A^a_\mu(x, P)\sin\vartheta, \tag{53}$$

(их следует называть ларморовскими (см. [21, 31]), будут индуцировать дуальные преобразования полей $\mathscr{F}^a_{\mu\nu}$, $\mathscr{F}^{aD}_{\mu\nu}$. Если добавить в правые части уравнения (49) члены вида $\bar{\partial}_\mu \Lambda^a(x, P)$, $\bar{\partial}_\mu \tilde{\Lambda}^a(x, P)$ соответственно, где $\Lambda^a(x, P) = \bar{\partial}_\mu A^a_\mu$, $\tilde{\Lambda}^a(x, P) = \bar{\partial}_\mu B_\mu$, которые можно рассматривать как полевые добавки к „электрическому" и „магнитному" токам, то таким образом обобщенные уравнения приобретают дополнительную внутреннюю симметрию [32], описываемую группой SL(2, C). Включение в уравнение (49) источников двух типов обсуждалось в литературе пока только на основе определения (4). Мы надеемся, что развитый в настоящей работе подход позволяет наметить новый путь к построению теории неабелева поля с двумя типами источников.

Авторы признательны Л. М. Томильчику за полезное обсуждение результатов настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. A. M. Dirac, *Phys. Rev.* **74**, 817 (1948).
[2] N. Cabibbo, E. Ferrari, *Nouvo Cimento* **23**, 1147 (1962).
[3] Л. Томильчик, *Доклады Академии наук БССР* **8**, 379 (1964).
[4] I. Białynicki-Birula, Z. Białynicki-Birula, *Phys. Rev.* **D3**, 2410 (1971).
[5] P. Vinciarelli, *Phys. Rev.* **D6**, 3419 (1972).
[6] V. I. Strazhev, *Lett. Nuovo Cimento* **9**, 641 (1974).
[7] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **173**, 1536 (1968).
[8] T. T. Wu, C. N. Yang, *Phys. Rev.* **D13**, 437 (1976); *Nucl. Phys.* **B107**, 365 (1976).
[9] R. A. Brandt, J. L. Primack, *Phys. Rev.* **D15**, 1798 (1977).
[10] В. В. Соколов, *Ядерная физика* **23**, 781 (1976); **26**, 427 (1977).
[11] I. Eguchi, *Phys. Lett.* **B59**, 73 (1975).
[12] Z. F. Ezawa, H. C. Tze, *Phys. Rev.* **D15**, 1647 (1977).
[13] D. Olive, *Phys. Rev.* **49**, 165 (1979).
[14] F. Rohrlich, *Phys. Rev.* **150**, 1104 (1966).
[15] D. Rosenbaum, *Phys. Rev.* **147**, 891 (1966).
[16] D. K. Ross, *Phys. Rev.* **181**, 2055 (1969).
[17] W. A. Barker, F. Graziani, *Amer. J. Phys.* **46**, 1111 (1978).
[18] Kuo-shung Cheng, *Phys. Rev.* **D18**, 542 (1978).
[19] L. J. Schiff, *Phys. Rev.* **160**, 1257 (1967).
[20] В. И. Стражев, Л. М. Томильчик, *Элемент частицы и атомное ядро* **4**, 187 (1973).
[21] В. И. Стражев, Л. М. Томильчик, *Электродинамика с магнитным зарядом*, Наука и техника, Минск 1975.

[22] J. Schwinger, *Science* **165**, 757 (1969).
[23] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **144**, 1087 (1966).
[24] T. M. Yan, *Phys. Rev.* **150**, 1349 (1966).
[25] G. Wentzel, *Progr. Theor. Phys.* **37–38**, 163 (1966).
[26] Ю. В. Кресин, В. И. Стражев, *Теоретич. матем. физика* **36**, 426 (1978).
[27] В. И. Стражев, В. А. Плетюхов, *Известия вузов СССР, физика*, в печати (1979).
[28] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **175**, 1580 (1969).
[29] I. Białynicki-Birula, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.* **11**, 135 (1963).
[30] В. И. Стражев, Автореферат канд. диссертации, Минск 1970.
[31] В. И. Стражев, С. И. Круглов, *Acta Phys. Pol.* **B8**, 235 (1977).
[32] В. И. Стражев, *Известия визов СССР, физика* № 8 (1977); *Acta Phys. Pol.* **B9**, 449 (1978).