ЗАВИСИМОСТЬ ОТ КООРДИНАТ СИЛЫ САМОДЕЙСТВИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СЛАБОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ*

DEPENDENCE OF THE RADIATION REACTION FORCE IN A WEAK GRAVITATIONAL FIELD ON THE COORDINATE SYSTEM

Ч. Янкевич

Выжшая Педагогическая Школа, Жешув**

(Поступила в редакцию 2-го октября 1979 г.)

The radiation reaction force is found for a one-parameter class of coordinate systems which generalize the harmonic coordinates. It is shown that there exists a coordinate system in which the radiation reaction force vanishes.

1. Введение

Уравнения движения точечного электрона выведенные Дираком [1] имеют вид

$$m\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2}+F^\mu_{(\mathrm{ext})}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^2}\left(\frac{d^3\xi^\mu}{ds^3}+\eta_{\alpha\beta}\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2}\frac{d^2\xi^\beta}{ds^2}\frac{d\xi^\mu}{ds}\right). \tag{1}$$

Подобного типа уравнения для материальной точки в слабом гравитационном поле были получены Гавасом [2] и Шмуцером [3]. Применяя разные методы регуляризации, они вывели из уравнений гравитационного поля уравнения движения, которые имеют вид

$$m\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2}+F^\mu_{(\mathrm{ext})}=\frac{11}{3}\frac{km^2}{c^2}\left(\frac{d^3\xi^\mu}{ds^3}+\eta_{\alpha\beta}\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2}\frac{d^2\xi^\beta}{ds^2}\frac{d\xi^\mu}{ds}\right). \tag{2}$$

Члены стоящие с правых сторон уравнений (1) и (2) характеризуют силы самодействия электрона и материальной точки соответственно. Первый член силы гравитационного самодействия связан с полем движущейся материальной точки. Второй член описывает гравитационное излучение.

* Субсидировано польским Министерством Науки, Высшего Образования и Техники, проблема M.P.I.7: „Поля, частицы, пространство-время".

** Address: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Turkienicza 24, 35-959 Rzeszów, Poland.

Уравнения гравитационного поля, из которых вытекают уравнения движения (2) обще-ковариантны в отличие от уравнений электромагнитного поля, которые Лоренц-ковариантны. По мнению Инфельда ([4], гл. VI, § II), из общей ковариантности уравнений гравитационного поля следует, что можно подобрать такую систему координат, в которой гравитационное излучение исчезает. В настоящей работе мы исследуем зависимость от координат силы самодействия материальной точки в слабом гравитационном поле. В частности, мы находим систему координат, в которой исследуемая сила самодействия исчезает. Для регуляризации уравнений движения применяем метод предложенный Инфельдом и Плебаньским [5, 6], в котором используются модифицированные δ-функции Дирака. Однако, из приведенных рассуждений следует, что полученные результаты не зависят от метода регуляризации уравнений движения.

2. *Преобразование уравнений поля и уравнений движения*

Эйнштейновы уравнения гравитационного поля

$$R^{\mu\nu} = -\frac{8\pi k}{c^2} T_*^{\mu\nu}, \tag{3}$$

где ([7], Добавление Г)

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} &= -\tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g^{\mu\nu} - \Gamma^{\mu\nu} + g^{\alpha\beta} g^{\varrho\sigma} \Gamma^{\mu}_{\alpha\varrho}\Gamma^{\nu}_{\beta\sigma}, \\ \Gamma^{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}\left(g^{\mu\alpha}\partial_\alpha \Gamma^\nu + g^{\nu\beta}\partial_\beta\Gamma^\mu - \Gamma^\alpha\partial_\alpha g^{\mu\nu}\right), \\ \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} &= \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu}(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\alpha\nu} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}), \\ \Gamma^\mu &= g^{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\alpha\beta}, \qquad \Gamma_\nu = g_{\nu\mu}\Gamma^\mu, \end{aligned} \tag{4}$$

будем решать в потенциальных координатах, которые определяются условиями [8]

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \Gamma_\nu - \nabla_\nu \Gamma_\mu &= 0, \\ \nabla_\mu \Gamma^\mu &= -\frac{8\pi k\alpha}{c^2} T_*. \end{aligned} \tag{5}$$

(Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, по этим повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 0 до 3.) Величины $T_*^{\mu\nu}$ и T_* связаны с тензором масс $T^{\mu\nu}$ формулами

$$T_*^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} T g^{\mu\nu}, \qquad T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}, \qquad T_* = g_{\alpha\beta}T_*^{\alpha\beta}. \tag{6}$$

Условия (5) зависят от произвольного параметра α. Для фиксированного значения этого параметра они определяют предпочитаемый класс координатных систем. Таким образом, фиксируя параметр α в общем решении $g_{\mu\nu}(x,\alpha)$ уравнений (3) и (5) получаем метрический тензор в выбранном классе предпочитаемых координат.

Легко заметить, что условия (5) эквивалентны уравнениям

$$\Gamma_\nu = \partial_\nu f,$$

$$g^{\alpha\beta}(\partial_\alpha\partial_\beta f - \partial_\alpha f \partial_\beta f) = -\frac{8\pi k\alpha}{c^2} T_*. \tag{7}$$

Подставляя (6) в (4), из уравнений поля (3) получаем

$$g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\alpha\partial_\beta f - 2\Lambda^{\mu\nu} = 16\pi k c^{-2} T_*^{\mu\nu}, \tag{8}$$

где

$$\Lambda^{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}g^{\varrho\sigma}\Gamma^\mu_{\alpha\varrho}\Gamma^\nu_{\beta\sigma} + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\Gamma^\varrho_{\alpha\beta}\partial_\varrho f. \tag{9}$$

В работе [8] показано, что выполнения нековариантных условий (5) или эквивалентных им условий (6) и (7) можно добиться преобразованием координат. Таким образом уравнения (7) и (8) являются уравнениями тяготения Эйнштейна в предпочитаемых координатах определенных значением параметра α.

Следуя Инфельду и Плебаньскому ([4], гл. I, § 4) полагаем, что тензор масс материальной точки имеет вид

$$T^{\mu\nu} = \frac{m}{\sqrt{-g}} \int \delta(x-\xi) \frac{d\xi^\mu}{d\sigma} \frac{d\xi^\nu}{d\sigma} d\sigma, \tag{10}$$

где

$$d\sigma^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu. \tag{11}$$

Здесь $(\xi) = (\xi^0, \bar{\xi})$ пространство-временные координаты точки, а m её масса. Мы употребляем тоже общее обозначение

$$\widetilde{(\ldots)} = \int (\ldots)\delta(x-\xi)(dx), \tag{12}$$

где $\delta(x-\xi)$ произведение четырех модифицированных δ-функции Дирака [5].

Как известно ([4], гл. I, § 6), из уравнений поля (3) вытекают уравнения движения материальной точки, которые имеют вид

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\sigma^2} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\sigma} \frac{d\xi^\beta}{d\sigma} = 0. \tag{13}$$

Поскольку уравнения поля и уравнения движения будем решать методом последовательных приближений, начиная с псевдоевклидовой метрики целесообразно ввести собственное время в смысле частной теории относительности

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu. \tag{14}$$

Используя (14), легко получаем

$$T_*^{\mu\nu} = \frac{m}{\sqrt{-g}} \int \delta(x-\xi) \left(\frac{ds}{d\sigma} u^\mu u^\nu - \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{ds} g^{\mu\nu} \right) ds, \tag{15}$$

$$T_* = -\frac{m}{\sqrt{-g}} \int \delta(x-\xi) \frac{d\sigma}{ds} ds, \tag{16}$$

где

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = 1+(\tilde{g}_{\mu\nu}-\eta_{\mu\nu})u^\mu u^\nu, \tag{17}$$

причем

$$u^\mu = \frac{d\xi^\mu}{ds}, \qquad \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1. \tag{18}$$

Простое преобразование уравнений (13) дает

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} + \tilde{F}^\mu_* = 0, \tag{19}$$

где сила самодействия $\tilde{F}^\mu_*$ получается по формуле (12) из выражений

$$F^\mu_* = F^\mu - \eta_{\alpha\beta}F^\alpha u^\beta u^\mu, \qquad F^\alpha = \Gamma^\alpha_{\varrho\sigma}u^\varrho u^\sigma. \tag{20}$$

Уравнения (19) описывают движение материальной точки в гравитационном поле тойже точки. Если рассматривать систему материальных точек, то уравнения движения точки имеют вид

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} + \tilde{F}^\mu_* + \tilde{F}^\mu_{(\text{ext})} = 0. \tag{21}$$

Здесь $\tilde{F}^\mu_{(\text{ext})}$ сила действия остальных точек рассматриваемой системы на исследуемую материальную точку.

3. *Нулевое приближение*

Уравнения поля (7), (8) и уравнения движения (21) будем решать методом последовательных приближений. Этот метод предполагает разложение всех величин в степенные ряды по малому параметру $\lambda = kc^{-2}$ ([9], § 18).

Из разложения метрического тензора

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \lambda \underset{(1)}{g^{\mu\nu}} - \lambda^2 \underset{(2)}{g^{\mu\nu}} - \ldots \tag{22}$$

и из формулы (6) следует, что разложение функции f можно начинать с первого порядка

$$f = \lambda \underset{(1)}{f} + \lambda^2 \underset{(2)}{f} + \ldots . \tag{23}$$

Разложение пространство-временных координат напишем в виде

$$\xi^\mu = \underset{(0)}{\xi^\mu} + \lambda \underset{(1)}{\xi^\mu} + \lambda^2 \underset{(2)}{\xi^\mu} + \ldots . \tag{24}$$

Согласно предположению (22), в нулевом приближении метрика пространства-времени псевдоевклидова. Вводя собственное время нулевого порядка

$$\underset{(0)}{ds^2} = \eta_{\mu\nu} d\underset{(0)}{\xi^\mu} d\underset{(0)}{\xi^\nu}, \tag{25}$$

из формул (19) и (20) получаем

$$\frac{d^2 \underset{(0)}{\xi^\mu}}{d\underset{(0)}{s^2}} = 0. \tag{26}$$

Отсюда следует

$$\frac{d\underset{(0)}{\xi^\mu}}{d\underset{(0)}{s}} = \underset{(0)}{u^\mu}, \qquad \underset{(0)}{\xi^\mu} = \underset{(0)}{u^\mu}\underset{(0)}{s} + \underset{(0)}{c^\mu}, \qquad \eta_{\mu\nu}\underset{(0)}{u^\mu}\underset{(0)}{u^\nu} = 1, \tag{27}$$

где $\underset{(0)}{u^\mu}$ и $\underset{(0)}{c^\mu}$ постоянные интегрирования.

Поскольку в нулевом приближении метрика пространства-времени псевдоевклидова, то материальные точки не взаимодействуют и не самодействуют. Таким образом уравнения (26) верны для всех точек рассматриваемой системы. Этот результат существенно влияет на конечные уравнения движения материальной точки. В отличие от электрона, материальная точка в своем собственном поле не ускоряется ([9], § 36.8).

4. Первое приближение

В первом приближении уравнения (7) и (8) дают

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(1)}{f} = 8\pi\alpha m \int \delta(x - \underset{(0)}{\xi})d\underset{(0)}{s}, \tag{28}$$

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(1)}{g^{\mu\nu}} - 2\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(1)}{f} = -16\pi m \int \delta(x - \underset{(0)}{\xi})\underset{(0)}{\sigma^{\mu\nu}}d\underset{(0)}{s}, \tag{29}$$

где

$$\underset{(0)}{\sigma^{\mu\nu}} = \underset{(0)}{u^\mu}\underset{(0)}{u^\nu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}. \tag{30}$$

Поскольку правые стороны уравнений (28) и (29) выражаются через известные решения уравнений движения нулевого порядка, то уравнения (28) и (29) легко решить.

Запаздывающее решение волнового уравнения (28) имеет вид

$$\underset{(1)}{f} = 2\alpha \frac{m}{\underset{(0)}{\varrho_{(-)}}}, \tag{31}$$

причем

$$\underset{(0)}{\varrho} = \eta_{\alpha\beta}(x^\alpha - \underset{(0)}{\xi^\alpha})\underset{(0)}{u^\beta}. \tag{32}$$

Здесь мы используем общее обозначение

$$\underset{(n)}{(\ldots)_{(-)}} = \underset{(n)}{(\ldots)}|_{\underset{(n)}{S_{(-)}}=0}, \tag{33}$$

где

$$\underset{(n)}{S}_{(-)} = (x^0 - \underset{(n)}{\xi}{}^0) - |\bar{x} - \underset{(n)}{\bar{\xi}}|. \tag{34}$$

В частном случае $\underset{(0)}{s}_{(-)}$ определяется формулой

$$x^0 - \underset{(0)}{\xi}{}^0(\underset{(0)}{s}_{(-)}) - |\bar{x} - \underset{(0)}{\bar{\xi}}(\underset{(0)}{s}_{(-)})| = 0. \tag{35}$$

Из определения (35) следует, что

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(0)}{s}_{(-)} = \frac{2}{\underset{(0)}{\varrho}_{(-)}}. \tag{36}$$

Таким образом формулы (31) и (36) дают

$$\underset{(1)}{f} = \alpha m \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(0)}{s}_{(-)}. \tag{37}$$

При помощи (37) уравнения (29) сводятся к волновым уравнениям

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta(\underset{(1)}{g}{}^{\mu\nu} - 2\alpha m \eta^{\mu\varrho}\eta^{\nu\sigma}\partial_\varrho\partial_\sigma \underset{(0)}{s}_{(-)}) = -16\pi m \int \delta(x - \underset{(0)}{\xi})\underset{(0)}{\sigma}{}^{\mu\nu} \underset{(0)}{ds}. \tag{38}$$

Запаздывающие решения этих уравнений имеют вид

$$\underset{(1)}{g}{}^{\mu\nu} = -4m \frac{\underset{(0)}{\sigma}{}^{\mu\nu}}{\underset{(0)}{\varrho}_{(-)}} + 2\alpha m \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(0)}{s}_{(-)}. \tag{39}$$

Здесь мы учли, что величины $\underset{(0)}{\sigma}{}^{\mu\nu}$ постоянные.

С точностью до первого приближения уравнения движения (21) дают

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} + \lambda \underset{(1)}{\tilde{F}}{}^\mu_* + \tilde{F}^\mu_{(\mathrm{ext})} = 0, \tag{40}$$

где

$$\underset{(1)}{F}{}^\mu_* = \underset{(1)}{F}{}^\mu - \eta_{\alpha\beta}\underset{(1)}{F}{}^\alpha \underset{(0)}{u}{}^\beta \underset{(0)}{u}{}^\mu, \tag{41}$$

$$\underset{(1)}{F}{}^\alpha = \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\varrho \underset{(1)}{g}_{\sigma\beta} + \partial_\sigma \underset{(1)}{g}_{\varrho\beta} - \partial_\beta \underset{(1)}{g}_{\varrho\sigma})\underset{(0)}{u}{}^\varrho \underset{(0)}{u}{}^\sigma. \tag{42}$$

Здесь $\underset{(1)}{g}_{\varrho\sigma}$ получаются из $\underset{(1)}{g}{}^{\alpha\beta}$ обнижением индексов при помощи $\eta_{\mu\nu}$.

Легко показать, не прибегая к явным вычислениям, что сила самодействия

$$\underset{(1)}{\tilde{F}}{}^\mu_* = 0. \tag{43}$$

Действительно, $\underset{(1)}{g}_{\alpha\beta}$ и $\partial_\varrho \underset{(1)}{g}_{\alpha\beta}$ являются тензорами на группе Лоренца. Из (42) следует, что $\underset{(1)}{F}{}^\alpha$ является вектором. Согласно (39) $\underset{(1)}{g}_{\mu\nu}$ зависит от координат x, $\underset{(0)}{\xi}_{(-)}$ и от оянного вектора $\underset{(0)}{u^\alpha}$ удовлетворяющего условию (27). Таким образом вектор конечном счете выражается через x, $\underset{(0)}{\xi_{(-)}}$ и $\underset{(0)}{u^\alpha}$. Но самый общий вектор за- щий от x, $\underset{(0)}{\xi_{(-)}}$ и единичного вектора $\underset{(0)}{u^\alpha}$ имеет вид

$$\underset{(1)}{F^\alpha} = \kappa(x, \underset{(0)}{\xi_{(-)}})\underset{(0)}{u^\alpha}, \tag{44}$$

$\kappa(x, \underset{(0)}{\xi_{(-)}})$ произвольный скаляр. Из (41) и (44) получаем (43). Дальше мы пока- явным образом, что сила $\underset{(1)}{\tilde{F}^\mu_*}$ равна нулю, рассматривая эту силу как частный ай силы самодействия выжшего приближения.

Окончательно, с точностью до первого приближения уравнения движения риальной точки имеют вид

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} + \tilde{F}^\mu_{(\mathrm{ext})} = 0. \tag{45}$$

сь $\tilde{F}^\mu_{(\mathrm{ext})}$ запаздывающие силы взаимодействия исследуемой точки с остальными ками рассматриваемой системы материальных точек. Эти силы надо учитывать чностью до первого порядка.

5. *Второе приближение*

Уравнения (7) и (8) с точностью до второго приближения дают

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(\to 2)}{f} - \lambda^2 \underset{(2)}{M} = -8\pi\alpha\lambda \underset{(\to 1)}{T_*}, \tag{46}$$

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(\to 2)}{g^{\mu\nu}} - 2\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(\to 2)}{f} + 2\lambda^2 \underset{(2)}{\Lambda^{\mu\nu}} - \lambda^2 \underset{(2)}{N^{\mu\nu}} = -16\pi\lambda \underset{(\to 1)}{T^{\mu\nu}_*}, \tag{47}$$

$$\underset{(\to 2)}{f} = \lambda \underset{(1)}{f} + \lambda^2 \underset{(2)}{f}, \qquad \underset{(\to 2)}{g^{\mu\nu}} = \lambda \underset{(1)}{g^{\mu\nu}} + \lambda^2 \underset{(2)}{g^{\mu\nu}}. \tag{48}$$

чины $\underset{(2)}{\Lambda^{\mu\nu}}$, $\underset{(2)}{N^{\mu\nu}}$ и $\underset{(2)}{M}$ выражаются через решения уравнений поля первого дка по формулам

$$\underset{(2)}{M} = \underset{(1)}{g^{\alpha\beta}}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(1)}{f} + \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha \underset{(1)}{f}\partial_\beta \underset{(1)}{f}, \tag{49}$$

$$\underset{(2)}{\Lambda^{\mu\nu}} = \eta^{\alpha\beta}\eta^{\varrho\sigma}\underset{(1)}{\Gamma^\mu_{\alpha\varrho}}\underset{(1)}{\Gamma^\nu_{\beta\sigma}} + \eta^{\mu\varrho}\eta^{\nu\sigma}\underset{(1)}{\Gamma^\alpha_{\varrho\sigma}}\partial_\alpha \underset{(1)}{f}, \tag{50}$$

$$\underset{(2)}{N^{\mu\nu}} = \underset{(1)}{g^{\alpha\beta}}\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(1)}{g^{\mu\nu}} - 2(\eta^{\mu\alpha}\underset{(1)}{g^{\nu\beta}} + \eta^{\nu\beta}\underset{(1)}{g^{\mu\alpha}})\partial_\alpha\partial_\beta \underset{(1)}{f}. \tag{51}$$

ласно (31) и (39) в конечном счете они зависят от координат x, $\underset{(0)}{\xi_{(-)}}$ и скорости $\underset{(0)}{u^\alpha}$.

Из (15) и (16) с точностью до первого приближения следует

$$\underset{(\to 1)}{T_*} = -m\int \delta(x-\xi)ds - \tfrac{1}{2}\lambda m\int \delta(x-\underset{(0)}{\xi})\underset{(1)}{P}\underset{(0)}{ds}, \tag{52}$$

$$\underset{(\to 1)}{T_*^{\mu\nu}} = m\int \delta(x-\xi)\sigma^{\mu\nu}ds - \tfrac{1}{2}\lambda m\int \delta(x-\underset{(0)}{\xi})\underset{(1)}{t^{\mu\nu}}\underset{(0)}{ds}, \tag{53}$$

где

$$\sigma^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}. \tag{54}$$

Величины $\underset{(1)}{P}$ и $\underset{(1)}{t^{\mu\nu}}$ выражаются тоже в конечном счете через координаты x, $\underset{(0)}{\xi_{(-)}}$ и постоянную скорость $\underset{(0)}{u^\alpha}$ по формулам

$$\underset{(1)}{P} = \underset{(1)}{g_{\alpha\beta}}(\underset{(0)}{u^\alpha}\underset{(0)}{u^\beta} - \eta^{\alpha\beta}), \tag{55}$$

$$\underset{(1)}{t^{\mu\nu}} = \underset{(1)}{g_{\alpha\beta}}(\underset{(0)}{u^\alpha}\underset{(0)}{u^\beta} + \eta^{\alpha\beta})\underset{(0)}{u^\mu}\underset{(0)}{u^\nu} + \tfrac{1}{2}\underset{(1)}{P}\eta^{\mu\nu} - \underset{(1)}{g^{\mu\nu}}. \tag{56}$$

Из линейности уравнений (46) и (47) следует, что не уменьшая общности, уравнения эти можем написать в виде

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\psi = 8\pi\alpha\lambda m\int \delta(x-\xi)ds, \tag{57}$$

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\gamma^{\mu\nu} - 2\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\psi = -16\pi\lambda m\int \delta(x-\xi)\sigma^{\mu\nu}ds, \tag{58}$$

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\underset{(2)}{\varphi} - \underset{(2)}{M} = 4\pi\alpha m\int \delta(x-\underset{(0)}{\xi})\underset{(1)}{P}\underset{(0)}{ds}, \tag{59}$$

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\underset{(2)}{h^{\mu\nu}} - 2\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\underset{(2)}{\varphi} + 2\underset{(2)}{\Lambda^{\mu\nu}} - \underset{(2)}{N^{\mu\nu}} = 8\pi m\int \delta(x-\underset{(0)}{\xi})\underset{(1)}{t^{\mu\nu}}\underset{(0)}{ds}, \tag{60}$$

где введены обозначения

$$\underset{(\to 2)}{f} = \psi + \lambda^2\underset{(2)}{\varphi}, \qquad \underset{(\to 2)}{g^{\mu\nu}} = \gamma^{\mu\nu} + \lambda^2\underset{(2)}{h^{\mu\nu}}. \tag{61}$$

Поскольку нас интересуют решения уравнений (57) и (58) с точностью до λ^2, то координаты ξ^μ с правых сторон этих уравнений надо учитывать с точностью до λ. Таким образом мы разделили уравнения поля, написанные с точностью до второго порядка, на две группы. Первая группа этих уравнений (57), (58) содержит функции ψ и $\gamma^{\mu\nu}$ учитываемые с точностью до второго порядка и координаты ξ учитываемые с точностью до первого порядка. Вторая группа этих уравнений (59), (60), это уравнения второго порядка для функции $\underset{(2)}{\varphi}$ и $\underset{(2)}{h^{\mu\nu}}$.

Из (48) и (61) следует, что с точностью до λ^2 функции $g^{\mu\nu}$ и f имеют вид

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu} + \lambda^2\underset{(2)}{h^{\mu\nu}}, \qquad f = \psi + \lambda^2\underset{(2)}{\varphi}, \tag{62}$$

м $\gamma^{\mu\nu}$ и ψ содержат члены порядка λ и λ^2. Учитывая (62), из уравнений (19) аем уравнения движения с точностью до второго порядка

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2}+\lambda^2\underset{(2)}{\tilde{Q}^\mu_*}+\lambda^2\underset{(2)}{\tilde{F}^\mu_*}+\tilde{P}^\mu_*+\tilde{F}^\mu_{(\mathrm{ext})}=0. \tag{63}$$

$\tilde{Q}^\mu_*$ выражается через решения (39) уравнений поля первого порядка по фор-

$$\underset{(2)}{\tilde{Q}^\mu_*}=\underset{(2)}{\tilde{Q}^\mu}-\eta_{\alpha\beta}\underset{(2)}{\tilde{Q}^\alpha}\underset{(0)}{u^\beta}\underset{(0)}{u^\mu},\qquad \underset{(2)}{Q^\mu}=\underset{(2)}{K^\mu{}_{\varrho\sigma}}\underset{(0)}{u^\varrho}\underset{(0)}{u^\sigma}, \tag{64}$$

$$\underset{(2)}{K^\mu{}_{\varrho\sigma}}=\eta^{\beta\tau}\underset{(1)}{\Gamma^\mu_{\varrho\tau}}\underset{(1)}{g_{\beta\sigma}}+\eta^{\alpha\tau}\underset{(1)}{\Gamma^\mu_{\sigma\tau}}\underset{(1)}{g_{\alpha\varrho}}$$
$$+\tfrac{1}{2}\,\eta_{\alpha\varrho}\eta_{\beta\sigma}(\underset{(1)}{g^{\mu\nu}}\partial_\nu\underset{(1)}{g^{\alpha\beta}}-\underset{(1)}{g^{\alpha\nu}}\partial_\nu\underset{(1)}{g^{\mu\beta}}-\underset{(1)}{g^{\beta\nu}}\partial_\nu\underset{(1)}{g^{\mu\alpha}}). \tag{65}$$

$\underset{(2)}{\tilde{F}^\mu_*}$ выражается через решения уравнений (59) и (60) по формулам

$$\underset{(2)}{\tilde{F}^\mu_*}=\underset{(2)}{\tilde{F}^\mu}-\eta_{\alpha\beta}\underset{(2)}{\tilde{F}^\alpha}\underset{(0)}{u^\beta}\underset{(0)}{u^\mu},\qquad \underset{(2)}{F^\mu}=\underset{(2)}{\Lambda^\mu{}_{\varrho\sigma}}\underset{(0)}{u^\varrho}\underset{(0)}{u^\sigma}, \tag{66}$$

$$\underset{(2)}{\Lambda^\mu{}_{\varrho\sigma}}=\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\tau}(\partial_\varrho\underset{(2)}{h_{\sigma\tau}}+\partial_\sigma\underset{(2)}{h_{\varrho\tau}}-\partial_\tau\underset{(2)}{h_{\varrho\sigma}}). \tag{67}$$

$\tilde{P}^\mu_*$ выражается через решения уравнений (57) и (58). Она имеет вид

$$\tilde{P}^\mu_*=\tilde{P}^\mu-\eta_{\alpha\beta}\tilde{P}^\alpha u^\beta u^\mu,\qquad P^\mu=\Pi^\mu{}_{\varrho\sigma}u^\varrho u^\sigma, \tag{68}$$

$$\Pi^\mu{}_{\varrho\sigma}=\tfrac{1}{2}\,\eta^{\mu\tau}(\partial_\varrho\gamma_{\sigma\tau}+\partial_\sigma\gamma_{\varrho\tau}-\partial_\tau\gamma_{\varrho\sigma}). \tag{69}$$

ины $\underset{(2)}{h_{\varrho\sigma}}$ и $\gamma_{\varrho\sigma}$ получаются из $\underset{(2)}{h^{\mu\nu}}$ и $\gamma^{\mu\nu}$ обнижением индексов при помощи $\eta_{\alpha\beta}$. з формул (64), (65), (66) и (67) следует, что силы $\underset{(2)}{Q^\mu_*}$ и $\underset{(2)}{F^\mu_*}$ в конечном счете каются через координаты x, $\underset{(0)}{\xi_{(-)}}$ и постоянную скорость $\underset{(0)}{u^\alpha}$. Из этих самых ажений, из которых следует исчезновение силы самодействия первого прибли- (43), получаем

$$\underset{(2)}{\tilde{Q}^\mu_*}=0,\qquad \underset{(2)}{\tilde{F}^\mu_*}=0. \tag{70}$$

образом уравнения движения с точностью до второго порядка принимают

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2}+\tilde{P}^\mu_*+\tilde{F}^\mu_{(\mathrm{ext})}=0. \tag{71}$$

$\tilde{F}^\mu_{(\mathrm{ext})}$ сила взаимодействия остальных материальных точек рассматриваемой ы на исследуемую материальную точку.

6. Сила самодействия

Для вычисления силы самодействия $\tilde{P}^{\mu}_{*}$ необходимо решить уравнения (57) и (58). Запаздывающее решение уравнения (57) имеет вид

$$\psi = 2\alpha\lambda \frac{m}{\varrho_{(-)}}, \tag{72}$$

где

$$\varrho = \eta_{\alpha\beta}(x^{\alpha} - \xi^{\alpha})u^{\beta}. \tag{73}$$

Здесь мы используем общие обозначения (33) и (34). Из определения

$$x^0 - \xi^0(s_{(-)}) - |\bar{x} - \bar{\xi}(s_{(-)})| = 0 \tag{74}$$

получаем

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}s_{(-)} = \frac{2}{\varrho_{(-)}}. \tag{75}$$

Затем формулы (72) и (75) дают

$$\psi = \alpha\lambda m \eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}s_{(-)}. \tag{76}$$

Из подстановки (76) до (58) следует

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}(\gamma^{\mu\nu} - 2\alpha m \eta^{\mu\varrho}\eta^{\nu\sigma}\partial_{\varrho}\partial_{\sigma}s_{(-)}) = -16\pi\lambda m \int \delta(x-\xi)\sigma^{\mu\nu}ds. \tag{77}$$

Запаздывающие решения этих уравнений имеют вид

$$\gamma^{\mu\nu} = -4\lambda m \frac{\sigma^{\mu\nu}_{(-)}}{\varrho_{(-)}} + 2\alpha\lambda\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}s_{(-)}. \tag{78}$$

Заметим, что здесь u^{μ} и следовательно $\sigma^{\mu\nu}$, в отличие от (39), не постоянные. Поэтому мы не можем применить приведенных там рассуждений для вычисления силы самодействия, поскольку она может зависеть от производных вектора скорости u^{μ}.

Из решений (78) и из (68) и (69) следует, что сила P^{α} зависит от u^{μ}, $x^{\mu} - \xi^{\mu}_{(-)}$, $u^{\mu}_{(-)}$, $\dot{u}^{\mu}_{(-)}$ и $\ddot{u}^{\mu}_{(-)}$. Здесь точка обозначает дифференцирование по собственному времени s. Таким образом P^{α} имеет вид

$$P^{\alpha} = \Phi^{\alpha}[u^{\mu}; (x^{\mu} - \xi^{\mu}_{(-)}), u^{\mu}_{(-)}, \dot{u}^{\mu}_{(-)}, \dot{u}^{\mu}_{(-)}], \tag{79}$$

где Φ^{α} строго определенные функции указанных аргументов. Из определения (33) следует, что мы можем избавиться от запаздывания, написав функции (79) в виде

$$P^{\alpha} = \int \Phi^{\alpha}[u^{\mu}; (x^{\mu} - \xi'^{\mu}), u'^{\mu}, \dot{u}'^{\mu}, \ddot{u}'^{\mu}]\varrho' G'_{(-)}ds', \tag{80}$$

где

$$G'_{(-)} = \frac{\delta(S'_{(-)})}{|\bar{x} - \bar{\xi}'|}, \quad S'_{(-)} = (x^0 - \xi'^0) - |\bar{x} - \bar{\xi}'|,$$

$$\varrho' = \eta_{\alpha\beta}(x^{\alpha} - \xi'^{\alpha})u'^{\beta}, \quad \xi'^{\alpha}(s') = \xi^{\alpha}(s'), \tag{81}$$

причем в формуле (80) точка обозначает дифференцирование по параметру s'. Действительно из второй формулы (81) следует

$$\left|\frac{ds'}{dS'_{(-)}}\right| = \frac{|\bar{x}-\bar{\xi}'|}{\varrho'}. \tag{82}$$

Здесь мы учли, что по поводу δ-функции значение интеграла (80) зависит только от $S'_{(-)} = 0$. Выполняя замену переменных в интеграле (80), получаем

$$P^\alpha = \int \Phi^\alpha[u^\mu; (x^\mu - \xi'^\mu), u'^\mu, \dot{u}'^\mu, \ddot{u}'^\mu]\delta(S'_{(-)})dS_{(-)} \tag{83}$$

что согласно (33) дает (80) в шрихтынованных обозначениях.

Из (80) следует

$$\tilde{P}^\alpha = \int \Phi^\alpha[u^\mu; (\xi^\mu - \xi'^\mu), u'^\mu, \dot{u}'^\mu, \ddot{u}'^\mu]\tilde{\varrho}\tilde{G}_{(-)}ds', \tag{84}$$

где

$$\tilde{G}_{(-)} = \frac{\delta(\tilde{S})}{|\bar{\xi}-\bar{\xi}'|}, \qquad \tilde{S} = (\xi^0 - \xi'^0) - |\bar{\xi}-\bar{\xi}'|, \qquad \tilde{\varrho} = \eta_{\alpha\beta}(\xi^\alpha - \xi'^\alpha)u'^\beta. \tag{85}$$

Явный вид интеграла (84) и вычисление этого интеграла дано в Добавлении. Из приведенных там вычислений следует

$$\tilde{P}^\alpha = -\lambda m\kappa(\alpha + \tfrac{7}{2})\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} + \lambda m\left[(\alpha + \tfrac{11}{3})\frac{d^3\xi^\alpha}{ds^3} - (\alpha + \tfrac{1}{3})\eta_{\varrho\sigma}\frac{d^2\xi^\varrho}{ds^2}\frac{d^2\xi^\sigma}{ds^2}\frac{d\xi^\alpha}{ds}\right], \tag{86}$$

где постоянная κ определяется формулой

$$\kappa = \int \frac{\delta(\varepsilon)}{|\varepsilon|}d\varepsilon. \tag{87}$$

Отсюда, по формуле (68) получаем

$$\tilde{P}^\mu_* = -\lambda m\kappa(\alpha + \tfrac{7}{2})\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} + \lambda m(\alpha + \tfrac{11}{3})\left(\frac{d^3\xi^\mu}{ds^3} + \eta_{\varrho\sigma}\frac{d^2\xi^\varrho}{ds^2}\frac{d^2\xi^\sigma}{ds^2}\frac{d\xi^\mu}{ds}\right). \tag{88}$$

Для хорошей δ-функции $\kappa = 0$. Таким образом сила самодействия материальной точки в слабом гравитационном поле имеет вид

$$\tilde{P}^\mu_* = \lambda m(\alpha + \tfrac{11}{3})\left(\frac{d^3\xi^\mu}{ds^3} + \eta_{\varrho\sigma}\frac{d^2\xi^\varrho}{ds^2}\frac{d^2\xi^\sigma}{ds^2}\frac{d\xi^\mu}{ds}\right). \tag{89}$$

Уравнения (28) и (29) отличаются от уравнений (57) и (58) только обозначениями и постоянством скорости $\underset{(0)}{u^\mu}$. Затем из (89) следует $\underset{(1)}{\tilde{F}^\mu_*} = 0$, что является непосредственным подтверждением (43).

Подстановка (89) в (71) дает уравнения движения материальной точки в гравитационном поле с точностью до λ^2:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2}+\tilde{F}^\mu_{(\text{ext})} = \lambda m(\alpha+\tfrac{11}{3})\left(\frac{d^3\xi^\mu}{ds^3}+\eta_{\varrho\sigma}\frac{d^2\xi^\varrho}{ds^2}\frac{d^2\xi^\sigma}{ds^2}\frac{d\xi^\mu}{ds}\right).$$

Здесь $\tilde{F}^\mu_{(\text{ext})}$ сила взаимодействия рассматриваемой материальной точки с остал материальными точками исследуемой системы. Уравнения движения (90) з от произвольного параметра α определяющего координатную систему. В га ческих координатах, которым соответствует $\alpha = 0$, из (90) получаем ура движения (2) выведенные Гавасом. В координатах соответствующих пар

$$\alpha = -\tfrac{11}{3}$$

сила самодействия исчезает и уравнения движения (90) принимают вид

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2}+\tilde{F}^\mu_{(\text{ext})} = 0.$$

Таким образом мы показали, что в рассматриваемом приближении силы действия всегда можно вытрансформировать путем выбора надлежащей с координат. Из приведенных вычислений следует, что этот результат не з от метода регуляризации уравнений движения.

ДОБАВЛЕНИЕ

Напишем $\gamma_{\mu\nu}$ в виде суммы

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu}+\gamma''_{\mu\nu},$$

где

$$\gamma'_{\mu\nu} = -4\lambda m\,\frac{\sigma_{(-)\mu\nu}}{\varrho_{(-)}},$$

$$\gamma''_{\mu\nu} = 2\alpha\lambda\partial_\mu\partial_\nu s_{(-)}.$$

Из этого разложения получаем

$$\tilde{P}^\mu_* = \tilde{P}'^\mu_*+\tilde{P}''^\mu_*,$$

где $\tilde{P}'^\mu_*$ и $\tilde{P}''^\mu_*$ выражаются формулами (68) и (69) соответственно.

Как следует из (68), (69) и (79) для вычисления $\tilde{P}'^\mu_*$ необходимо выч производные $\partial_\alpha\varrho_{(-)}$ и $\partial_\alpha s_{(-)}$. Дифференцирование (73) и (74) дает

$$\partial_\alpha s_{(-)} = \frac{r^{(-)}_\alpha}{\varrho_{(-)}},$$

$$\partial_\alpha \varrho_{(-)} \ldots \frac{r^{(-)}_\alpha}{\ldots} \ldots \frac{r^\alpha_{(-)}r^\sigma_{(-)}w^\sigma_{(-)}}{\ldots}$$

Здесь индексы у величин

$$r^\alpha = x^\alpha - \xi^\alpha, \qquad u^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{ds}, \qquad w^\alpha = \frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} \tag{Д7}$$

опускаются и поднимаются при помощи $\eta_{\alpha\beta}$ и $\eta^{\alpha\beta}$ соответственно. Используя (Д5) и (Д6) из (Д2) и (54) имеем

$$\begin{aligned}\partial_\mu \gamma'_{\alpha\beta} &= 4\lambda m \frac{u_\alpha^{(-)} u_\beta^{(-)} u_\mu^{(-)}}{\varrho_{(-)}^2} - 2\lambda m \frac{\eta_{\alpha\beta} u_\mu^{(-)}}{\varrho_{(-)}^2}\\ &-4\lambda m \frac{r_\mu^{(-)}(u_\alpha^{(-)} w_\beta^{(-)} + u_\beta^{(-)} w_\alpha^{(-)})}{\varrho_{(-)}^2} - 4\lambda m \frac{r_\mu^{(-)} u_\alpha^{(-)} u_\beta^{(-)}}{\varrho_{(-)}^3}\\ &+4\lambda m \frac{r_\mu^{(-)} u_\alpha^{(-)} u_\beta^{(-)} r_\sigma^{(-)} w_{(-)}^\sigma}{\varrho_{(-)}^3} + 2\lambda m \frac{\eta_{\alpha\beta} r_\mu^{(-)}}{\varrho_{(-)}^3} - 2\lambda m \frac{\eta_{\alpha\beta} r_\mu^{(-)} r_\sigma^{(-)} w_{(-)}^\sigma}{\varrho_{(-)}^3}.\end{aligned} \tag{Д8}$$

Подставляя (Д8) в соответствующие формулы (68) и (69) и избываясь от запаздывания при помощи преобразования (79)–(81) получаем

$$\tilde{P}'^\mu = \lambda m \int \frac{A'^\mu}{\tilde{\varrho}} \tilde{G}_{(-)} ds' + \lambda m \int \frac{B'^\mu}{\tilde{\varrho}^2} \tilde{G}_{(-)} ds' \tag{Д9}$$

где

$$A'^\mu = [2(u^\alpha u'_\alpha)^2 - 4u^\alpha w'_\alpha r'^\sigma u_\sigma + 1]u'^\mu + 2u^\alpha u'_\alpha[2u_\sigma w'^\sigma r'^\mu - 2u_\sigma r'^\sigma w'^\mu - u^\mu], \tag{Д10}$$

$$\begin{aligned}B'^\mu &= (1 + 4w'_\tau r'^\tau) u_\sigma r'^\sigma u^\alpha u'_\alpha u'^\mu + 2(1 - 4w'_\sigma r'^\sigma) u^\alpha r'_\alpha u^\mu\\ &+ [2(u^\alpha u'_\alpha)^2 (1 - w'_\sigma r'^\sigma) - 1 + w'^\alpha r'_\alpha] r'^\mu\end{aligned} \tag{Д11}$$

причем $r'^\alpha = \xi^\alpha - \xi'^\alpha$.

Поскольку подинтегральные выражения в (Д9) содержат δ-функции, эти интегралы легко вычислить ([10], § 34). Вводя малый параметр ε по формуле

$$s' = s + \varepsilon \tag{Д12}$$

и разлагая в степенные ряды по этому параметру все шрихтированные величины в интегралах (Д9) имеем

$$\begin{aligned} r'^\mu &= -\varepsilon(u^\mu + \tfrac{1}{2}\varepsilon w^\mu + \tfrac{1}{6}\varepsilon^2 \dot{w}^\mu + \ldots),\\ u'^\mu &= u^\mu + \varepsilon w^\mu + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \dot{w}^\mu + \ldots,\\ w'^\mu &= w^\mu + \varepsilon \dot{w}^\mu + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \ddot{w}^\mu + \ldots .\end{aligned} \tag{Д13}$$

Разложение $1/\tilde{\varrho}$ имеет вид

$$\frac{1}{\tilde{\varrho}} = -\frac{1}{\varepsilon}(1 + \tfrac{1}{6}\varepsilon^2 w_\alpha w^\alpha + \ldots). \tag{Д14}$$

Здесь мы учли зависимости

$$u^\alpha u_\alpha = 1, \quad u^\alpha w_\alpha = 0, \quad u^\alpha \dot{w}_\alpha = -w^\alpha w_\alpha. \tag{Д15}$$

Подставляя (Д13) и (Д14) в (Д9)-(Д11), получаем

$$\int \frac{A'^\mu}{\tilde{\varrho}} \tilde{G}_{(-)} ds' = -u^\mu \int \frac{\tilde{G}_{(-)}}{\varepsilon} d\varepsilon - 7w^\mu \int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon - \left(\tfrac{11}{2}\, \dot{w}^\mu + \tfrac{29}{6}\, u^\mu w^\alpha w_\alpha\right) \int \varepsilon \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon, \tag{Д16}$$

$$\int \frac{B'^\mu}{\tilde{\varrho}^2} \tilde{G}_{(-)} ds' = -4u^\mu \int \frac{\tilde{G}_{(-)}}{\varepsilon} d\varepsilon - \tfrac{3}{2}\, w^\mu \int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon + \left(-\tfrac{2}{3}\, \dot{w}^\mu + \tfrac{7}{6}\, u^\mu w^\alpha w_\alpha\right) \int \varepsilon \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon. \tag{Д17}$$

Формула (Д9) и интегралы (Д16), (Д17) дают

$$\tilde{P}'^\mu = -\tfrac{7}{2}\, \lambda m w^\mu \int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon - \left(\tfrac{11}{3}\, \dot{w}^\mu - \tfrac{1}{3}\, w^\alpha w_\alpha u^\mu\right) \int \varepsilon \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon. \tag{Д18}$$

Для вычисления $\tilde{P}''^\mu$ необходимо знать производные $\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma s_{(-)}$. Дифференцируя (Д5) получаем

$$\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma s_{(-)} = \frac{a_{\alpha\beta\gamma}}{\varrho^2_{(-)}} + \frac{b_{\alpha\beta\gamma}}{\varrho^3_{(-)}} + \frac{c_{\alpha\beta\gamma}}{\varrho^4_{(-)}} + \frac{d_{\alpha\beta\gamma}}{\varrho^5_{(-)}}, \tag{Д19}$$

где

$$a_{\alpha\beta\gamma} = -(\eta_{\alpha\beta} u^{(-)}_\gamma + \eta_{\beta\gamma} u^{(-)}_\alpha + \eta_{\alpha\gamma} u^{(-)}_\beta),$$

$$\begin{aligned} b_{\alpha\beta\gamma} = {} & \eta_{\alpha\beta} r^{(-)}_\gamma + \eta_{\beta\gamma} r^{(-)}_\alpha + \eta_{\gamma\alpha} r^{(-)}_\beta + 2(u^{(-)}_\alpha u^{(-)}_\beta r^{(-)}_\gamma + u^{(-)}_\beta u^{(-)}_\gamma r^{(-)}_\alpha + u^{(-)}_\alpha u^{(-)}_\gamma r^{(-)}_\beta) \\ & - (r^{(-)}_\alpha r^{(-)}_\beta w^{(-)}_\gamma + r^{(-)}_\beta r^{(-)}_\gamma w^{(-)}_\alpha + r^{(-)}_\alpha r^{(-)}_\gamma w^{(-)}_\beta) \\ & - (\eta_{\alpha\beta} r^{(-)}_\gamma + \eta_{\beta\gamma} r^{(-)}_\alpha + \eta_{\alpha\gamma} r^{(-)}_\beta) r^{(-)}_\varrho w^\varrho_{(-)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta\gamma} = {} & -3(r^{(-)}_\alpha r^{(-)}_\beta u^{(-)}_\gamma + r^{(-)}_\beta r^{(-)}_\gamma u^{(-)}_\alpha + r^{(-)}_\gamma r^{(-)}_\alpha u^{(-)}_\beta) \\ & + r^{(-)}_\alpha r^{(-)}_\beta r^{(-)}_\gamma r^{(-)}_\varrho \dot{w}^\varrho_{(-)} + 3(r^{(-)}_\alpha r^{(-)}_\beta u^{(-)}_\gamma + r^{(-)}_\beta r^{(-)}_\gamma u^{(-)}_\alpha + r^{(-)}_\alpha r^{(-)}_\gamma u^{(-)}_\beta) r^{(-)}_\varrho w^\varrho_{(-)}, \end{aligned}$$

$$d_{\alpha\beta\gamma} = -6 r^{(-)}_\alpha r^{(-)}_\beta r^{(-)}_\gamma r^{(-)}_\varrho w^\varrho_{(-)} + 3 r^{(-)}_\alpha r^{(-)}_\beta r^{(-)}_\gamma + 3 r^{(-)}_\alpha r^{(-)}_\beta r^{(-)}_\gamma (r^{(-)}_\varrho w^\varrho_{(-)})^2. \tag{Д20}$$

Подставляя (Д20) в соответствующие формулы (68) и (69) и учитывая (79)–(81), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{P}''^\mu = {} & \alpha\lambda m \int \frac{A''^\mu}{\tilde{\varrho}} \tilde{G}_{(-)} ds' + \alpha\lambda m \int \frac{B''^\mu}{\tilde{\varrho}^2} \tilde{G}_{(-)} ds' \\ & + \alpha\lambda m \int \frac{C''^\mu}{\tilde{\varrho}^3} \tilde{G}_{(-)} ds' + \alpha\lambda m \int \frac{D''^\mu}{\tilde{\varrho}^4} \tilde{G}_{(-)} ds' \end{aligned} \tag{Д21}$$

где

$$A''^{\mu} = -u'^{\mu} - 2u^{\alpha}u'_{\alpha}u^{\mu}, \tag{Д22}$$

$$B''^{\mu} = [1 + 2(u^{\alpha}u'_{\alpha})^2 - 2u^{\alpha}r'_{\alpha}w'_{\sigma}r'^{\sigma} - w'_{\alpha}r'^{\alpha}]r'^{\mu}$$
$$+ 2u^{\alpha}r'_{\alpha}(1 - w'_{\sigma}r'^{\sigma})u^{\mu} + 4u^{\alpha}u'_{\alpha}u_{\sigma}r'^{\sigma}(u'^{\mu} - u_{\sigma}r'^{\sigma}w'^{\mu}), \tag{Д23}$$

$$C''^{\mu} = [6u^{\alpha}u'_{\alpha}u_{\sigma}r'^{\sigma}(w'_{\tau}r'^{\tau} - 1) - (u^{\alpha}r'_{\alpha})^2 r'^{\sigma}w'_{\sigma}]r'^{\mu} + 3(u^{\alpha}r'_{\alpha})^2(w'_{\sigma}r'^{\sigma} - 1)u'^{\mu}, \tag{Д24}$$

$$D''^{\mu} = 3(u^{\alpha}r'_{\alpha})^2[1 + (w'_{\sigma}r'^{\sigma})^2 - 3w'_{\sigma}r'^{\sigma}]r'^{\mu}. \tag{Д25}$$

Вычисление интегралов (Д21) при помощи разложений (Д13) и (Д14) дает

$$\int \frac{A''^{\mu}}{\tilde{\varrho}} \tilde{G}_{(-)} ds' = 3u^{\mu} \int \frac{\tilde{G}_{(-)}}{\varepsilon} d\varepsilon + w^{\mu} \int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon + (\tfrac{1}{2}\, \dot{w}^{\mu} - \tfrac{1}{2}\, u^{\mu}w^{\alpha}w_{\alpha}) \int \varepsilon \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon, \tag{Д26}$$

$$\int \frac{B''^{\mu}}{\tilde{\varrho}^2} \tilde{G}_{(-)} ds' = -9u^{\mu} \int \frac{\tilde{G}_{(-)}}{\varepsilon} d\varepsilon - \tfrac{13}{2}\, w^{\mu} \int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon$$
$$+ (-\tfrac{7}{6}\, \dot{w}^{\mu} + \tfrac{17}{6}\, u^{\mu}w^{\alpha}w_{\alpha}) \int \varepsilon \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon, \tag{Д27}$$

$$\int \frac{C''^{\mu}}{\tilde{\varrho}^3} \tilde{G}_{(-)} ds' = 9u^{\mu} \int \frac{\tilde{G}_{(-)}}{\varepsilon} d\varepsilon + 6w^{\mu} \int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon$$
$$+ (\tfrac{5}{2}\, \dot{w}^{\mu} - 5u^{\mu}w^{\alpha}w_{\alpha}) \int \varepsilon \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon, \tag{Д28}$$

$$\int \frac{D''^{\mu}}{\tilde{\varrho}^4} \tilde{G}_{(-)} ds' = -3u^{\mu} \int \frac{\tilde{G}_{(-)}}{\varepsilon} d\varepsilon - \tfrac{3}{2}\, w^{\mu} \int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon$$
$$- (\tfrac{1}{2}\, \dot{w}^{\mu} - 2u^{\mu}w^{\alpha}w_{\alpha}) \int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon. \tag{Д29}$$

Из (Д21) и (Д26)-(Д29) следует

$$\tilde{P}''^{\mu} = -\alpha\lambda m w^{\mu} \int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon - \alpha\lambda m(\dot{w}^{\mu} - w^{\alpha}w_{\alpha}u^{\mu}) \int \varepsilon \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon. \tag{Д30}$$

Таким образом из формул (Д18) и (Д30) получаем

$$P^{\mu} = -\lambda m\{(\alpha + \tfrac{7}{2})w^{\mu} \int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon + (\alpha + \tfrac{11}{3})\dot{w}^{\mu} \int \varepsilon \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon$$
$$- (\alpha + \tfrac{1}{3})w^{\alpha}w_{\alpha}u^{\mu} \int \varepsilon \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon. \tag{Д31}$$

Учитывая (Д12), запаздывающую функцию Грина (85) можем написать в виде

$$\tilde{G}_{(-)} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}\right) \delta(\varepsilon^2) = \frac{\delta(\varepsilon)}{|\varepsilon|} - \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon}. \tag{Д32}$$

Подставляя (Д32) в (Д31) и выполняя интегрирование, имеем

$$\tilde{P}^{\mu} = -\lambda m\{(\alpha + \tfrac{7}{2})w^{\mu} - (\alpha + \tfrac{11}{3})\dot{w}^{\mu} + (\alpha + \tfrac{1}{3})w^{\alpha}w_{\alpha}u^{\mu}\}. \tag{Д33}$$

Здесь мы учли, что согласно (87) и (Д32)

$$\int \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon = \int \frac{\delta(\varepsilon)}{|\varepsilon|} d\varepsilon - \int \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} d\varepsilon = \kappa,$$

$$\int \varepsilon \tilde{G}_{(-)} d\varepsilon = \int \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \delta(\varepsilon) d\varepsilon - \int \delta(\varepsilon) d\varepsilon = -1. \qquad (\text{Д}34)$$

Формула (Д33) совпадает с формулой (86).

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* A **167**, 148 (1938).
[2] P. Havas, *Phys. Rev.* **108**, 1351 (1957).
[3] E. Schmutzer, *Ann. Phys.* (Germany) **7**, 107 (1966).
[4] L. Infeld, J. Plebański, *Motion and Relativity*, Pergamon Press — New York, PWN — Warszawa 1960.
[5] L. Infeld, J. Plebański, *Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III* **4**, 757 (1956).
[6] L. Infeld, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 398 (1957).
[7] V. A. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon Press, New York 1964.
[8] C. Jankiewicz, *Acta Phys. Pol.* **B10**, 525 (1979).
[9] Ch. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, San Francisco 1973.
[10] Д. Иваненко, А. Соколов, *Классическая Теория Поля*, Москва—Ленинград 1949.