Vol. B12 (1981) ACTA PHYSICA POLONICA No 6

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОБЬЕКТЫ

GEODESIC STRUCTURE. EXPONENTIAL MAPPING AND FUNDAMENTAL OBJECTS

А. Н. Александров

Госстандарт СССР, Москва*

(Поступила в редакцию 23 октября 1980 г.)

Relations between the geodesic structure, space curvature and such fundamental geometrical objects as metric, connection, Killing vectors, etc. are considered. The consideration is based on exponential mapping and studying of Jacobi's fields of the first and second orders for which the general solutions are found. The covariant expansions of the fundamental objects in powers of the normal coordinates are constructed in an explicit form, the coefficients being expressed through the curvature tensor and its successive covariant derivatives. The spaces comparison problem is discussed, and the local observables are indicated which are in one-to-one correspondence with the geometry of space provided with to a marked frame.

PACS numbers: 04.20.Cv

1. *Введение*

В настоящей статье, непосредственно примыкающей к работе [1], мы продолжаем изучение геодезической структуры римановых пространств и пространств аффинной связности без кручения. Геодезическая структура играет весьма видную роль в многочисленных приложениях дифференциальной геометрии к таким разделам физики как общая теория относительности (ОТО), аналитическая механика, теория поля и т.п. Как правило, именно геодезические и их взаимное поведение являются непосредственно наблюдаемыми, и все геометрические характеристики должны выводиться из их свойств. Анализ геодезической структуры служит основой для измерения локальных параметров гравитационных полей [2], а также для исследования глобальной структуры пространства-времени (ПВ) [3].

Для математического описания геодезической структуры, т.е. всей совокупности геодезических данного пространства, мы используем экспоненциальное

* Address: Госстандарт СССР, Ленинский проспект 9, 117049 Москва, СССР.

отображение, позволяющее явно указать каждую геодезическую, которая определена своими начальными условиями [4]. В работе [1] рассмотрена взаимная динамика геодезических, которые не предполагаются инфинитизимально близкими. Получено уравнение относительного движения пробных (геодезических) тел, коэффициенты которого выражены через первый и второй дифференциалы экспоненциального отображения. Первым приближением к этому уравнению служит известное уравнение геодезической девиации [2, 5, 6], вторым — уравнение, полученное Бажаньским [7]. В настоящей статье найдены общие решения этих уравнений, т.е. поля Якоби первого и второго порядков, выраженные через дифференциалы экспоненциального отображения, а также их связь с фундаментальными геометрическими характеристиками: связностью, метрикой, полями Киллинга и др.

Геодезическая структура на многообразии является частным случаем пульверизации или структуры путей [8]. Соотношения, связывающие фундаментальные объекты с дифференциалами экспоненциального отображения можно интерпретировать как условия геодезичности структуры путей (с иных позиций этот вопрос рассмотрен в [9]). Фактически рассматриваемые уравнения представляют собой некоторую переформулировку фундаментальных уравнений Картана [10, 11].

Локальное поведение геодезической структуры в окрестности произвольной точки $\bar{p}$ определяется, как известно, значением тензора кривизны и его последовательных ковариантных производных в $\bar{p}$. Эти величины не являются, однако, независимыми и не могут принимать произвольные значения, т.к. они связаны тождествами Риччи, Бианки и их следствиями. Анализ уравнений для фундаментальных объектов позволил указать независимые параметры, однозначно определяющие как риманову геометрию, так и геометрию симметрической аффинной связности. Интегрирование этих уравнений с помощью ковариантных рядов [12] является наиболее простым алгоритмом для отыскания разложений фундаментальных величин в нормальных координатах. Подобные разложения находят широкие приложения не только в макроскопической релятивистской физике (см., например, [13, 14]), но и в квантовой теории поля [15, 16].

2. *Проблема сравнения пространств*

2.1. Задание геометрии ПВ с помощью геодезической структуры, описываемой на языке наблюдаемых величин, значительно упрощает интерпретацию физической теории. Хорошо известно, что проблема физической интерпретации в ОТО принадлежит к числу наиболее фундаментальных. Она тесно связана с измерениями и включает вопросы выбора и интерпретации координат, теорию систем отсчета и наблюдаемых, задачу разделения координатных эффектов и эффектов, обусловленных кривизной ПВ, и т.п.

Многие особенности проблемы интерпретации в ОТО наиболее выпукло проявляются при сравнении пространств или при рассмотрении их в какой-либо совокупности. Действительно, для такого рассмотрения необходимо установить инвариантный критерий эквивалентности пространств, а также определить параметры, отличающие одно пространство от другого. В настоящее время методы сравнительного анализа пространств заняли важное место в римановой геометрии [4] и широко используются в ОТО. Здесь можно выделить два основных направления. Первое состоит в том, что уравнения Эйнштейна рассматриваются как уравнения эволюции 3-геометрии, т.е. сравниваются трехмерные сечения ПВ. Интенсивное развитие этого подхода связано с именами Уилера, Де-Витта, Арновитта, Дезера, Мизнера, Фишера, Марсдена и др. (см., например, [2, 17—19]). Для второго направления характерно сравнение четырехмерных ПВ. К нему можно отнести работы Петрова по классификации и моделированию полей тяготения [20, 21]; работы Бранса [22], посвященные описанию всех вакуумных полей третьего типа; биметрический формализм (см., например, [23, 24]) и т.п. К этому же направлению принадлежат работы Героча [25, 26], Хокинга [27] и др., в которых сравниваются топологические свойства ПВ. Проблема сравнения ПВ явно или неявно присутствует при изучении семейств точных решений уравнений Эйнштейна и при построении теории возмущений.

При сравнении метрик известная трудность (см., например, [18, 22, 28]) состоит в том, что одна и та же метрическая форма в разных системах координат принимает совершенно различный вид. Иными словами, основное препятствие содержится в конструктивном определении эквивалентности пространств. Проблема эквивалентности, как известно, является одной из классических проблем дифференциальной геометрии [29]. В настоящее время под локальной эквивалентностью двух пространств с линейной (римановой) связностью, определенных на многообразиях M и M', понимают локальный изоморфизм связностей на главных расслоениях $L(M)$ и $L(M')$ линейных реперов (соответственно на главных расслоениях $O(M)$ и $O(M')$ ортонормированных реперов) [30, 31]. Заметим однако, что реперное расслоение можно рассматривать как главное лишь при условии, что в каждом слое выбран некоторый опорный репер (т.е. выбрана система отсчета). Задание поля репера вызвано необходимостью зафиксировать действие единицы структурной группы, т.к. иначе невозможно говорить об изоморфизме главных расслоений. Во многих случаях, например при классической формулировке проблемы эквивалентности, в качестве отмеченного поля репера выступает натуральный репер заданных координат. Однако, выбор такого поля в качестве системы отсчета лишен непосредственного физического смысла и поэтому его совершенно недостаточно для сравнения неэквивалентных пространств.

Введение связности позволяет построить систему отсчета с помощью параллельного переноса, выбрав один единственный опорный репер, скажем, $\boldsymbol{h}_i \in \pi^{-1}(\bar{p})$. С точки зрения физики, выбор такого репера соответствует выбору эталона измерений. Таким образом, эквивалентность и сравнение пространств наиболее естественно определять в категории многообразий с отмеченным репером. В качестве морфизмов этой категории в первую очередь нужно рассмотреть диффеоморфизмы, сохраняющие отмеченный репер. Физически это соответствует тому, что эталоны измерений в сравниваемых пространствах предполагаются одними и теми же. Именно такой подход позволил Герочу в работах [25, 26] корректно определить предел последовательности пространств и рассмотреть целый ряд других аспектов проблемы сравнения. Для r-мерных пространств с отмеченным репером $\boldsymbol{h}_i$ будем использовать следующие обозначения: $A_r(\boldsymbol{h}_i)$ — в случае симметрической аффинной связности, $V_r(\boldsymbol{h}_i)$ — в римановом случае.

2.2. Следующий шаг при сравнении пространств состоит в том, чтобы ввести в них „одинаковые" координаты, однозначно определяемые при заданном репере $\boldsymbol{h}_i$. В качестве таковых удобно использовать непосредственно связанные с геодезической структурой нормальные координаты y^i [1].

Координатные условия, определяющие при заданном репере $h_i^{\bar{\varrho}}$ систему нормальных координат с началом в точке $\bar{p}$, в случае римановой геометрии имеют вид (см., например, [20, 29]):

$$l_k^{\bar{a}} = h_k^{\bar{a}}, \tag{1}$$

$$\overset{*}{g}_{ik} y^k = \bar{g}_{ik} y^k. \tag{2}$$

Здесь $\overset{*}{g}_{ik}$ — компоненты метрического тензора в точке p с координатами y^i, $\bar{g}_{ik}$ и $l_k^{\bar{a}}$ — метрика и натуральный репер y-координат в отмеченной точке $\bar{p}$.

В случае пространств аффинной связности вместо (2) берется условие

$$\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} y^j y^k = 0, \tag{3}$$

где $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}$ — коэффициенты связности в точке p. Легко видеть, что для римановой связности соотношение (3) является дифференциальным следствием равенства (2).

Условие (3), очевидно, эквивалентно утверждению, что „прямые" $y^i = c^i t$ ($c^i = \mathrm{const}$, t — аффинный параметр) являются геодезическими. Имея в виду определение экспоненциального отображения, находим, что радиус-вектор точки p относительно $\bar{p}$ равен $y^{\bar{\delta}} = y^i h_i^{\bar{\varrho}}$. Этим устанавливается связь с геодезической структурой. В нормальной окрестности $N_{\bar{p}}$ вектор-функция $y(p)$ определена однозначно [1] и, следовательно, при заданном репере $\boldsymbol{h}_i$ нормальные координаты y^i однозначно определяются указанными условиями. Другими словами, разным наборам функций $\overset{*}{g}_{ik}(y)$ (или $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}(y)$), определенным в некоторой окрестности точки $y^i = 0$, соответствуют разные $V(\boldsymbol{h}_i)$ ($A(\boldsymbol{h}_i)$, соответственно). Обратное, вообще говоря, неверно, т.к. две геометрии, отличающиеся в целом, могут совпадать в некоторой окрестности отмеченной точки.

Назовем пространство аффинной связности (риманово пространство) с отмеченным репером элементарным, если оно накрывается одной нормальной картой с началом координат в отмеченной точке. Ясно, что всякое A_r в окрестности произвольной своей точки эквивалентно некоторому элементарному и может быть получено в целом путем склеивания элементарных пространств. Заметим кроме того, что в классе аналитических односвязных пространств элементарное пространство допускает единственное максимальное расширение [31]. Мы ограничимся рассмотрением пространств класса C^∞ и C^ω. Совокупность элементарных бесконечно дифференцируемых $V_r(\boldsymbol{h}_i)$ (соотв. $A_r(\boldsymbol{h}_i)$) обозначим как $\mathscr{V}_r(\boldsymbol{h}_i)$ (соотв. $\mathscr{A}_r(\boldsymbol{h}_i)$).

Пусть $\mathscr{G}_r$ обозначает совокупность функциональных матриц $||\overset{*}{g}_{ik}(y)||$ порядка r, подчиненных условиям: функции $\overset{*}{g}_{ik} \in C^\infty$ определены в звездной окрестности нуля $\overset{*}{N}_0 \subset \boldsymbol{R}^r$ и удовлетворяют в ней соотношениям (2); в $\overset{*}{N}_0$ матрица $||\overset{*}{g}_{ik}||$ симметрична и невырождена. Обозначим также через $\mathscr{H}_r$ совокупность трехиндексных функциональных наборов $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}(y) \in C^\infty (i, j, k = 1, 2, \ldots, r)$, подчиненных условиям: функции $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}$ определены в звездной окрестности нуля $\overset{*}{N}_0 \subset \boldsymbol{R}^r$, удовлетворяют в ней соотношениям (3) и $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{kj}$.

Теперь из существования и единственности нормальных координат следует

Лемма 1. *Экспоненциальное отображение* $\exp_{\bar p} : \overset{*}{N}_0 \to N_{\bar p}$ *индуцирует биективное отображение множества* $\mathscr{G}_r$ *на* $\mathscr{V}_r(\boldsymbol{h}_i)$, *а также множества* $\mathscr{H}_r$ *на* $\mathscr{A}_r(\boldsymbol{h}_i)$.

Указанная биекция позволяет применять для изучения совокупности пространств с отмеченным репером методы функционального анализа. Следует обратить внимание, что множество $\mathscr{H}_r$ обладает структурой векторного пространства над $\boldsymbol{R}$. Также и множество матриц $||\overset{*}{g}_{ik} - \bar g_{ik}||$ образует векторное пространство $\mathscr{G}'_r$. Несомненно, что пространства $\mathscr{H}_r$ и $\mathscr{G}'_r$ можно превратить в топологические векторные пространства (обсуждение различных топологий на совокупности ПВ можно найти в [26, 27]). В аналитическом случае удобно перейти от функций $\overset{*}{g}_{ik}$ и $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}$ к их росткам в отмеченной точке и в соответствии с установленной биекцией говорить о ростке пространства с отмеченным репером.

Ввиду того, что репер $\boldsymbol{h}_i$ может выбираться произвольно, оказывается целесообразно использовать вместо функций $\overset{*}{g}_{ik}$ и $\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk}$ тензоры $\overset{*}{g}_{\bar\varrho\bar\sigma} = \overset{*}{g}_{ik} h^i_{\bar\varrho} h^k_{\bar\sigma}$ и $\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar\varrho}_{\bar\sigma\bar\tau} = \overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} h^{\bar\varrho}_i h^j_{\bar\sigma} h^k_{\bar\tau}$, которые мы называем нормальными прообразами [1] метрического тензора и объекта связности соответственно. Соотношения (2) и (3) можно переписать в следующей форме:

$$\overset{*}{g}_{\bar\varrho\bar\sigma} y^{\bar\sigma} = g_{\bar\varrho\bar\sigma} y^{\bar\sigma}, \tag{5}$$

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar\varrho}_{\bar\sigma\bar\tau} y^{\bar\sigma} y^{\bar\tau} = 0. \tag{6}$$

Здесь $g_{\bar\varrho\bar\sigma}$ — метрический тензор в точке $\bar p$.

3. *Поля Якоби первого и второго порядков*

3.1. Мы видели, что нормальная окрестность $\overset{*}{N}_0$ и определенное на ней тензорное поле $\overset{*}{g}_{\bar\varrho\bar\sigma}$ (или $\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar\varrho}_{\bar\sigma\bar\tau}$) однозначно описывают геометрию соответствующего элементарного пространства с отмеченным репером. Перейдем теперь к более детальному исследованию геодезической структуры, позволяющему связать эти поля с дифференциалами экспоненциального отображения и другими фундаментальными геометрическими характеристиками.

Прежде всего обсудим общие решения уравнений для первой и второй геодезических девиаций [1]. Мы не будем детально описывать вывод выражений для этих решений, а укажем только их геометрический смысл. В справедливости полученных решений можно убедиться подстановкой в уравнения с использованием известных свойств экспоненциального отображения и его дифференциалов.

Пусть $\Gamma_{\bar{p}}$ — совокупность геодезических, проходящих через точку $\bar{p}$. Для каждой геодезической $\gamma(u^{\bar{\varrho}}, t) \in \Gamma_{\bar{p}}$ рассмотрим следующие два типа якобиевых вариаций.

1. Вариации типа $\delta_a(t, s)$ образованы геодезическими $\gamma(u^{\bar{\varrho}}+a^{\bar{\varrho}}s, t)$ где $a^{\bar{\varrho}} \in E_{\bar{p}}$ — фиксированный вектор.

2. Вариации второго типа $\delta_b(t, s)$ образуются параллельным переносом вектора $u^{\bar{\varrho}}$ вдоль фиксированной геодезической $\gamma(b^{\bar{\varrho}}, s) \in \Gamma_{\bar{p}}$. Обозначая точку $\gamma(b, s)$ как $\tilde{p}$, имеем $\delta_b(t, s) = \gamma(G^{\bar{\sigma}}_{\bar{\varrho}} u^{\bar{\varrho}}, t)$, где $G^{\bar{\sigma}}_{\bar{\varrho}}$ — параллельный перенос из $\bar{p}$ в $\tilde{p}$. Для этих вариаций нам необходимо найти поля Якоби первого и второго порядков как функции радиус-вектора $y^{\bar{\varrho}} = u^{\bar{\varrho}}t$ и параметров.

Далее нам понадобятся некоторые соотношения из первой части работы [1], при ссылке на них мы к номерам соответствующих формул будем добавлять римскую единицу.

Уравнение ($Д_1$.I) для полей Якоби J^{α}_1 имеет вид:

$$\frac{D^2}{dt^2} J^{\alpha}_1 + R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} u^{\delta} J^{\gamma}_1 = 0. \tag{7}$$

Нетрудно показать, что решения этого уравнения, соответствующие рассматриваемым вариациям, можно представить в виде:

$$J^{\alpha}_{1a} = Y^{\alpha}_{\bar{\varrho}} a^{\bar{\varrho}} t, \tag{8}$$

$$J^{\alpha}_{1b} = -Y^{\alpha}_{\bar{\varrho}} y^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}} b^{\bar{\tau}}. \tag{9}$$

Фигурирующие здесь величины определены в [1], они выражаются через производные от радиус-вектора y по координатам точек $\bar{p}$ и p: $y^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}} = y^{\bar{\varrho}}{}_{;\bar{\tau}}$; $Y^{\bar{\varrho}}_{\beta} = y^{\bar{\varrho}}{}_{;\beta}$; $Y^{\alpha}_{\bar{\varrho}} Y^{\bar{\varrho}}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$.

Очевидно, что сумма

$$\boldsymbol{J}_1 = \boldsymbol{J}_{1a} + \boldsymbol{J}_{1b} \tag{10}$$

служит общим решением уравнения (7). В случае римановых пространств аналогичный вид общего решения был установлен Диксоном [13]; отметим также, что решения (8) широко используются в вариационной теории геодезических [4, 11]. Вектор J^{α}_{1b} характеризует сдвиг точки p при инфинитизимальном параллельном переносе вектора $y^{\bar{\varrho}}(p)$, а J^{α}_{1a} описывает движение точки p при линейном преобразовании вектора y. В общем случае эти преобразования происходят изохронно, при этом величину $a^{\bar{\sigma}}t$ следует интерпретировать как двухточечную абсолютную производную $Dy^{\bar{\sigma}}/ds$ [1].

3.2. Более точное описание движения точки p при аффинном преобразовании вектора y будет включать старшие поля Якоби. Соответствующее уравнение ($Д_n$.I) является линейным неоднородным уравнением вида

$$\frac{D^2}{dt^2} J^\alpha_n + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta u^\delta J^\gamma_n = N^\alpha_n,$$

причем правая часть N^α_n зависит от кривизны и полей J_k с $k < n$. Особый интерес представляют частные решения $\mathring{J}_n$ этих уравнений, соответствующие нулевым начальным данным

$$\mathring{J}^\alpha_n|_{t=0} = \frac{D}{dt} \mathring{J}^\alpha_n|_{t=0} = 0.$$

Такие решения назовем специальными. Они не содержат новых произвольных постоянных и обусловлены не формой вариации, а исключительно кривизной пространства.

Можно показать, что для рассматриваемых вариаций специальные поля Якоби второго порядка представляются в виде

$$\mathring{J}^\alpha_{2a} = Y^\alpha_{\bar{\varrho}} \overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{\varrho}}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}} a^{\bar{\sigma}} a^{\bar{\tau}} t^2, \tag{11}$$

$$\mathring{J}^\alpha_{2b} = Y^\alpha_{\bar{\varrho}} [-y^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau};\bar{\sigma}} + 2y^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau};\alpha} Y^\alpha_{\bar{\varkappa}} y^{\bar{\varkappa}}{}_{\bar{\sigma}} - \overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{\varrho}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} y^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\tau}} y^{\bar{\nu}}{}_{\bar{\sigma}}] b^{\bar{\tau}} b^{\bar{\sigma}}. \tag{12}$$

Если в качестве J_1 в уравнение ($Д_2$.I) подставить общее решение (10), то соответствующее специальное поле $\mathring{J}_2$ будет включать в качестве слагаемых $\mathring{J}_{2a}$, $\mathring{J}_{2b}$, а также удвоенную смешанную девиацию $\mathring{J}_{ab}$, которая имеет следующий вид:

$$\mathring{J}^\alpha_{ab} = -Y^\alpha_{\bar{\varrho}} (y^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma};\beta} Y^\beta_{\bar{\tau}} + \overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{\varrho}}_{\bar{\varkappa}\bar{\tau}} y^{\bar{\varkappa}}{}_{\bar{\sigma}}) a^{\bar{\tau}} b^{\bar{\sigma}} t. \tag{13}$$

Предложение 2. *Специальное поле Якоби второго порядка* $\mathring{J}_2$, *соответствующее полю* J_1 *общего вида* (10), *выражается суммой*

$$\mathring{J}^\alpha_2 = \mathring{J}^\alpha_{2a} + 2\mathring{J}^\alpha_{ab} + \mathring{J}^\alpha_{2b}.$$

Теперь нетрудно видеть, что уравнение (6.I) взаимной динамики геодезических можно выразить в форме следующего предложения.

Предложение 3. *Вторая абсолютная производная взаимного радиус-вектора* $y^{\bar{\varrho}}(p)$ *двух точек, движущихся по изохронно параметризованным геодезическим, равна с обратным знаком нормальному прообразу специального вектора Якоби второго порядка*:

$$\frac{D^2}{dt^2} y^{\bar{\varrho}} = -Y^{\bar{\varrho}}_\alpha \mathring{J}^\alpha_2(y^{\bar{\sigma}}). \tag{14}$$

В более общем случае, когда точки $\bar{p}$ и p подвержены действию дополнительных сил, в качестве уравнений движения вместо (2.I) следует взять

$$\frac{Du^{\bar{\sigma}}}{dt} = F^{\bar{\sigma}}, \qquad \frac{Dv^{\alpha}}{dt} = F^{\alpha}.$$

При этом их относительное движение описывается уравнением

$$\frac{D^2 y^{\bar{\varrho}}}{dt^2} = -Y^{\bar{\varrho}}_{\alpha}\mathring{J}^{\alpha}_{2} + y^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}F^{\bar{\sigma}} + Y^{\bar{\varrho}}_{\alpha}F^{\alpha}. \tag{15}$$

Видно, что величина $-\mathring{J}_2$ имеет смысл приливной 4-силы, возникающей в системе при движении в искривленном ПВ.

4. Фундаментальные объекты

4.1. Выше было показано, что нормальный прообраз объекта связности $\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{\varrho}}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}}$ можно выразить через специальное поле Якоби $\mathring{J}_{2a}$. Установим соотнсшения, связывающие поля Якоби с метрическим тензором, векторами Киллинга, другими фундаментальными величинами и кривизной.

Если рассматриваемое пространство является римановым, то для нормального прообраза $\overset{*}{g}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}$ метрического тензора имеем по определению $\overset{*}{g}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} = g_{\alpha\beta}Y^{\alpha}_{\bar{\varrho}}Y^{\beta}_{\bar{\sigma}}$. Поле метрического тензора является параллельным и, следовательно, может быть получено параллельным переносом из отмеченной точки, т.е. $g_{\alpha\beta} = g_{\bar{\tau}\bar{\varkappa}}G^{\bar{\tau}}_{\alpha}G^{\bar{\varkappa}}_{\beta}$. Подставляя в предыдущее соотношение, получаем

$$\overset{*}{g}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} = g_{\bar{\tau}\bar{\varkappa}}S^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\varrho}}S^{\bar{\varkappa}}{}_{\bar{\sigma}}, \tag{16}$$

где

$$S^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\varrho}} = G^{\bar{\tau}}{}_{\alpha}Y^{\alpha}{}_{\bar{\varrho}}. \tag{17}$$

Таким образом, нормальный прообраз метрического тензора выражается квадратично через тензор $S^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\varrho}}$, который, как видно из (17), характеризует отличие $\boldsymbol{Y}$-транслятора от параллельного переноса. Естественно, что этот тензор играет фундаментальную роль и в геометрии аффинной связности. В плоском пространстве $S^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\varrho}} = \delta^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\varrho}}$ [12].

Особые точки матриц, представляющих тензоры $S^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\varrho}}$ и $\overset{*}{g}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}$ совпадают, как легко видеть, с особыми точками отображения $\exp_{\bar{p}}$ и образуют сопряженное множество точки $\bar{p}$ [4, 11].

Произвольному тензорному полю $\boldsymbol{t}$, заданному в $N_{\bar{p}}$, $\boldsymbol{G}$- и $\boldsymbol{Y}$-трансляторы сопоставляют поля $\tilde{\boldsymbol{t}}$ и $\overset{*}{\boldsymbol{t}}$, определенные в $\overset{*}{N}_0$. В [12] было показано, что поле $\tilde{\boldsymbol{t}}$ удобно трактовать как независимый от геометрии ПВ локально наблюдаемый образ поля $\boldsymbol{t}$. В то же время нормальный прообраз $\overset{*}{\boldsymbol{t}}$ служит для описания поля $\boldsymbol{t}$ в хорошо интерпретируемых нормальных координатах. Тензор $S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}$ устанавливает связь между t и $\overset{*}{t}$. Так для векторного поля $\tilde{t}^{\bar{\varrho}} = S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}} \overset{*}{t}{}^{\bar{\sigma}}$, для ковекторного — $\tilde{t}_{\bar{\sigma}} = \overset{*}{t}_{\bar{\varrho}} S^{-1\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}$.

Нетрудно указать дифференциальное уравнение, связывающее тензор $S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}$ с кривизной пространства. Выше было показано, что величина $J^{\alpha}_{1a} = Y^{\alpha}_{\bar{\sigma}} a^{\bar{\sigma}} t$ удовлетворяет уравнению геодезической девиации (7) при произвольном векторе $\boldsymbol{a}$. Сворачивая это уравнение с $G^{\bar{\varrho}}_{\alpha}$ и переходя к обыкновенным производным, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2} \tilde{J}^{\bar{\varrho}}_1 - K^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}} \tilde{J}^{\bar{\tau}}_1 = 0. \tag{18}$$

Здесь

$$K^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}} = \tilde{R}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\tau}} u^{\bar{\mu}} u^{\bar{\nu}},$$

и мы приняли во внимание, что

$$u^{\alpha} = G^{\alpha}{}_{\bar{\varrho}} u^{\bar{\varrho}}. \tag{19}$$

Следовательно, тензор $S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}} t$ является „матричным" решением уравнения (18). При этом, как известно, (см., например, [12]), имеет место начальное условие

$$S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}|_{t=0} = \delta^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}. \tag{20}$$

Уравнение (18) для тензора $S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}$ — это, по сути, фундаментальное уравнение Картана [10].

В дальнейшем вместо тензора $K^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}}$, зависящего как от $\boldsymbol{y}$, так и от $\boldsymbol{u}$, удобно ввести тензор

$$\tilde{r}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}} = K^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}} t^2 = \tilde{R}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\tau}} y^{\bar{\mu}} y^{\bar{\nu}}. \tag{21}$$

Для аналитических пространств, пользуясь ковариантной формой теоремы Тейлора [12], получаем:

$$\tilde{r}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} r^{\bar{\varrho}}_{n\bar{\tau}}, \tag{22}$$

где

$$r^{\bar{\varrho}}_{n\bar{\tau}} = R^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\varkappa}_1\bar{\varkappa}_2\bar{\tau};\bar{\varkappa}_3\ldots\bar{\varkappa}_n} y^{\bar{\varkappa}_1} \ldots y^{\bar{\varkappa}_n}. \tag{23}$$

Для тензора $S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}$ находим:

$$S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}} = \delta^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}} + \sum_{m=2}^{\infty} a(m) r^{\bar{\varrho}}_{m\bar{\sigma}} + \sum_{m_1,m_2=2}^{\infty} a(m_1)a(m_1, m_2) r^{\bar{\varrho}}_{m_2\bar{\nu}} r^{\bar{\nu}}_{m_1\bar{\sigma}}$$

$$+ \sum_{m_1,m_2,m_3=2}^{\infty} a(m_1)a(m_1, m_2)a(m_1, m_2, m_3) r^{\bar{\varrho}}_{m_3\bar{\nu}_1} r^{\bar{\nu}_1}_{m_2\bar{\nu}_2} r^{\bar{\nu}_2}_{m_1\bar{\sigma}} + \ldots \tag{24}$$

где

$$a(m_1, m_2, \dots m_k) = [(m_k-2)!(\sum_{i=1}^{k} m_i+1)(\sum_{j=1}^{k} m_j)]^{-1}. \tag{25}$$

Соотношения (16) и (24) позволяют построить в явном виде разложение тензора $\overset{*}{g}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}$ по степеням радиус-вектора $y = ut$. Это выражение для метрики в нормальных координатах было независимо получено в [32] и несколько иным методом в [33]. Ряд (24), а следовательно, и разложение для метрики принимают особенно простой вид в случае, когда $r_n = 0$ для всех $n > 2$. Мы называем такие пространства обобщенно симметрическими, т.к. для них обсуждаемые разложения имеют тот же вид, что и для симметрических пространств. Формула разложения для метрики симметрического пространства приведена Петровым [20]. В одной из последующих работ мы намерены подробно рассмотреть обобщенно симметрические ПВ.

4.2. Значительный интерес представляет также вторая система решений уравнения (18). Учитывая, что вторым решением уравнения (7) служит J_{1b} (9) и обозначая второе матричное решение уравнения (18) как $C^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}$, имеем

$$C^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}} = -S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}}y^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\sigma}}. \tag{26}$$

Из определения тензора $y^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\sigma}}$ и (20) нетрудно видеть что

$$C^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}|_{t=0} = \delta^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}. \tag{27}$$

В аналитическом случае явное выражение для тензора $C^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}$ может быть получено из разложения (24) заменой коэффициентов $a(m_1, m_2, \dots, m_k)$ на

$$b(m_1, m_2, \dots, m_k) = [(m_k-2)!(\sum_{i=1}^{k} m_i-1)(\sum_{j=1}^{k} m_j)]^{-1}.$$

Особые точки матрицы $C^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}$ при фиксированном u — это фокальные точки для пучка геодезических, параллельных в окрестности точки $\bar{p}$.

Отметим два тождества, используемые в дальнейшем. Из определения линейных преобразований $Y^{\alpha}_{\bar{\sigma}}$ и $y^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}$ вытекают соотношения:

$$Y^{\alpha}_{\bar{\sigma}}u^{\bar{\sigma}} = u^{\alpha}; \qquad y^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}u^{\bar{\sigma}} = -u^{\bar{\varrho}}.$$

Учитывая (17), (19) и (26), получаем

$$S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}y^{\bar{\sigma}} = y^{\bar{\varrho}}; \qquad C^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}y^{\bar{\sigma}} = y^{\bar{\varrho}}. \tag{28}$$

Если пространство допускает аффинное движение, определяемое векторным полем ξ^{α}, то это поле удовлетворяет следующему соотношению [20]:

$$\xi^{\alpha}{}_{;(\beta\gamma)} = R^{\alpha}{}_{(\beta\gamma)\delta}\xi^{\delta},$$

из которого видно, что вдоль произвольной геодезической поле ξ является якобиевым. Зная общие решения уравнений (7), (18), находим

$$\xi^{\alpha} = Y^{\alpha}{}_{\bar{\varrho}}(-y^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}}\xi^{\bar{\tau}} + \xi^{\bar{\varrho}}{}_{;\bar{\tau}}u^{\bar{\tau}}t). \tag{29}$$

Здесь $\xi^{\bar\tau}$ и $\xi^{\bar\varrho}{}_{;\bar\tau}$ — константы интегрирования, имеющие смысл значений поля ξ и его ковариантной производной в точке $\bar p$. В случае движений риманового пространства из уравнений Киллинга следует условие $\xi_{\bar\tau;\bar\sigma} = -\xi_{\bar\sigma;\bar\tau}$.

Видно, что поля Якоби для совокупности геодезических $\Gamma_{\bar p}^{-}$ служат минимальным ободщением киллинговых полей и, следовательно, их естественно использовать для определения динамических переменных [13].

4.3. В теории нормальных координат и аффинных расширений [29] значительные трудности вызывало отыскание коэффициентов разложения для $\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar\varrho}_{\bar\sigma\bar\tau}$. Проведенный выше анализ полей Якоби второго порядка позволяет высказать

Предложение 4. *Нормальный прообраз объекта связности удовлетворяет следующему дифференциальному тождеству*

$$\frac{d^2}{dt^2}\, t^2\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar\varrho}_{\bar\sigma\bar\tau} + 2\gamma^{\bar\varrho}{}_{\bar\nu}\,\frac{d}{dt}\, t\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar\nu}_{\bar\sigma\bar\tau} = \overset{*}{\Lambda}{}^{\bar\varrho}_{\bar\sigma\bar\tau} - 4\overset{*}{Q}{}^{\bar\varrho}{}_{\bar\nu(\bar\tau}\gamma^{\bar\nu}{}_{\bar\sigma)}, \tag{30}$$

где

$$\gamma^{\bar\varrho}{}_{\bar\nu} = tS^{-1\bar\varrho}{}_{\bar\mu}\dot S^{\bar\mu}{}_{\bar\nu}; \qquad \overset{*}{Q}{}^{\bar\varrho}{}_{\bar\sigma\bar\tau} = \overset{*}{R}{}^{\bar\varrho}{}_{\bar\sigma\bar\tau\bar\varkappa}y^{\bar\varkappa};$$

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{\bar\varrho}{}_{\bar\sigma\bar\tau} = (\overset{*}{R}{}^{\bar\varrho}{}_{\bar\varkappa_1\bar\varkappa_2(\bar\sigma;\bar\tau)} - \overset{*}{R}{}^{\bar\varrho}{}_{(\bar\sigma\bar\tau)\bar\varkappa_1;\bar\varkappa_2})y^{\bar\varkappa_1}y^{\bar\varkappa_2} - 4\overset{*}{Q}{}^{\bar\varrho}{}_{(\bar\sigma\bar\tau)}.$$

Это тождество можно получить, сворачивая уравнение для J_2^{α} с $G^{\bar\varrho}{}_{\alpha}$, подставляя решение (8), (11) и опуская произвольные постоянные.

Соотношение (30), рассматриваемое как уравнение на $\overset{*}{\Gamma}$, представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение. Надо полагать, что получаемое из него рекурентное соотношение дает наиболее простой способ для отыскания коэффициентов разложения поля $\overset{*}{\Gamma}$ по степеням вектора y, т.е. аффинных нормальных тензоров (АНТ) [29, 1]. Соотношение (30) вместе с уравнениеям (18) для $S^{\bar\varrho}{}_{\bar\sigma}$ образуют систему, аналогичную фундаментальным уравнением Картана [11, 31], позволяющим восстанавливать по кривизне коэффициенты связности параллельно переносимого репера. Для сравнения выпишем эти уравнения в наших обозначениях:

$$\frac{d}{dt}\, tS^{\bar\varrho}{}_{\bar\sigma} = \delta^{\bar\varrho}{}_{\bar\sigma} + y^{\bar\varkappa}\tilde\Gamma^{\bar\varrho}_{\bar\varkappa\bar\nu}S^{\bar\nu}{}_{\bar\sigma}; \tag{31}$$

$$\frac{d}{dt}\, t\tilde\Gamma^{\bar\varrho}_{\bar\sigma\bar\nu}S^{\bar\nu}{}_{\bar\tau} = \tilde R^{\bar\varrho}{}_{\bar\sigma\bar\varkappa\bar\nu}y^{\bar\varkappa}S^{\bar\nu}{}_{\bar\tau}, \tag{32}$$

где

$$\tilde\Gamma^{\bar\varrho}_{\bar\sigma\bar\nu} = G^{\bar\varrho}_{\alpha}G^{\alpha}_{\bar\sigma;\beta}G^{\beta}_{\bar\nu}.$$

Связь между $\overset{*}{\Gamma}$ и $\tilde\Gamma$ дается соотношением

$$S^{\bar\varrho}{}_{\bar\varkappa}\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar\varkappa}_{\bar\sigma\bar\tau} - \tilde\Gamma^{\bar\varrho}_{\bar\mu\bar\nu}S^{\bar\mu}{}_{\bar\sigma}S^{\bar\nu}_{\bar\tau} = \frac{\partial}{\partial y^{\bar\tau}}\, S^{\bar\varrho}{}_{\bar\sigma}. \tag{33}$$

Сворачивая его с $y^{\bar{\tau}}$, получаем уравнение

$$\dot{S}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}} = S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\nu}} \overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{\nu}}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}} u^{\bar{\tau}},$$

которое в нашей системе аналогично уравнению (31).

Уравнения (31), (32) проще, чем (30), но соотношение (33), ввиду того, что оно содержит частные производные, оказывается неудобным для отыскания АНТ.

5. *Многообразие пространств с отмеченным репером*

5.1. Рассмотрим те величины, которые однозначно задают геометрию пространства с отмеченным репером и, в частности, укажем независимые компоненты тензора кривизны и его ковариантных производных. В основе рассмотрения лежит лемма, сформулированная в 2.2.

Обратимся вначале к римановым пространствам. Геометрия элементарного $V(\boldsymbol{h}_i)$ однозначно задается тензором $\overset{*}{g}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}(y^{\bar{\varkappa}})$, удовлетворяющим полной системе условий, перечисленных при формулировке леммы 1. В свою очередь поле $\overset{*}{g}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}$ однозначно определяется из соотношения (16) по полю $S^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\varrho}}(y)$ и постоянному тензору $g_{\bar{\tau}\bar{\varkappa}}$, а поле $S^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\varrho}}$ взаимно однозначно связано уравнением (18) и условием (20) с полем $\tilde{r}^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\sigma}}$. Естественно возникает вопрос о полной системе условий для поля $S^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\varrho}}$ (и, соответственно, для $\tilde{r}^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\sigma}}$), т.е. о такой системе условий, чтобы произвольный удовлетворяющий им тензор мог интерпретироваться как $\boldsymbol{S}$ $(\tilde{\boldsymbol{r}})$ для некоторой метрики.

Приступая к формулировке этих условий, нужно учесть первое равенство (28), справедливое как для $V(\boldsymbol{h}_i)$, так и для $A(\boldsymbol{h}_i)$. В силу (18) и (20) оно эквивалентно очевидному тождеству

$$\tilde{r}^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\sigma}} y^{\bar{\sigma}} = 0. \tag{34}$$

Для римановых пространств, кроме того, из соотношения (5) при учете (16) и (28) следует также

$$y_{\bar{\tau}} S^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\varrho}} = y_{\bar{\varrho}}, \qquad \text{где} \qquad y_{\bar{\tau}} = g_{\bar{\tau}\bar{\varrho}} y^{\bar{\varrho}}. \tag{35}$$

Легко видеть, что это тождество эквивалентно условию $y_{\bar{\tau}} \tilde{r}^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\sigma}} = 0$.

Одним из требований к $\overset{*}{g}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}$ является симметричность этого тензора. Аналогичное условие справедливо, как известно, и для тензора $\tilde{r}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} = g_{\bar{\varrho}\bar{\tau}}\, \tilde{r}^{\bar{\tau}}{}_{\bar{\sigma}}$:

$$\tilde{r}_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}} = \tilde{r}_{\bar{\sigma}\bar{\varrho}}.$$

Оператор $S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}$ на является, вообще говоря, симметрическим, однако из последнего соотношения и (20) следует, что тензор $\sigma^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}} = S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}} t$ является самосопряженным решением уравнения (18) [34] т.е.

$$\sigma_{\bar{\varrho}}{}^{\bar{\tau}} \dot{\sigma}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\varkappa}} = \dot{\sigma}_{\bar{\varrho}}{}^{\bar{\tau}} \sigma^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\varkappa}}, \tag{36}$$

где $\sigma_{\bar{\varrho}}{}^{\bar{\tau}} = g_{\bar{\varrho}\bar{\mu}}\sigma^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}}g^{\bar{\nu}\bar{\tau}}$. Далее удобно пользоваться операторными обозначениями, введя символ $\circ$ для операторного умножения. Тождество (36) в этих обозначениях имеет вид $\sigma^{\mathrm{T}} \circ \dot{\sigma} = \dot{\sigma}^{\mathrm{T}} \circ \sigma$, и из него следует, что $S^{\mathrm{T}} \circ \dot{S} = \dot{S}^{\mathrm{T}} \circ S$. В точках, которые не сопряжены с $\bar{p}$, оператор S обратим, и последнее равенство можно переписать в виде $\dot{S} \circ S^{-1} = (\dot{S} \circ S^{-1})^{\mathrm{T}}$, т.е. оператор $\theta = \dot{S} \circ S^{-1}$ является симметрическим. Геометрически это означает, что конгруэнция геодезических, исходящих из одной точки, обладает нулевым тензором вращения [3]. Обсуждаемое условие можно переформулировать так, чтобы в качестве переменных выступал только вектор y. Домножая θ на t получаем, что $\hat{\theta} = y^{\bar{\sigma}}(\partial S/\partial y^{\bar{\sigma}}) \circ S^{-1}$ — симметрический оператор.

Предложение 5. *Геометрия элементарного риманового пространства с отмеченным репером однозначно задается постоянным симметрическим тензором* $g_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}$ *и полем аффинора* $S(y)$, *определенным, дифференцируемым и неособенным в* $\overset{*}{N}_0$ *и удовлетворяющим полной системе условий*:

$$Sy = y; \quad \hat{\theta}^{\mathrm{T}} = \hat{\theta}. \tag{37}$$

Поле $S(y)$ *взаимно однозначно связано уравнением* (18) *с полем аффинора* $\tilde{r}(y)$, *удовлетворяющим полной системе условий*:

$$\tilde{r}y = 0; \quad \tilde{r}^{\mathrm{T}} = \tilde{r}. \tag{38}$$

Для доказательства заметим прежде всего, что из соотношения $Sy = y$ в качестве дифференциальных следствий вытекают условия $S|_{y=0} = e$, $\dot{S}|_{y=0} = 0$, где e — операторная единица. Аналогично из (34) вытекает $\tilde{r}|_0 = \dot{\tilde{r}}|_0 = 0$. Далее из (37) можно получить $S^{\mathrm{T}}y = y$, что эквивалентно (35) и обеспечивает выполнение условия (5).

Теперь для доказательства полноты системы условий (37) достаточно показать единственность оператора S, удовлетворяющего при заданной метрике этим условиям и соотношению

$$\overset{*}{g} = S^{\mathrm{T}} \circ S, \tag{39}$$

где $\overset{*}{g}$ — оператор метрики, определенный равенством $\overset{*}{g}{}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}} = g^{\bar{\varrho}\bar{\tau}}\overset{*}{g}_{\bar{\tau}\bar{\sigma}}$. Допустим обратное, что S и S_1 — два оператора, удовлетворяющих (37) и (39) с одним и тем же $\overset{*}{g}$. Учитывая, что S неособенный, мы можем представить S_1 в виде $S_1 = O \circ S$, причем в силу (39) имеем $O^{\mathrm{T}} \circ O = e$, т.е. O — ортогональный оператор. Оператор θ_1 имеет вид

$$\theta_1 = \dot{S}_1 \circ S_1^{-1} = \dot{O} \circ O^{\mathrm{T}} + O \circ \theta \circ O^{\mathrm{T}}.$$

Из условия симметричности операторов θ_1 и θ находим $\dot{O} \circ O^{\mathrm{T}} = O \circ \dot{O}^{\mathrm{T}}$. Это равенство совместно с ортогональностью, только когда O — постоянный оператор. Из условия $S_1|_0 = S|_0 = e$ находим $O = e$ и $S_1 = S$.

Заметим, что в качестве объекта, задающего геометрию $V(\boldsymbol{h}_i)$ можно выбрать оператор $\boldsymbol{C}$, удовлетворяющий той же системе условий, что и $\boldsymbol{S}$, или оператор $\overset{*}{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \circ \tilde{\boldsymbol{r}} \circ \boldsymbol{S}$, определяемый тензором $\overset{*}{R}_{\bar\varrho\bar\varkappa\bar\tau\bar\sigma} y^{\bar\varkappa} y^{\bar\tau}$ и удовлетворяющий системе условий (38).

5.2. Операторы $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})$, определяемые метрикой и удовлетворяющие условиям $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = q_0\boldsymbol{y}$; $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = q_0\boldsymbol{y}$, $q_0 \in \boldsymbol{R}$, образуют алгебру $\mathscr{R}$, которую естественно назвать фундаментальной алгеброй пространства $V(\boldsymbol{h}_i)$. К ней принадлежат операторы $\overset{*}{\boldsymbol{g}}, \boldsymbol{S}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{\boldsymbol{r}}, \overset{*}{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{C}, y^{\bar\varrho}{}_{\bar\sigma}$ и др. В случае, когда $V(\boldsymbol{h}_i)$ является аналитическим в окрестности точки $\bar p$, нетрудно указать систему образующих алгебры $\mathscr{R}$. Для этого достаточно разложить в ряд Тейлора любой из операторов, определяющих геометрию, и в качестве образующих взять члены разложения, однородные по степеням $\boldsymbol{y}$. Учитывая особую роль кривизны, удобно в качестве образующих выбрать члены разложения оператора $\tilde{\boldsymbol{r}}$, т.е. введенные выше тензоры $r^{\bar\varrho}_{m\bar\sigma}(m = 2, 3, \ldots)$. Эти образующие могут быть заданы коэффициентами форм $\boldsymbol{r}_m$, и, таким образом, мы приходим к следующему предложению.

Предложение 6. *Геометрия аналитического односвязного $V(\boldsymbol{h}_i)$ однозначно задается симметрическим невырожденным тензором $g_{\bar\varrho\bar\sigma}$ и последовательностью тензоров*

$$B_{\bar\sigma\bar\varrho\bar\varkappa_1 \ldots \bar\varkappa_n} = R_{\bar\sigma(\bar\varkappa_1\bar\varkappa_2|\bar\varrho|;\bar\varkappa_3 \ldots \bar\varkappa_n)}; \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

удовлетворяющих полной системе тождеств:

$$B_{\bar\sigma\bar\varrho\bar\varkappa_1 \cdots \bar\varkappa_n} = B_{\bar\varrho\bar\sigma\bar\varkappa_1 \cdots \bar\varkappa_n},$$

$$B_{\bar\varrho\bar\sigma\bar\varkappa_1 \cdots \bar\varkappa_n} = B_{\bar\varrho\bar\sigma(\bar\varkappa_1 \cdots \bar\varkappa_n)}, \qquad B_{\bar\varrho(\bar\sigma\bar\varkappa_1 \cdots \bar\varkappa_n)} = 0.$$

Это предложение является простым следствием предложения 5. На всю односвязную область аналитичности оно распространяется с помощью аналитического продолжения [31]. Компоненты тензоров $g_{\bar\varrho\bar\sigma}$ и $R_{\bar\varrho(\bar\varkappa_1\bar\varkappa_2|\bar\sigma|;\bar\varkappa_3 \ldots \bar\varkappa_n)}$ в репере $\boldsymbol{h}_i$ могут, таким образом, рассматриваться как координаты на многообразии ростков аналитических римановых пространств с отмеченным репером. Тензоры $B_{\bar\varrho\bar\sigma\bar\varkappa_1 \ldots \bar\varkappa_n} (n = 2, 3, \ldots)$ являются алгебраически независимыми частями тензора кривизны и его последовательных ковариантных производных, остальные части выражаются через них в силу тождеств Ричи, Бианки и алгебраических свойств тензора кривизны. Возможность произвольного задания поля $\tilde{\boldsymbol{r}}$ означает, образно говоря, что в качестве независимых могут быть выбраны кривизны двумерных направлений, касательных к радиальным геодезическим. Нужно отметить, что эти кривизны допускают простую механическую интерпретацию. Вдоль временноподобной геодезической собственные значения оператора $\tilde{\boldsymbol{r}}$ — это суть квадраты частот нормальных мод колебаний, описывающих в линейном приближении относительную динамику системы пробных тел в ОТО [5, 14].

5.3. Перейдем теперь к рассмотрению пространств аффинной связности. В этом случае связь между фундаментальным тензором $\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar\varrho}_{\bar\sigma\bar\tau}$ и кривизной является более сложной и задается тождеством (30). Здесь мы будем рассматривать только аналитические пространства. Поле $\overset{*}{\Gamma}$ представим рядом Тейлора

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{\varrho}}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{\bar{\varrho}}_{n\bar{\sigma}\bar{\tau}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n} y^{\bar{\varkappa}_1} \dots y^{\bar{\varkappa}_n},$$

коэффициентами которого служат АНТ. Подставляя это разложение в (30) и разлагая в ряды остальные входящие туда величины, нетрудно показать, что АНТ имеют следующую структуру

$$A^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \Lambda^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n} + \boldsymbol{\Omega}_n,$$

где

$$\Lambda^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n} = (n-1) R^{\bar{\varrho}}{}_{(\bar{\varkappa}_1\bar{\varkappa}_2|(\bar{\sigma};\bar{\tau})|\bar{\varkappa}_3 \dots \bar{\varkappa}_n)} - (n+3) R^{\bar{\varrho}}{}_{(\bar{\sigma}\bar{\tau})(\bar{\varkappa}_1;\bar{\varkappa}_2 \dots \bar{\varkappa}_n)}$$

а символом $\boldsymbol{\Omega}_n$ обозначены члены нелинейные по тензору кривизны и его ковариантным производным. Это выражение эквивалентно приведенному Вебленом [29], но представлено в более простой форме. Подсчет индексов показывает, что в $\boldsymbol{\Omega}_n$ не могут входить производные от тензора кривизны порядка выше чем $n-3$. Пользуясь обычным выражением тензора кривизны через коэффициенты связности, можно выразить $\boldsymbol{\Omega}_n$ через АНТ порядка не выше, чем $n-2$. Учитывая также явный вид АНТ первого и второго порядков, по индукции легко доказываем, что поле $\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{\varrho}}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}}$ вполне определяется величинами $\Lambda^{\bar{\varrho}}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n}$.

Предложение 7. Геометрия аналитического односвязного $A(\boldsymbol{h}_i)$ однозначно определяется последовательностью тензоров $\Lambda^{\bar{\varrho}}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n}(n = 1, 2, \dots)$, удовлетворяющих полной системе тождеств

$$\Lambda^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n} = \Lambda^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}\bar{\sigma}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n},$$

$$\Lambda^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n} = \Lambda^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}(\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n)}, \qquad \Lambda^{\bar{\varrho}}{}_{(\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n)} = 0.$$

Заметим, что задание этих тензоров эквивалентно заданию тензорного поля

$$\tilde{\Lambda}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \Lambda^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1 \dots \bar{\varkappa}_n} y^{\bar{\varkappa}_1} \dots y^{\bar{\varkappa}_n} = (\tilde{R}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\varkappa}_1\bar{\varkappa}_2(\bar{\sigma};\bar{\tau})} - \tilde{R}^{\bar{\varrho}}{}_{(\bar{\sigma}\bar{\tau})\bar{\varkappa}_1;\bar{\varkappa}_2}) y^{\bar{\varkappa}_1} y^{\bar{\varkappa}_2} - 4 \tilde{R}^{\bar{\varrho}}{}_{(\bar{\sigma}\bar{\tau})\bar{\varkappa}} y^{\bar{\varkappa}},$$

удовлетворяющего тождествам:

$$\tilde{\Lambda}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}} = \tilde{\Lambda}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}\bar{\sigma}}, \qquad \tilde{\Lambda}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}} y^{\bar{\sigma}} y^{\bar{\tau}} = 0. \tag{40}$$

Для доказательства полноты указанной системы тождеств нужно показать, что при их выполнении удовлетворяется сформулированная в лемме 1 полная система условий для $\overset{*}{\Gamma}$. Прежде всего заметим, что задание поля $\tilde{\Lambda}$ позволяет найти тензор $\tilde{r}$, а следовательно и S. Действительно, легко видеть, что

$$\tilde{\Lambda}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}}y^{\bar{\tau}} = t\dot{\tilde{r}}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}. \tag{41}$$

При этом, если выполняются тождества (40), то имеют место равенства:

$$\tilde{r}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}u^{\bar{\sigma}} = 0, \quad S^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}u^{\bar{\sigma}} = u^{\bar{\varrho}}, \quad \dot{S}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}}u^{\bar{\sigma}} = 0.$$

Теперь, сворачивая уравнение (30) с векторами $u^{\bar{\sigma}}$ и $u^{\bar{\tau}}$, находим, что из выполнения тождеств (40) вытекает $\overset{*}{\Gamma}{}^{\bar{\varrho}}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}}\mu^{\bar{\sigma}}u^{\bar{\tau}} = 0$. Что и требовалось доказать.

Независимые компоненты тензоров $\Lambda^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}\bar{\varkappa}_1\ldots\bar{\varkappa}_n}$ в репере $\boldsymbol{h}_i$ могут рассматриваться как координаты на многообразии ростков аналитических $A(\boldsymbol{h}_i)$. Значительный интерес вызывает вопрос о том, при каких условиях пространство $A(\boldsymbol{h}_i)$ сводится к риманову $V(\boldsymbol{h}_i)$ [29—31], и как расположены римановы пространства среди пространств $A(\boldsymbol{h}_i)$.

Выше мы видели, что тензорное поле $\tilde{\Lambda}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\sigma}\bar{\tau}}$, удовлетворяющее тождествам (40), определяет в силу уравнения (41) поле $\tilde{r}$, для которого выполняется равенство (34). Опираясь на предложение 5, можно высказать следующее

Предложение 8. *Аналитическое пространство $A(\boldsymbol{h}_i)$ сводится к риманову $V(\boldsymbol{h}_i)$ в том и только в том случае, если существует постоянный симметрический невырожденный тензор $g_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}$ такой, что*

$$g_{\bar{\varrho}[\bar{\sigma}}\tilde{\Lambda}^{\bar{\varrho}}{}_{\bar{\tau}]\bar{\varkappa}}y^{\bar{\varkappa}} = 0. \tag{42}$$

Таким образом, в рассматриваемых координатах римановы $V(\boldsymbol{h}_i)$ с заданным тензором $g_{\bar{\varrho}\bar{\sigma}}$ образуют линейное подмногообразие в многообразии всех $A(\boldsymbol{h}_i)$, выделяемое условием (42).

Автор благодарен профессору К. А. Пирагасу за сотрудничество при работе над первой частью исследования геодезической структуры и за многочисленные полезные обсуждения рассмотренных выше вопросов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь для справок приводятся начальные члены основных обсуждаемых разложений. С точностью до членов пятого порядка включительно в операторных обозначениях имеем:

$$S = e+\tfrac{1}{6}r_2+\tfrac{1}{12}r_3+\tfrac{1}{40}r_4+\tfrac{1}{180}r_5+\tfrac{1}{120}r_2\circ r_2+\tfrac{1}{180}r_3\circ r_2+\tfrac{1}{360}r_2\circ r_3+\ldots$$

$$S^{-1} = e-\tfrac{1}{6}r_2-\tfrac{1}{12}r_3-\tfrac{1}{40}r_4-\tfrac{1}{180}r_5+\tfrac{7}{360}r_2\circ r_2+\tfrac{1}{120}r_3\circ r_2+\tfrac{1}{90}r_2\circ r_3+\ldots$$

$$C = e+\tfrac{1}{2}r_2+\tfrac{1}{6}r_3+\tfrac{1}{24}r_4+\tfrac{1}{120}r_5+\tfrac{1}{24}r_2\circ r_2+\tfrac{1}{40}r_3\circ r_2+\tfrac{1}{120}r_2\circ r_3+\ldots$$

$$-S^{-1}\circ C = -e-\tfrac{1}{3}r_2-\tfrac{1}{12}r_3-\tfrac{1}{60}r_4-\tfrac{1}{360}r_5+\tfrac{1}{45}r_2\circ r_2+\tfrac{1}{120}(r_3\circ r_2+r_2\circ r_3)+\ldots$$

$$\overset{*}{g} = e+\tfrac{1}{3}r_2+\tfrac{1}{6}r_3+\tfrac{1}{20}r_4+\tfrac{1}{90}r_5+\tfrac{2}{45}r_2\circ r_2+\tfrac{1}{45}(r_3\circ r_2+r_2\circ r_3)+\ldots$$

$$\overset{*}{g}{}^{-1} = e-\tfrac{1}{3}r_2-\tfrac{1}{6}r_3-\tfrac{1}{20}r_4-\tfrac{1}{90}r_5+\tfrac{1}{15}r_2\circ r_2+\tfrac{1}{30}(r_3\circ r_2+r_2\circ r_3)+\ldots$$

$$\gamma = \tfrac{1}{3}r_2+\tfrac{1}{4}r_3+\tfrac{1}{10}r_4+\tfrac{1}{36}r_5+\tfrac{1}{45}r_2\circ r_2-\tfrac{1}{36}r_2\circ r_3+\ldots$$

$$\hat{\theta} = \tfrac{1}{3}r_2+\tfrac{1}{4}r_3+\tfrac{1}{10}r_4+\tfrac{1}{36}r_5-\tfrac{1}{45}r_2\circ r_2-\tfrac{1}{72}(r_3\circ r_2+r_2\circ r_3)+\ldots$$

Для первых четырех АНТ из соотношения (30) находим:

$$A^{\varrho}_{1\sigma\tau} = -\tfrac{2}{3}R^{\varrho}{}_{(\sigma\tau)\varkappa}y^{\varkappa},$$

$$A^{\varrho}_{2\sigma\tau} = \tfrac{1}{6}\left[R^{\varrho}{}_{\varkappa\lambda(\sigma;\tau)}-5R^{\varrho}{}_{(\sigma\tau)\varkappa;\lambda}\right]y^{\varkappa}y^{\lambda},$$

$$A^{\varrho}_{3\sigma\tau} = \tfrac{3}{10}\left[R^{\varrho}{}_{\varkappa\lambda(\sigma;\tau)\mu}-3R^{\varrho}{}_{(\sigma\tau)\varkappa;\lambda\mu}\right]y^{\varkappa}y^{\lambda}y^{\mu}$$

$$+\tfrac{1}{15}\left[7r^{\varrho}_{2\mu}R^{\mu}{}_{(\sigma\tau)\varkappa}+9R^{\varrho}{}_{\mu\varkappa(\sigma}r^{\mu}_{2\tau)}-3r^{\mu}_{2(\tau}R^{\varrho}{}_{\sigma)\mu\varkappa}\right]y^{\varkappa},$$

$$A^{\varrho}_{4\sigma\tau} = \tfrac{2}{15}\left[3R^{\varrho}{}_{\varkappa\lambda(\sigma;\tau)\mu\nu}-7R^{\varrho}{}_{(\sigma\tau)\varkappa;\lambda\mu\nu}\right]y^{\varkappa}y^{\lambda}y^{\mu}y^{\nu}+\tfrac{4}{15}\left[6A^{\varrho}_{2\nu(\tau}r^{\nu}_{2\sigma)}-6r^{\varrho}_{2\nu}A^{\nu}_{2\sigma\tau}\right.$$

$$\left.+(4R^{\varrho}{}_{\nu\varkappa(\tau}r^{\nu}_{3\sigma)}-r^{\nu}_{3(\tau}R^{\varrho}{}_{\sigma)\nu\varkappa}+3r^{\varrho}_{3\nu}R^{\nu}{}_{(\sigma\tau)\varkappa})y^{\varkappa}+4R^{\varrho}{}_{\nu\varkappa(\tau;|\lambda|}r^{\nu}_{2\sigma)}y^{\varkappa}y^{\lambda}\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Александров, К. А. Пирагас, *Теор. Мат. Физ.* **38**, **71** (1979).
[2] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, Мир, Москва 1977.
[3] С. Хокинг, Дж. Эллис, *Крупномасштабная структура пространствавремени*, Мир, Москва 1977.
[4] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом*, Мир. Москва 1971.
[5] J. L. Synge, *Duke Math. J.* **1**, 527 (1935).
[6] J. Plebański, *Acta Phys. Pol.* **28**, 141 (1965).
[7] S. L. Bażański, *Acta Nova Leopoldina* **39**, 215 (1974).
[8] J. Douglas, *Ann. Math.* (2) **29**, 143 (1927).
[9] J. Ehlers, E. Köhler, *J. Math. Phys.* **18**, 2014 (1977).
[10] Э. Картан, *Риманова геометрия в ортогональном репере*, Издательство Московского университета, Москва 1960.
[11] М. М. Постников, *Введение в теорию Морса*, Наука, Москва 1971.
[12] А. Н. Александров, К. А. Пирагас, Препринт ИТФ-74-70Р, Киев 1974; *Tensor, N. S.*, **29**, 187 (1975).
[13] W. G. Dixon, *Proc. R. Soc. London* **A314**, 499 (1970); **A319**, 509 (1970); *Philos. Trans. R. Soc. London* **A277**, 59 (1974); *Gen. Relativ. Gravitation* **4**, 199 (1973).
[14] Л. Е. Пирагас, *Изв. вузов СССР, Физика*, №11, 74 (1978); №12, 21 (1978).
[15] B. S. DeWitt, R. W. Brehme, *Ann. Phys.* **9**, 220 (1960).
[16] S. M. Christensen, *Phys. Rev.* **D14**, 2490 (1976); **17**, 946 (1978).
[17] B. S. DeWitt, in *Relativity*, eds. S. Fickler, M. Carmeli, L. Witten, Plenum Press, New York 1970.
[18] Р. Арновитт, С. Дизер, К. В. Миснер, в книге *Эйнштейновский сборник* 1967, Наука, Москва 1967.
[19] A. E. Fisher, J. E. Marsden, *J. Math. Phys.* **13**, 546 (1972); *Gen. Relativ. Gravitation*. **7**, 915 (1976).
[20] А. З. Петров, *Новые методы в общей теории относительности*, Наука, Москва 1966.
[21] А. З. Петров, *Докл. АН СССР* **186**, 1302 (1969).
[22] C. H. Brans, *J. Math. Phys.* **6**, 94 (1965); **11**, 1210 (1970); **12**, 1616 (1971).
[23] N. Rosen, *Ann. Phys.* **22**, 1 (1963).
[24] Ю. А. Рылов, *Изв. вузов СССР, Математика* № 3, 131 (1962); *Вестник Московского университета, сер. физ., астроном.* №5, 70 (1962); № 6, 45 (1962).

[25] R. Geroch, *Commun. Math. Phys.* **13**, 180 (1969).
[26] Р. Герок, в сб. *Квантовая гравитация и топология*, Мир Москва 1973.
[27] S. W. Hawking, *Gen. Relativ. Gravitation* **1**, 393 (1971).
[28] R. A. d'Inverno, J. Smallwood, *Gen. Relativ. Gravitation* **9**, 195 (1978).
[29] О. Веблен, *Инварианты дифференциальных квадратичных форм*, ИЛ, Москва 1948; T. Y. Thomas, *The Differential Invariants of Generalized Spaces*, Cambridge 1934.
[30] Р. Зуланке, П. Винтген, *Дифференциальная геометрия и расслоения*, Мир, Москва 1975.
[31] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, V. 1, Interscience Publishers, NY-L. 1963.
[32] Ю. Н. Кудря, А. Н. Александров, Тезисы докладов Всесоюзной конференции „Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации", Минск 1976.
[33] P. Günther, *ZAMM* **55**, 205 (1975).
[34] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва 1970.