О ЛАГРАНЖЕВОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ON THE LAGRANGIAN FORMULATION OF THE FIELD THEORY

А. В. Минкевич, Ф. И. Фёдоров

Кафедра теоретической физики, Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина, Минск*

(*Поступила в редакцию 23-го октября 1979 г.*)

It is possible to transform the Euler–Lagrange equations in such a way that the transformed equations do not follow from a variational principle. In this work transformations which preserve the variational nature of field equations are considered. In particular behaviour of conservation laws under such transformations is found. The results are applied to a relativistic gravitation theory in space-time with curvature and torsion.

1. *Введение*

В работе [1] было показано, что уравнения гравитации Эйнштейна могут быть приведены к универсальной форме матричных уравнений первого порядка с квадратичной нелинейностью по компонентам волновой функции

$$(\gamma^k\partial_k+\gamma^0)\psi+\Lambda\psi\psi = 0, \tag{1}$$

где ψ — 50-компонентная волновая функция, составленная из всех независимых компонент метрического тензора и символов Кристоффеля, γ^k и γ^0 — постоянные квадратные 50×50-матрицы, $\Lambda = (\Lambda_{\alpha\beta\gamma})$ — кубическая матрица[1]. В [2] был рассмотрен вопрос о лагранжевой формулировке для уравнения (1). Функция Лагранжа задавалась в виде

$$L = \frac{1}{2}\,\psi(\beta^k\partial_k+\beta_0)\psi+\frac{1}{6}\,\psi M\psi\psi, \tag{2}$$

где $\beta^k = Q\gamma^k$, $\beta^0 = Q\gamma^0$, $M_{\mu\gamma\lambda} = Q_{\mu\mu'}\Lambda_{\mu'\nu\lambda}$, матрица M симметрична относительно всех трех индексов. Как показано в [2], из различных эквивалентных между собой систем уравнений вида (1), получающихся друг из друга путем преобра-

* Address: Department of Theoretical Physics, V. I. Lenin Byelorussian State University, Minsk, USSR.

[1] Уравнения типа (1) имеют весьма универсальный характер, в таком виде могут бyть представлены уравнения для многих основных видов полей, например, уравнения квантовой электродинамики, нелинейного спинорного поля Гейзенберга и др.

зования компонент волновой функции, не для всех существует неособенная матрица Q, с помощью которой может быть получен лагранжиан (2). Данный вывод, сделанный в [2] применительно к уравнениям (1), имеет общее значение: вариационный характер полевых уравнений может нарушаться при преобразовании полей, а также при преобразовании самих уравнений. Это означает, что не всякое представление теории допускает лагранжеву формулировку. Вместе с тем определенный интерес представляет исследование преобразований полей и полевых уравнений, не нарушающих экстремального характера теории (т.е. возможности ее вывода из вариационного принципа). Это позволяет в ряде случаев получить полезные сведения о важнейших динамических характеристиках полей и о законах сохранения. В п. 2 данной работы более подробно обсуждается вопрос об экстремальности полевых уравнений в связи с различными преобразованиями полей и уравнений. В п. 3 исследуется вопрос о поведении законов сохранения при преобразовании полей с производными в рамках лагранжевой формулировки теории поля. Полученные в п. 3 результаты применяются в п. 4 к релятивистской теории гравитации в пространстве с кривизной и кручением.

2. *Об экстремальности уравнений в теории поля*

Рассмотрим систему взаимодействующих полей Q_A $(A = 1, 2, \ldots)$ с лагранжианом $L = L(Q_A, Q_{A,\mu})$. Уравнения данной системы

$$\frac{\delta L}{\delta Q_A} \equiv \frac{\partial L}{\partial Q_A} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial Q_{A,\mu}}\right) = 0. \tag{3}$$

Будем рассматривать преобразование уравнений (3)

$$M_{AB}\frac{\delta L}{\delta Q_B} = 0, \tag{4}$$

где $M = \|M_{AB}(Q)\|$ — неособенная матрица. Как системы дифференциальных уравнений (3) и (4) эквивалентны между собой. Однако между ними имеется следующее важное различие. В то время как система (3) выводима из вариационного принципа, система (4), вообще говоря, не обладает данным свойством. (Разумеется, уравнения (4) являются вариационными в случае постоянной диагональной матрицы M. Экстремальный характер у системы (4) может сохраниться также в случае некоторых недиагональных преобразований, вид которых зависит от конкретной структуры уравнений (3).) Вариационный характер системы (3) также, вообще говоря, нарушается при обратимых преобразованиях полей

$$Q_A \to Q'_A = Q'_A(Q), \qquad Q_A = Q_A(Q'), \tag{5}$$

в частности, при линейных преобразованиях

$$Q'_A = N_{AB}Q_B \qquad (\mathrm{Det}\, \|N_{AB}\| \neq 0,\ N_{AB} = \mathrm{const}). \tag{6}$$

Проиллюстрируем вышесказанное на простейшем примере, когда к качестве полей Q_A рассматривается система двух невзаимодействующих скалярных вещественных полей φ и ϕ:

$$L = -\tfrac{1}{2}((\partial_\mu \varphi)^2 + m_1^2 \varphi^2) - \tfrac{1}{2}((\partial_\mu \phi)^2 + m_2^2 \phi^2),$$

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = (\Box - m_1^2)\varphi = 0, \qquad \frac{\delta L}{\delta \phi} = (\Box - m_2^2)\phi = 0. \tag{7}$$

При преобразовании (4) с постоянной матрицей $M = \begin{Vmatrix} M_{11} M_{12} \\ M_{21} M_{22} \end{Vmatrix}$ уравнения (7) преобразуются следующим образом:

$$M_{11}\frac{\delta L}{\delta \varphi} + M_{12}\frac{\delta L}{\delta \phi} = 0,$$

$$M_{21}\frac{\delta L}{\delta \varphi} + M_{22}\frac{\delta L}{\delta \phi} = 0. \tag{8}$$

Легко убедиться в том, что уравнения (8) являются вариационными лишь при выполнении условий: $M_{12} = M_{21}$ и $m_1 = m_2$, при этом лагранжиан L', приводящий к (8), равен

$$L' = -\frac{M_{11}}{2}((\partial_\mu \varphi)^2 + m_1^2 \varphi^2) - \frac{M_{22}}{2}((\partial_\mu \phi)^2 + m_1^2 \phi^2) - M_{12}(\partial_\mu \varphi \partial_\mu \phi + m_1^2 \varphi \phi).$$

(Заметим, что $L' \neq L$.) Если же $m_1 \neq m_2$, всякое линейное преобразование, осуществляемое с помощью постоянной недиагональной матрицы M, приводит к нарушению экстремальности исходных уравнений. Аналогично можно убедиться, что при линейном преобразовании (6) полей φ и ϕ

$$\varphi = N_{11}\varphi' + N_{12}\phi', \qquad \phi = N_{21}\varphi' + N_{22}\phi'$$

выводимость уравнений (7) из вариационного принципа сохраняется лишь в случае одновременного выполнения: $N_{12} = N_{21}$, $m_1 = m_2$.

Заметим также, что экстремальный характер уравнений поля Q_A, взаимодействующего с некоторым внешним полем (например, уравнения для поля смещений в акустике при наличии внешнего гравитационного поля), нарушается при их умножении на произвольную (не равную нулю) функцию, зависящую от внешнего поля.

Будем рассматривать одновременно преобразование (4) полевых уравнений и преобразование (5) (или (6)) полей. Выясним, при каких условиях преобразованные уравнения (5) являются вариационными уравнениями для полей Q'_A, т.е.

$$M_{AB}\frac{\delta L}{\delta Q_B} = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta Q'_A} \tag{9}$$

и найдем связь между лагранжианами L и $\mathscr{L}$. В случае постоянных матриц M, как легко показать, соотношение (9) будет выполняться, если $M_{AB} = N_{BA}$, причем $\mathscr{L}(Q'_A, Q'_{A,\mu}) = L(Q_A, Q_{A,\mu})$ (см. ниже формулу (18)). Если матрица M есть функция полей Q_A, выполнение (9) зависит от интегрируемости системы дифференциальных уравнений

$$M_{AB} = \frac{\partial Q_B}{\partial Q'_A}. \tag{10}$$

Для интегрируемости системы (10) необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial Q_D} M_{CD} = \frac{\partial M}{\partial Q_D} M_{AD}. \tag{11}$$

В случае выполнения (11), находя решение системы (10) $Q_A = Q_A(Q')$, определяем лагранжиан $\mathscr{L}(Q'_A, \partial_\mu Q'_A) = L(Q_A(Q'), \partial_\mu Q_A(Q'))$.

3. Преобразования полей с производными и законы сохранения

Наряду с преобразованиями (5), в релятивистской теории поля приходится сталкиваться с более общими преобразованиями, содержащими производные от полей. Будем рассматривать для системы взаимодействующих полей $\{q_i, Q_A\}$ с заданным лагранжианом $L = L(q_i, q_{i,\mu}, q_{i,\mu,\nu}, Q_A, Q_{A,\mu})$ преобразования вида

$$Q_A \to u_a = u_a(Q_A, q_i, q_{i,\mu}), \tag{12}$$

в которых поля q_i и их производные $q_{i,\mu}$ выступают в качестве параметров преобразования. Преобразование (12) предполагается обратимым, т.е.

$$Q_A = Q_A(u_a, q_i, q_{i,\mu}), \tag{12'}$$

причем на поля $\{q_i, Q_A\}$, равно как и на поля $\{q_i, u_a\}$ до варьирования никаких связей не накладывается. Требуя неизменность действия системы при преобразовании (12), лагранжиан системы полей $\{q_i, u_a\}$ запишем в виде $\mathscr{L} = \mathscr{L}(q_i, q_{i,\mu}, q_{i,\mu,\nu}, u_a, u_{a,\mu})$ $(\mathscr{L} = L)$. Исследуем вопрос о поведении основных вариационных соотношений теории поля при преобразовании (12).

а) Преобразование эйлерианов полей

Для определения связи между эйлерианами исходных полей $\{q_i, Q_A\}$ и преобразованных полей $\{q_i, u_a\}$, получим соотношения между производными от лагранжианов L и $\mathscr{L}$. Используя формулу $\dfrac{\partial Q_{A,\varrho}}{\partial q_i} = \partial_\varrho \dfrac{\partial Q_A}{\partial q_i}$, находим

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial Q_{A,\varrho}}\partial_\varrho\left(\frac{\partial Q_A}{\partial q_i}\right). \tag{13}$$

В силу $\dfrac{\partial Q_{A,\varrho}}{\partial q_{i,\mu}} = \partial_\varrho\left(\dfrac{\partial Q_A}{\partial q_{i,\mu}}\right) + \dfrac{\partial Q_A}{\partial q_i}\delta^\mu_\varrho$ имеем

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{i,\mu}} = \frac{\partial L}{\partial q_{i,\mu}} + \frac{\partial L}{\partial Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial q_{i,\mu}} + \frac{\partial L}{\partial Q_{A,\varrho}}\left[\partial_\varrho\left(\frac{\partial Q_A}{\partial q_{i,\mu}}\right) + \frac{\partial Q_A}{\partial q_i}\delta^\mu_\varrho\right]. \tag{14}$$

Кроме того, легко показать, что

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{i,\mu,\nu}} = \frac{\partial L}{\partial q_{i,\mu,\nu}} + \frac{\partial L}{\partial Q_{A,(\mu}}\frac{\partial Q_A}{\partial(\partial_{\nu)} q_i)}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{a,\mu}} = \frac{\partial L}{\partial Q_{A,\mu}}\frac{\partial Q_A}{\partial u_a}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_a} = \frac{\partial L}{\partial Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial u_a} + \frac{\partial L}{\partial Q_{A,\mu}}\partial_\mu\left(\frac{\partial Q_A}{\partial u_a}\right). \tag{17}$$

Используя формулы (13)—(17), находим искомые соотношения между эйлерианами

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta u_a} = \frac{\delta L}{\delta Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial u_a}, \tag{18}$$

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta q_i} = \frac{\delta L}{\delta q_i} + \frac{\delta L}{\delta Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial q_i} - \partial_\nu\left(\frac{\delta L}{\delta Q_A}\frac{\partial Q_A}{\partial q_{i,\nu}}\right). \tag{19}$$

Учитывая обратимый характер рассматриваемых преобразований (12), легко получить подобные (18) и (19) выражения для эйлерианов $\dfrac{\delta L}{\delta Q_A}$ и $\dfrac{\delta L}{\delta q_i}$ через эйлерианы $\dfrac{\delta \mathscr{L}}{\delta u_a}$ и $\dfrac{\delta \mathscr{L}}{\delta q_i}$. С этой целью можно исходить из (18) и (19) и использовать следующие формулы[2]

$$\frac{\partial Q_A}{\partial u_a}\frac{\partial u_a}{\partial Q_B} = \delta^B_A, \quad \frac{\partial Q_A}{\partial q_i} = -\frac{\partial Q_A}{\partial u_a}\frac{\partial u_a}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial Q_A}{\partial q_{i,\mu}} = -\frac{\partial Q_A}{\partial u_a}\frac{\partial u_a}{\partial q_{i,\mu}}. \tag{20}$$

б) Преобразование инварианта Нетер

Рассмотрим группу преобразований

$$\delta q_i = y_{i\alpha}\omega_\alpha, \quad \delta Q_A = y_{A\alpha}\omega_\alpha, \tag{21}$$

где ω_α — параметры группы, а $y_{i\alpha}$ и $y_{A\alpha}$ — некоторые известные функции полей q_i и Q_A. Если лагра жиан L инвариантен относительно преобразований (21), имеет

---

[2] Во избежание недоразумений, отметим, что производные от полей Q_A и u_a по полям q_i и производным $q_{i,\mu}$ определяются в соответствии с преобразованиями (12) (или (12′)); это не противоречит исходному допущению о независимости полей $\{q_i, Q_A\}$, а также $\{q_i, u_a\}$.

место закон сохранения $\partial_\mu \theta^\mu{}_\alpha = 0$, где инвариант Нетер

$$\theta^\mu{}_\alpha = \left[\frac{\partial L}{\partial q_{i,\mu}} - \partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial q_{i,\mu,\nu}}\right)\right] y_{i\alpha} + \frac{\partial L}{\partial q_{i,\mu,\nu}} y_{i\alpha,\nu} + \frac{\partial L}{\partial Q_{A,\mu}} y_{A\alpha}. \tag{22}$$

Переходя к переменным $\{q_i, u_a\}$, легко получить соответствующий инвариант Нетер

$$\vartheta^\mu{}_\alpha = \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{i,\mu}} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{i,\mu,\nu}}\right)\right] y_{i\alpha} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{i,\mu,\nu}} y_{i\alpha,\nu} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{a,\mu}} y_{a\alpha}, \tag{23}$$

где

$$y_{a\alpha} = \frac{\partial u_a}{\partial Q_A} y_{A\alpha} + \frac{\partial u_a}{\partial q_i} y_{i\alpha} + \frac{\partial u_a}{\partial q_{i,\mu}} y_{i\alpha,\mu}.$$

Используя формулы (14)—(16), легко найти связь между $\theta^\mu{}_\alpha$ и $\vartheta^\mu{}_\alpha$:

$$\vartheta^\mu{}_\alpha = \theta^\mu{}_\alpha + \partial_\varrho \left[\frac{\partial L}{\partial Q_{A,[\varrho}} \frac{\partial Q_A}{\partial(\partial_{\mu]} q_i)} y_{i\alpha}\right] + \frac{\delta L}{\delta Q_A} \frac{\partial Q_A}{\partial q_{i,\mu}} y_{i\alpha}. \tag{24}$$

Из (24) видно, что в силу уравнений поля $\dfrac{\delta L}{\delta Q_A} = 0$ инварианты Нетер $\theta^\mu{}_\alpha$ и $\vartheta^\mu{}_\alpha$ отличаются друг от друга на сохраняющуюся величину.

Если лагранжиан L инвариантен относительно локальной группы преобразований (19) с $\partial_\mu \omega_\alpha \neq 0$, то из „сильных“ тождеств

$$\theta^\mu{}_\alpha + \partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial q_{i,\mu,\nu}} y_{i\alpha}\right) = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_{i,\mu,\nu}} y_{i\alpha} = 0$$

вытекает обращение в нуль инварианта Нетер $\theta^\mu{}_\alpha = 0$. В этом случае в силу (24) для $\vartheta^\mu{}_\alpha$ получаем выражение в виде суперпотенциала

$$\vartheta^\mu{}_\alpha = \partial_\varrho \left[\frac{\partial L}{\partial Q_{A,[\varrho}} \frac{\partial Q_A}{\partial(\partial_{\mu]} q_i)} y_{i\alpha}\right]. \tag{25}$$

Равноценное (25) выражение $\vartheta^\mu{}_\alpha$ можно получить на основе вариационных тождеств для лагранжиана $\mathscr{L}$ при использовании формулы

$$\delta u_a = y_{a\alpha}\omega_\alpha + \frac{\partial u_a}{\partial q_{i,\mu}} y_{i\alpha}\omega_{\alpha,\mu}. \tag{26}$$

На самом деле, в силу „слабого“ тождества

$$\vartheta^\mu{}_\alpha + \partial_\nu \left[\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{i,\mu,\nu}} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{a,\nu}} \frac{\partial u_a}{\partial q_{i,\mu}}\right) y_{i\alpha}\right] = 0$$

и „сильного“ тождества

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_{i,\mu,\nu}} y_{i\alpha} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{a,\mu}} \frac{\partial u_a}{\partial q_{i,\nu}} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{a,\nu}} \frac{\partial u_a}{\partial q_{i,\mu}}\right) y_{i\alpha} = 0 \tag{27}$$

имеет место

$$\vartheta^{\mu}{}_{\alpha} = -\partial_{\varrho}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_{a,[\varrho}}\,\frac{\partial u_a}{\partial(\partial_{\mu]}q_i)}\,y_{i\alpha}\right]. \tag{28}$$

Эквивалентность выражений (25) и (28) очевидна благодаря формулам (16) и (20). Различие в поведении инвариантов Нетер при рассмотрении локальных преобразований (21), (26), при использовании в качестве полевых переменных $\{q_i, Q_A\}$ и $\{q_i, u_a\}$ связано с тем обстоятельством, что вариации δq_i и δQ_A не зависят от производных $\partial_\mu\omega_\alpha$ при наличии такой зависимости у вариации δu_a.

в) Преобразование канонического квазитензора энергии-импульса и спинового момента

Из условия ковариантности теории относительно группы общих координатных преобразований

$$\underset{\mathrm{L}}{\delta} L-(L\xi^{\nu})_{,\nu} \equiv 0, \tag{29}$$

где $\underset{\mathrm{L}}{\delta}$ — дифференциал Ли, порожденный инфинитезимальным преобразованием $x^\mu \to x^\mu+\xi^\mu$,

$$\underset{\mathrm{L}}{\delta} q_i = q_{i,\nu}\xi^{\nu}-X_{i\nu}{}^{\mu}\xi^{\nu}{}_{,\mu}, \qquad \underset{\mathrm{L}}{\delta} Q_A = Q_{A,\nu}\xi^{\nu}-X_{A\nu}{}^{\mu}\xi^{\nu}{}_{,\mu},$$

а вид $X_{i\nu}{}^{\mu}$ и $X_{A\nu}{}^{\mu}$ зависит от тензорной размерности рассматриваемых полей, обычным путем можно ввести канонический квазитензор энергии-импульса

$$t^{\lambda}{}_{\nu} = \left[\frac{\partial L}{\partial q_{i,\lambda}} - \partial_{\varrho}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{i,\lambda,\varrho}}\right)\right] q_{i,\nu} + \frac{\partial L}{\partial q_{i,\lambda,\varrho}}\, q_{i,\nu,\varrho} + \frac{\partial L}{\partial Q_{A,\lambda}}\, Q_{A,\nu} - L\delta^{\lambda}_{\nu} \tag{30}$$

и спиновый момент

$$S^{\lambda\mu}{}_{\nu} = -\left[\frac{\partial L}{\partial q_{i,\lambda}} - \partial_{\varrho}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{i,\lambda,\varrho}}\right)\right] X_{i\nu}{}^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial q_{i,\lambda,\mu}}\, q_{i,\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_{i,\lambda,\varrho}}\, X_{i\nu}{}^{\mu}{}_{,\varrho} - \frac{\partial L}{\partial Q_{A,\lambda}}\, X_{A\nu}{}^{\mu}. \tag{31}$$

В силу (29) и полевых уравнений $\dfrac{\delta L}{\delta Q_A} = 0$, $\dfrac{\delta L}{\delta q_i} = 0$ имеет место

$$\partial_\lambda t^{\lambda}{}_{\mu} = 0, \qquad t^{\mu}{}_{\nu} + \partial_\lambda S^{\lambda\mu}{}_{\nu} = 0. \tag{32а,б}$$

При использовании лагранжиана $\mathscr{L}$ аналогичным образом могут быть введены канонический квазитензор энергии-импульса $\tau^{\lambda}{}_{\nu}$ и спиновый момент $\sigma^{\lambda\mu}{}_{\nu}$, получаемые из $t^{\lambda}{}_{\nu}$ и $S^{\lambda\mu}{}_{\nu}$ путем замены $L \to \mathscr{L}$, $Q_A \to u_a$, $X_{A\nu}{}^{\mu} \to X_{a\nu}{}^{\mu}$, где

$$X_{a\nu}{}^{\mu} = \frac{\partial u_a}{\partial Q_A}\, X_{A\nu}{}^{\mu} + \frac{\partial u_a}{\partial q_i}\, X_{i\nu}{}^{\mu} + \frac{\partial u_a}{\partial q_{i,\varrho}}\, X_{i\nu}{}^{\mu}{}_{,\varrho} - \frac{\partial u_a}{\partial q_{i,\mu}}\, q_{i,\nu}.$$

Используя формулы (14)—(16), легко показать, что

$$\tau^{\mu}{}_{\nu} = t^{\mu}{}_{\nu} + \partial_{\varrho}\left[\frac{\partial L}{\partial Q_{A,[\varrho}}\,\frac{\partial Q_A}{\partial(\partial_{\mu]}q_i)}\,q_{i,\nu}\right] + \frac{\delta L}{\delta Q_A}\,\frac{\partial Q_A}{\partial q_{i,\mu}}\,q_{i,\nu}, \tag{33}$$

$$\sigma^{\lambda\mu}{}_{\nu} = S^{\lambda\mu}{}_{\nu} + \partial_{\varrho}\left[\frac{\partial L}{\partial Q_{A,[\lambda}}\,\frac{\partial Q_A}{\partial(\partial_{\varrho]}q_i)}\,X_{i\nu}{}^{\mu}\right] - \frac{\partial L}{\partial Q_{A,[\lambda}}\,\frac{\partial Q_A}{\partial(\partial_{\mu]}q_i)}\,q_{i,\nu} - \frac{\delta L}{\delta Q_A}\,\frac{\partial Q_A}{\partial q_{i,\lambda}}\,X_{i\nu}{}^{\mu}. \tag{34}$$

Подобно (32) имеет место

$$\partial_{\lambda}\tau^{\lambda}{}_{\nu} = 0, \qquad \tau^{\mu}{}_{\nu} + \partial_{\lambda}\sigma^{\lambda\mu}{}_{\nu} = 0. \tag{35а,б}$$

Соотношения (32б) и (35б) приводят к сохранению полных моментов импульса, определяемых в виде суммы соответствующих орбитальных и спиновых моментов:

$$\partial_{\lambda}(t^{\lambda}{}_{\nu}x^{\mu} - t^{\lambda}{}_{\mu}x^{\nu} + S^{\lambda\mu}{}_{\nu} - S^{\lambda\nu}{}_{\mu}) = 0, \tag{36}$$

$$\partial_{\lambda}(\tau^{\lambda}{}_{\nu}x^{\mu} - \tau^{\lambda}{}_{\mu}x^{\nu} + \sigma^{\lambda\mu}{}_{\nu} - \sigma^{\lambda\nu}{}_{\mu}) = 0. \tag{37}$$

4. Преобразования полей с производными и теория гравитации в пространстве с кривизной и кручением

Применим полученные в п. 3 соотношения к теории гравитации в пространстве с кривизной и кручением. В качестве калибровочных переменных поля тяготения при этом выступают коэффициенты Ламэ $h^{i}{}_{\mu}$ и коэффициенты вращения Риччи $A^{ik}{}_{\mu} = -A^{ki}{}_{\mu}$.[3] В то же время вместо $A^{ik}{}_{\mu}$ можно использовать тензор кручения $C^{\mu}{}_{\nu\lambda} = -C^{\mu}{}_{\lambda\nu}$. Преобразование $A^{ik}{}_{\mu} \to C^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ имеет следующий вид:

$$C^{\mu}{}_{\nu\lambda} = h_k{}^{\mu}(\partial_{[\lambda}h^{k}{}_{\nu]} - h_{n[\nu}A^{kn}{}_{\lambda]}). \tag{38}$$

Обратное (38) преобразование:

$$A^{ij}{}_{\lambda} = h^{j\nu}\partial_{[\lambda}h^{i}{}_{\nu]} + h^{i\mu}\partial_{[\mu}h^{j}{}_{\lambda]} - h_{k\lambda}h^{i\mu}h^{j\nu}\partial_{[\nu}h^{k}{}_{\mu]} - h^{i}{}_{\mu}h^{j\nu}C^{\mu}{}_{\nu\lambda} - h^{i\mu}h^{j}{}_{\nu}C^{\nu}{}_{\lambda\mu}$$
$$+ h^{i\mu}h^{j\nu}g_{\lambda\alpha}C^{\alpha}{}_{\mu\nu}. \tag{38}$$

Преобразования (38) и (38′) такого же типа, что и рассмотренные в п. 3 преобразования с производными, в качестве параметров в (38) и (38′) выступают коэффициенты Ламэ $h^{i}{}_{\mu}$ и их производные. (Коэффициенты $h_i{}^{\mu}$ определяются из условия

---

[3] Метод варьирования, когда в качестве варьируемых переменных используются $h^{i}{}_{\mu}$ (или метрика $g_{\mu\nu}$) и связность (в данном случае связность в неголономной системе координат $A^{ik}{}_{\mu}$), в литературе зачастую называют методом Палатини со ссылкой на работу [3]. Заметим, что в [3] подобный метод не рассматривался. Независимое варьирование по $h^{i}{}_{\mu}$ (или $g_{\mu\nu}$) и связности в случае произвольного лагранжиана возможно при наличии их полной независимости. Если связность задается не независимо от метрики, это необходимо учитывать при варьировании либо за счет введения неопределенных множителей Лагранжа (см. например, [4]), либо за счет выбора соответствующего лагранжиана [2]. В рассматриваемом случае метрический характер связности обеспечивается за счет косой симметрии $A^{ik}{}_{\mu}$.

$h_i{}^\mu h^k{}_\mu = \delta^k_i, h_i{}^\mu h^i{}_\nu = \delta^\mu_\nu$). Отождествляя поле Q_A с тензором кручения $C^\mu{}_{\nu\lambda}$, поле u_a — с $A^{ik}{}_\mu$, а поле q_i — с $h^i{}_\mu$ и другими физическими (тензорными и спинорными) полями ψ_A, запишем лагранжиан системы в следующих двух видах[4]:

$$L = L(h^i{}_\mu, h^i{}_{\mu,\nu}, h^i{}_{\mu,\nu,\lambda}, C^\mu{}_{\nu\lambda}, C^\mu{}_{\nu\lambda,\alpha}, \psi_A, \psi_{A,\mu})$$

и

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(h^i{}_\mu, h^i{}_{\mu,\nu}, h^i{}_{\mu,\nu,\lambda}, A^{ik}{}_\mu, A^{ik}{}_{\mu,\nu}, \psi_A, \psi_{A,\mu}).$$

Заметим, что соответствующая теория ковариантна относительно общих координатных преобразований, а также относительно группы локальных тетрадных лоренцевых преобразований.

Найдем связанное с (38) преобразование инварианта Нетер, соответствующего группе внутренней симметрии (21). Представляя вариацию поля $h^i{}_\mu$ в виде $\delta h^i{}_\mu = y^i{}_{\mu\alpha}\omega_\alpha$ и используя формулу $\dfrac{\partial C^\mu{}_{\nu\lambda}}{\partial h^k{}_{\varrho\sigma}} = h_k{}^\mu \delta^\varrho_{[\nu}\delta^\sigma_{\lambda]}$, в соответствии с (24) получаем

$$\vartheta^\mu{}_\alpha = \theta^\mu{}_\alpha + \partial_\varrho\left(\frac{\partial L}{\partial C^\lambda{}_{\nu[\mu,\varrho]}} h_k{}^\lambda y^k{}_{\nu\alpha}\right). \tag{39}$$

В случае группы тетрадных лоренцевых преобразований инвариант Нетер $\theta^\mu{}_\alpha$ тождественно равен нулю [5]. Как отмечалось в п. 3, это является следствием отсутствия зависимости вариаций полей $h^i{}_\mu$, $C^\mu{}_{\nu\lambda}$, ψ_A от производных параметров $\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$ локальных тетрадных лоренцевых преобразований. Используя формулу $\delta h^k{}_\mu = \varepsilon^{ki} h_{\mu i}$, откуда $y^k{}_{\mu[mn]} = \delta^k_{[m} h_{n]\mu}$, получаем для соответствующего инварианта Нетер (39) — тензора тетрадного спинового момента $\dfrac{1}{\sqrt{-g}}\mathscr{J}_{[ik]}{}^\mu$ — следующее выражение

$$\mathscr{J}_{[ik]}{}^\mu = \partial_\varrho\left(\frac{\partial L}{\partial C^\lambda{}_{\nu[\mu,\varrho]}} h_{[i}{}^\lambda h_{k]\nu}\right).$$

В соответствии с (28), с учетом формулы

$$\frac{\partial A^{ij}{}_\lambda}{\partial h^k{}_{\varrho,\sigma}} = \delta^i_k h^{j[\varrho}\delta^{\sigma]}_\lambda - \delta^j_k h^{i[\varrho}\delta^{\sigma]}_\lambda - h_{k\lambda} h^{i[\varrho} h^{|j|\sigma]},$$

получаем

$$\mathscr{J}_{[ik]}{}^\mu = \partial_\varrho\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{ik}{}_{[\varrho,\mu]}}\right). \tag{40}$$

Используя „сильное" тождество (27), имеющее в случае группы тетрадных лоренцевых преобразований вид

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial h^l{}_{\lambda,\nu,\mu}} \delta^l_{[i} h_{k]\lambda} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{ik}{}_{(\nu,\mu)}} = 0,$$

---

[4] При выборе гравитационного лагранжиана в виде квадратичной функции относительно тензора кривизны и тензора кручения лагранжиан $\mathscr{L}$ не зависит от вторых производных $h^i{}_{\mu,\nu,\lambda}$.

а также принимая во внимание уравнения $\dfrac{\delta L}{\delta A^{ik}{}_{\mu}} = 0$, преобразуем (40) к виду

$$\mathscr{I}_{[ik]}{}^{\mu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{ik}{}_{\mu}} - \partial_{\nu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial h^{l}{}_{\lambda,\nu,\mu}}\, \delta^{l}_{[i} h_{k]\lambda}\right). \tag{41}$$

При отсутствии зависимости лагранжиана $\mathscr{L}$ от вторых производных $h^{l}{}_{\lambda,\nu,\mu}$, формула (41) дает известное выражение тетрадного спинового момента $\mathscr{I}_{[ik]}{}^{\mu} = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{ik}{}_{\mu}}$.

Используя (33) и (34), найдем преобразование канонического квазитензора энергии-импульса и спинового момента при преобразовании (38):

$$\tau^{\mu}{}_{\nu} = t^{\mu}{}_{\nu} + \partial_{\varrho}\left(\frac{\partial L}{\partial C^{\lambda}{}_{\sigma[\mu,\varrho]}}\, h_{k}{}^{\lambda} h^{k}{}_{\sigma,\nu}\right). \tag{42}$$

Представляя дифференциал Ли поля $h^{i}{}_{\mu}$ в виде $\underset{L}{\delta} h^{i}{}_{\mu} = h^{i}{}_{\mu,\lambda}\, \xi^{\lambda} - X^{i}{}_{\nu,\lambda}{}^{\mu}\, \xi^{\lambda}{}_{,\mu}$, где $X^{i}{}_{\nu\lambda}{}^{\mu} = -h^{i}{}_{\lambda}\, \delta^{\mu}_{\nu}$, имеем

$$\sigma^{\lambda\mu}{}_{\nu} = S^{\lambda\mu}{}_{\nu} + \partial_{\varrho}\left(\frac{\partial L}{\partial C^{\nu}{}_{\mu[\lambda,\varrho]}}\right) + \frac{\partial L}{\partial C^{\sigma}{}_{\varrho[\lambda,\mu]}}\, h_{k}{}^{\sigma} h^{k}{}_{\varrho,\nu}. \tag{43}$$

В соотношениях (42) и (43) легко перейти от лагранжиана L к лагранжиану $\mathscr{L}$, используя формулу (16), согласно которой

$$\frac{\partial L}{\partial C^{\sigma}{}_{\varrho\nu,\lambda}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{ij}{}_{\mu,\lambda}}\, \frac{\partial A^{ij}{}_{\mu}}{\partial C^{\sigma}{}_{\varrho\nu}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^{ij}{}_{\mu,\lambda}}\, (-h^{i}{}_{\sigma} h^{j\varrho} \delta^{\nu}_{\mu} - h^{i\nu} h^{j}{}_{\sigma} \delta^{\varrho}_{\mu} + h^{i\varrho} h^{j\nu} g_{\sigma\mu}).$$

Отметим, что в соответствии с вышеизложенным в теории гравитации в пространстве с кривизной и кручением имеют место три закона сохранения момента импульса: наряду с тензорным законом сохранения тетрадного спинового момента $\nabla_{\mu}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-g}}\mathscr{I}_{[ik]}{}^{\mu}\right) = 0$ (∇_{μ} — символ ковариантной римановой производной), выполняются два нетензорных закона сохранения момента импульса (36) и (37). Вклад в спиновые моменты $\mathscr{I}_{[ik]}{}^{\mu}$, $S^{\mu\nu}{}_{\lambda}$, $\sigma^{\mu\nu}{}_{\lambda}$ существенно зависит от способа задания связи гравитации с полями ψ_{A}, а именно, от того, какая связность (полная, с учетом кручения, или риманова) используется при определении ковариантных производных полей ψ_{A}. В римановом же пространстве имеет место лишь один закон сохранения полного момента импульса — суммы орбитального и спинового момента всех полей. Формально данное различие между теорией тяготения в римановом пространстве и в пространстве с кручением связано с тем, что варьирование и операция предельного перехода $C^{\nu}{}_{\lambda\mu} \to 0$ не коммутативны.

Таким образом, на рассмотренном примере теории гравитации в пространстве с кривизной и кручением показано, что исследование допустимых преобразований полей позволяет вскрыть некоторые существенные свойства, присущие важнейшим динамическим характеристикам изучаемых систем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. И. Федоров, *ДАН СССР* **179**, 802 (1968).
[2] Ф. И. Федоров, А. А. Кириллов, *Acta Phys. Pol.* **B7**, 161 (1976).
[3] A. Palatini, *Rend. Circ. Math. Palermo* **43**, 203 (1919).
[4] W. Kopczyński, *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astron. Phys.* **23**, 467 (1975).
[5] А. В. Минкевич, В. И. Кудин, *Acta Phys. Pol.* **B5**, 335 (1974).