Vol. B12 (1981) ACTA PHYSICA POLONICA No 7

ДИАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

DYAL SYMMETRY OF RELATIVISTIC WAVE EQUATIONS

В. И. Стражев

Институт физики Академии наук Белорусской ССР, Минск*

В. А. Плетюхов

Брестский педагогический институт имени А. С. Пушкина, Брест

(Поступила в редакцию 25-го ноября 1980 г.)

The internal symmetry group (dyal symmetry) of relativistic wave equations is considered by means of the Gelfand-Yaglom method. As an example the dyal symmetry of field theory of particles with maximal spin one is investigated.

PACS numbers: 11.30.-j, 11.30.Ly

1. *Введение*

В работах Гельфанда и Яглома (см. [1]) развит подход (краткое изложение основных сведений о нем дается в приложении) к описанию элементарных частиц, основанный на использовании универсальной матричной формы релятивистских волновых уравнений (РВУ)

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa)\psi = 0 \tag{1}$$

где κ — вещественная константа, γ_μ — четверка квадратных матриц, которые определяют все физические свойства частицы [1, 2]. Матрица γ_4, играющая основную роль для уравнения (1), имеет квазидиагональный вид, причем по диагонали стоят блоки, соответствующие определенным значениям спина.

Частным случаем уравнений (1) являются уравнения векторного поля общего типа (уравнения В.П.)

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} + mA_\mu + \partial_\mu \varphi = 0 \tag{2}$$

* Address: Institute of Physics, Lenin Avenue 70, Minsk-72, 220072, USSR.

$$\partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} + mB_\mu + \partial_\mu \check{\varphi} = 0$$

$$mF_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha B_\beta$$

$$\partial_\mu A_\mu + m\varphi = 0, \qquad \partial_\mu B_\mu + m\varphi = 0$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = 1/2\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$, $\varepsilon_{1234} = -i$, которые обладают большим числом интересных свойств и возможных приложений (см. например [3—9]).

Система (2) может быть записана в универсальной матричной форме (1) (см. [3, 5]), где γ_μ — квадратные матрицы размерностью 16×16, удовлетворяющие алгебре Дирака. Уравнения В. П. относятся к классу уравнений, требующих в квантовой теории использования индефинитной метрики. С точки зрения трансформационных свойств волновой функции ψ они соответствуют следующей схеме зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца:

$$(0,0)-(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\begin{matrix}\nearrow (1,0) \searrow \\ \searrow (0,1) \nearrow\end{matrix}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})'-(0,0)', \tag{3}$$

где представление (0, 0) описывает скаляр, (0, 0)′ — псевдоскаляр, (1/2, 1/2) — вектор, (1/2, 1/2)′ — псевдовектор, $(0,1)\oplus(1,0)$ — антисимметричный тензор второго ранга. Схема зацеплений (3) содержит кратные (повторяющиеся) неприводимые представления собственной группы Лоренца.

В общем случае РВУ, построенные на основе схемы зацеплений (3), описывают частицу с мультиспином 0—1 (максимальным спином 1) и несколькими значениями массы. Если все корни спиновых блоков матрицы C^S, определяющие значения массы частицы, повторяющиеся, то этот случай соответствует описанию частицы с мультиспином 0—1 и одной массой покоя и реализуется уравнениями векторного поля общего типа (2).

В литературе, однако, отсутствует анализ схемы зацепления (3) с точки зрения теории релятивистских волновых уравнений, который и проведен в настоящей работе на основе подхода Гельфанда-Яглома.

Развитый в настоящей работе подход позволяет с точки зрения теории РВУ дать анализ внутренней (т.е. не связанной с пространственно-временными преобразованиями) симметрии уравнений векторного поля общего типа, существование которой ранее было установлено в работах [7—10]. Эта симметрия, названная одним из авторов (В. С.) диальной (dyal, т.е. двойственной), представляет собой пример группы внутренней симметрии, преобразования которой задаются тензорными параметрами. Эта особенность диальной симметрии обусловлена тем, что её преобразования связывают поля с различными значениями спина, но подчиняющиеся одной и той же статистике. Диальная симметрия имеет место и при наличии взаимодействия. С точки зрения теории РВУ диальная симметрия обусловлена вырождением по массе различных спиновых состояний квантового объекта.

Рассмотрение векторного поля общего типа служит одновременно конкретной иллюстрацией теоремы, доказанной в настоящей работе, и устанавливающей критерий существования у РВУ внутренних симметрий подобного типа. Последние оказываются связанными с наличием в спиновых блоках C^S матрицы γ_4 кратных (повторяющихся) корней.

Для лучшего понимания природы изучаемой симметрии и существа доказанной теоремы, мы проведем вначале исследование РВУ, описывающего частицы с максимальным спином 1, а затем дадим доказательство теоремы. Кроме того, подход, используемый в настоящей работе для анализа симметрии РВУ, позволяет дать простое доказательство факта инвариантности всех известных уравнений относительно преобразований волновых функций, которые не индуцируются преобразованиями пространственно-временных координат и имеют в общем случае интегро-дифференциальную форму.

2. РВУ для частиц с мультиспином 0,1

Переходим к исследованию схемы зацеплений (3). Пронумеруем входящие в нее неприводимые представления следующим образом: $(0, 0) \to 1$, $(0, 0)' \to 2$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to 3$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' \to 4$, $(0, \frac{1}{2}) \to 5$, $(1, 0) \to 6$. Общий вид матрицы γ_4 релятивистского волнового уравнения (1), построенного на основе этой схемы, таков:

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} C^0 \times I_1 & \\ & C^1 \times I_3 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$C^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C^0_{13} & C^0_{14} \\ 0 & 0 & C^0_{23} & C^0_{24} \\ C^0_{31} & C^0_{32} & 0 & 0 \\ C^0_{41} & C^0_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C^1_{35} & C^1_{36} \\ 0 & 0 & C^1_{45} & C^1_{46} \\ C^1_{53} & C^1_{54} & 0 & 0 \\ C^1_{63} & C^1_{64} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где C^0 и C^1 — спиновые блоки, соответствующие спинам 0 и 1. Введем матрицу η билинейной формы, с помощью которой осуществляется лагранжева формулировка теории. В рассматриваемом случае эта матрица имеет вид:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 \times I_1 & \\ & \eta^1 \times I_3 \end{pmatrix}, \quad \eta^0 = \begin{bmatrix} \eta^0_{11} & & & \\ & \eta^0_{22} & & \\ & & \eta^0_{33} & \\ & & & \eta^0_{44} \end{bmatrix}, \quad \eta^1 = \begin{bmatrix} \eta^1_{33} & & & \\ & \eta^1_{44} & & \\ & & 0 & \eta^1_{56} \\ & & \eta^1_{65} & 0 \end{bmatrix}$$

Не нарушая общности, элементы блоков η^0, η^1 можно выбирать равными $+1$ или -1, причем должны выполняться условия:

$$\eta^0_{33} = -\eta^1_{33}, \quad \eta^0_{44} = -\eta^1_{44}, \quad \eta^1_{56} = \pm\eta^1_{65}.$$

Требования инвариантности уравнения (1) относительно полной группы Лоренца и возможности его получения из инвариантной функции Лагранжа приводят к следующим условиям (см. Приложение):

$$C^1_{35} = C^1_{36}, \quad C^1_{53} = C^1_{63}, \quad C^1_{45} = -C^1_{46}, \quad C^0_{31} = (\eta^0_{33}/\eta^0_{11})\bar{C}^0_{13},$$
$$C^0_{32} = (\eta^0_{33}/\eta^0_{22})\bar{C}^0_{23}, \quad C^0_{41} = (\eta^0_{44}/\eta^0_{11})\bar{C}^0_{14}, \quad C^0_{42} = (\eta^0_{44}/\eta^0_{22})\bar{C}^0_{24},$$
$$C^1_{53} = (\eta^1_{56}/\eta^1_{33})\bar{C}^1_{35}, \quad C^1_{54} = -(\eta^1_{56}/\eta^1_{44})\bar{C}^1_{45} \tag{6}$$

где знак „—" означает комплексное сопряжение.

Используя вид (5) спинового блока C^1 и условия (6), можно найти корни $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$ характеристического уравнения для блока C^1

$$\lambda_1 = |[2(\eta^1_{56}/\eta^1_{33})\,|C^1_{35}|^2]^{1/2}|, \quad \lambda_2 = |[-2(\eta^1_{56}/\eta^1_{44})\,|C^1_{45}|^2]^{1/2}|$$

где C^1_{35} и C^1_{36} выбираются произвольно.

Здесь могут быть реализованы следующие возможности:

1) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ при $C^1_{35} \neq 0$, $C^1_{45} \neq 0$
2) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ при $|C^1_{35}| = |C^1_{45}| \neq 0$
3) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ или $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ при $C^1_{35} = 0$, $C^1_{45} \neq 0$ или $C^1_{35} \neq 0$, $C^1_{45} = 0$
4) $\lambda_1 = \lambda_2$ при $C^1_{35} = C^1_{45} = 0$.

Аналогичным образом устанавливается, что для спинового блока C^0 имеются такие же возможности выбора корней.

Итак, на основе схемы зацеплений (3) можно построить различные РВУ, вообще говоря, физически неэквивалентные, как для частицы с мультиспином 0—1, так и для частицы со спином 0 или спином 1.

3. *РВУ векторного поля общего типа*

Обсудим теперь возможные варианты РВУ для частицы с мультиспином 0—1. Для этого необходимо и достаточно, чтобы у блоков C^0 и C^1 были ненулевые корни (по меньшей мере у каждого из блоков по одному (с точностью до знака) ненулевому корню). Возможны четыре типа таких уравнений:[1] (1) два значения массы в состоянии со спином 0, два значения массы в состоянии со спином 1 (сокращенно: $m_1, m_2 \leftrightarrow 0, m'_1, m'_2 \leftrightarrow 1$), (2) $m \leftrightarrow 0, m'_1, m'_2 \leftrightarrow 1$, (3) $m_1, m_2 \leftrightarrow 0, m' \leftrightarrow 1$, (4) $m \leftrightarrow 0$, $m' \leftrightarrow 1$.

Наибольший интерес для нас представляет четвертый случай, причем, когда $m = m'$. К его исследованию мы и обратимся.

Положим в (5) $C^0_{13} = C^0_{24} = 1$, $C^0_{23} = C^0_{14} = 0$, $C^1_{35} = C^1_{45} = \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ и $-\eta^0_{11} = \eta^0_{22} = -\eta^0_{33} = \eta^0_{44} = \eta^1_{33} = -\eta^1_{44} = \eta^1_{56} = 1$.

---

[1] Во-первых, размерности блоков C^0, C^1 равны 4×4, поэтому у каждого из них не может быть более двух массовых состояний: $m_1 = (\varkappa/|\lambda_1|)$, $m_2 = (\varkappa/|\lambda_2|)$, во-вторых, у каждого из них не может быть меньше одного массового состояния, поскольку мы обсуждаем случай частицы с мультиспином 0—1.

Тогда с учетом условий (6) придем к следующему виду блоков C^0 и C^1:

$$C^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Уравнение (1) с матрицей γ_4 (4), (7) описывает частицу с мультиспином 0—1 и одной массой покоя. Наличие повторяющихся корней в спиновых блоках C^0, C^1 означает, что данные спиновые состояния являются вырожденными, причем кратность вырождения равна двум. Этот факт можно интерпретировать как следствие наличия у частицы внутренних степеней свободы.

Поскольку все корни матрицы γ_4 (4), (7) ненулевые и повторяющиеся, то минимальный полином для γ_4 имеет вид

$$(\gamma_4)^2 - 1 = 0$$

т.е. матрицы γ_μ удовлетворяют алгебре Дирака. Выполняемость алгебры Дирака для γ_μ следует и из того, что простой перестановкой строк и столбцов матрицу γ_4 (4), (7) можно привести к виду: $\gamma_4 = \gamma_4^{д} \otimes I_4$ где $\gamma_4^{д}$ — дираковская матрица, I_4 — единичная матрица 4×4. Сопоставляя теперь $(0, 1) \oplus (1, 0) \to F_{\mu\nu}$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to A_\mu$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})' \to B_\mu$, $(0, 0) \to \phi$, $(0, 0)' \to \tilde{\phi}$ можно убедиться, что тензорным аналогом релятивистского волнового уравнения (1), основанного на схеме зацепления (3) и условиях (7), является система (2), описывающая векторное поле общего типа. В работе [4] имеется тензорная формулировка уравнений, соответствующих произвольному выбору корней спиновых блоков C^0, C^1 матрицы γ_4. Таким образом, система уравнений векторного поля общего типа (2) представляет собой пример РВУ, построенного на основе использования кратных неприводимых предсталевний груп Лоренца и выбора матрицы γ_4 с повторяющимися корнями в спиновых блоках.

4. Диальная симметрия векторного поля общего типа

Система уравнений (2), будучи записана в матричной форме (1), может быть диагонализирована посредством унитарного преобразования, т.е. приведена к системе четырех уравнений Дирака:

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + \kappa)\psi = 0, \tag{8}$$

где $\Gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu^{д}$. Необходимо подчеркнуть, что система уравнений (8) не является распадающейся с точки зрения группы Лоренца. Действительно, генераторы группы Лоренца в представлении, соответствующем схеме зацепления (3), имеют вид [5]:

$$I_{\mu\nu} = \tfrac{1}{4}\left(\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]} + \check{\Gamma}_{[\mu}\check{\Gamma}_{\nu]}\right), \tag{9}$$

где Γ_μ, $\check{\Gamma}_\mu$ — два набора матриц 16×16, удовлетворяющих алгебре Дирака и взаимно коммутирующих:

$$[\Gamma_\mu, \check{\Gamma}_\nu]_- = 0. \tag{10}$$

При преобразованиях группы Лоренца компоненты волновых функций $\psi_{\check{A}} = \{\psi\}$, $\check{A} = 1, 2, 3, 4$ в (8) перепутываются между собой. Последнее утверждение очевидно, если учесть, что при выборе матриц $\Gamma_{\mu\nu}$ в соответствии с уравнением (8), матрицы $\check{\Gamma}_\mu$ будут иметь вид: $\check{\Gamma}_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu^{\text{д}}$.

Уравнение (8) может быть в принципе использовано и для описания четырехфермионной системы при выборе схемы зацепления, соответствующей четырехкратной суперпозиции представлении $(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)$ и следующему определению генераторов группы Лоренца: $I_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Gamma_{[\mu}\Gamma_{\nu]}$.

Из матриц $\check{\Gamma}_\mu$ можно построить набор из 16 линейно независимых матриц, который в силу (10) образует базис коммутаторной алгебры для оператора ∂_μ уравнения (1), где $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieC_\mu$ для случая заряженного поля, C_μ — электромагнитный потенциал. Группа преобразований

$$\psi \to \psi' = U\psi$$

$$U = \exp(\alpha I + \beta_\mu I_\mu + \omega_{\mu\nu} I_{\mu\nu} + \delta_\mu \check{I}_\mu + \xi \check{I}) \tag{11}$$

где α, β_μ, $\omega_{\mu\nu}$, δ_μ, ξ — комплексные параметры, $I = I_{16}$, $I_\mu = \check{\Gamma}_\nu$, $I_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\Gamma_{[\mu}\check{\Gamma}_{\nu]}$, $\check{I}_\mu = \check{\Gamma}_5\check{\Gamma}_\mu$, $\check{I} = \check{\Gamma}_5 = \check{\Gamma}_1\check{\Gamma}_2\check{\Gamma}_3\check{\Gamma}_4$ изоморфна группе GL(4, C) с 32-мя вещественными параметрами и является группой внутренней (диальной) симметрии уравнений векторного поля общего типа. Последний результат ранее был установлен в работе [10] (в работах [7—9] рассмотрена её подгруппа GL(2, C)).

Инвариантность уравнений (2) относительно преобразований группы внутренней симметрии (11) находится в прямой связи с наличием у матричного аналога этих уравнений повторяющихся корней в спиновых блоках матрицы γ_4, а у описываемых этим уравнением частицы — внутренних степеней свободы.

Из вида генераторов группы Лоренца следует, что генераторы диальных преобразований имеют тензорную природу относительно группы Лоренца. Таким образом, диальная симметрия есть первый пример в физической литературе группы внутренней симметрии, преобразования которой не затрагивают пространственно-временных координат, а генераторы имеют тензорную природу. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что диальные преобразования перемешивают между собой поля, преобразующиеся по неприводимым представлениям группы Лоренца, соответствующии различным значениям спина. Роль внутреннего квантового числа для группы диальной симметрии играет спин частицы. Во избежание недоразумений заметим также, что имеется принципиальное отличие от суперсимметрии с тензорными параметрами (см. например [11]), в которой замыкание алгебры с необходимостью требует привлечения генераторов пространственно-временных преобразований.

5. *Внутренние симметрии РВУ*

Преобразования диальной симметрии, рассмотренные применительно к уравнениям В.П., являются частным случаем преобразований внутренней симметрии, которые определены следующим образом:

$$[Q, \gamma_\mu]_- = 0, \qquad \psi'(x) = Q\psi(x) \tag{12}$$

и $Q = \{Q_i\}$ — квадратные матрицы размерности $N \times N$, где N — размерность волновой функции ψ. В общем случае преобразования (12) соответствуют заданию группы GL(N, C). Докажем тепер следующую теорему:

Теорема: Для инвариантности уравнения (1) *относительно преобразований группы внутренней симметрии* (12) *необходимо и достаточно, чтобы все спиновые блоки* C^S *матрицы* γ_4 *имели один и тот же* (*с точностью до знака*) *ненулевой кратный корень.*

Прежде чем переходить к доказательству теоремы сделаем предварительно необходимые пояснения.

В работе [2] показано, что минимальный полином матрицы γ_4 РВУ, имеющего физический смысл, должен иметь структуры

$$\gamma_4^n(\gamma_4^2 - \lambda_1^2)(\gamma_4^2 - \lambda_2^2) \ldots = 0. \tag{13}$$

Из (13) следует, что ненулевым кратным корням характеристического полинома матрицы γ_4 могут отвечать в нормальной жордановой форме этой матрицы лишь скалярные клетки той или иной размерности (равной кратности корня) и не могут отвечать неприводимые к диагональному виду клетки Жордана. Поэтому, говоря о кратных ненулевых корнях матрицы γ_4 или ее спиновых блоках (как в формулировке теоремы) мы имеем всегда ввиду только кратность первого (физического) типа.

Кроме того, в формулировке теоремы идет речь о преобразованиях группы внутренней симметрии, которые не сводятся к масштабнофазовым преобразованиям $\psi' = r \exp(i\varphi)\psi$, а значит Q_i не состоит из неприводимых представлений единичной размерности.

Проведем теперь доказательство теоремы.

Необходимость. Дано (12). Среди коммутаторов содержится коммутатор

$$[Q, \gamma_4]_- = 0. \tag{14}$$

Согласно лемме Шура из (14) вытекает, что матрица γ_4 либо кратна единичной, либо имеет по меньшей мере скалярный ящик по диагонали размерностью $n \times n$, $n \geqslant 2$. Это означает, что у матрицы есть кратные ненулевые корни.

Докажем теперь, что повторяющиеся корни матрицы γ_4 существуют независимо от повторяющихся корней, существование которых отражено в определении γ_4 (см. формулу П. 1) единичными клетками I_{2S+1} и обусловлено коммутацией γ_4 с генераторами группы пространственных вращений O(3).

Доказательство будем проводить методом от противного. Предположим, что инвариантность уравнения (1) относительно преобразований (12), может быть достигнута и без наличия кратных корней у спиновых блоков C^S матрицы γ_4.

В этом случае матрица преобразований Q может иметь только следующий вид:

$$Q = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & I_{(S)} \times Q_{2S+1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $I_{(S)}$ — единичная матрица той же размерности, что и спиновый блок C^S в (П. 1), Q_{2S+1} — произвольная невырожденная матрица размерности $2S+1$. Поскольку с матрицей Q (15) должны коммутировать одновременно все матрицы γ_μ, то матрицы γ_i, $i = 1, 2, 3$ должны иметь ту же структуру, что и матрица γ_4 и, следовательно, коммутировать с генераторами группы O(3). Последнее, однако, противоречит условию O(3) инвариантности уравнений (1).

Таким образом, кратные корни матрицы γ_4, обусловленные инвариантностью РВУ относительно преобразований (12) существуют независимо от кратных корней, выраженных в (П. 1) единичными клетками I_{2S+1} и, следовательно, присущи спиновым блокам C^S матрицы γ_4.

Докажем теперь, что *все* корни спиновых блоков γ_4 должны быть одинаковыми (с точностью до знака). Согласно (14) должно выполняться равенство

$$Q\gamma_4\psi_i^\pm = \gamma_4 Q\psi_i^\pm \tag{16}$$

для всех собственных векторов $\psi_i^\pm$ матрицы $\gamma_4(\gamma_4\psi_i^\pm = \pm\lambda_i\psi_i^\pm)$, где знаки "+" и "−" у функции $\psi_i^\pm$ отвечают состояниям частицы (λ_i) и античастицы $(-\lambda_i)$. Поскольку Q является невырожденной матрицей, имеет ту же размерность, что и γ_4 и действует в том же пространстве функций, что и γ_4, имеем

$$Q\gamma_4\psi_i^\pm = \pm Q\lambda_i\psi_i^\pm = \pm\lambda_i \sum_k a_{ik}^\pm \psi_k^\pm \tag{17}$$

где суммирование ведется по всем k, для которых $a_{ik}^\pm \neq 0$. С другой стороны

$$\gamma_4 Q\psi_i^\pm = \gamma_4 \sum_k a_{ik}^\pm \psi_k^\pm = \pm \sum_k a_{ik}^\pm \lambda_k \psi_k^\pm. \tag{18}$$

Сравнивая (17) и (18), в силу (16) получаем

$$\sum_k a_{ik}^\pm (\lambda_i - \lambda_k)\psi_k^\pm = 0, \tag{19}$$

откуда следует, что $\lambda_i = \lambda_k$.

Итак, действительно все корни спиновых блоков C^S матрицы γ_4 одинаковы с точностью до знака, причем этот единственный (и обязательно кратный) корень спиновых блоков не должен быть равен нулю, поскольку такой случай является физически бессодержательным.

Достаточность. Матрица γ_4 имеет по условию структуру:

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & C^S \times I_{2S+1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \quad C^S = \begin{bmatrix} \lambda & & & & & \\ & \lambda & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -\lambda & & \\ & & & & -\lambda & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{20}$$

Матрицу Q, коммутирующую с γ_4 (20), выбираем в виде:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{(0)} & & & & \\ & Q_{(1)} \times I_3 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & Q_{(S)} \times I_{2S+1} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{21}$$

(для определенности считаем спин частицы целым) и $Q_{(S)}$ матрица той же размерности, что и C^S, причем

$$Q_{(S)} = \begin{pmatrix} Q^+_{(S)} & \\ & Q^-_{(S)} \end{pmatrix} \tag{22}$$

где $Q^\pm_{(S)}$ — произвольные невырожденные квадратные матрицы одинаковой размерности, равной кратности корня $\pm\lambda$. В пространстве всех собственных векторов $R = \{\psi^\pm_{\lambda S m}\}$ матрицы γ_4, где λ определяет значение массы частицы, S — значение спина, m — значение проекции спина, преобразования группы Лоренца связывают между собой векторы, относящиеся к одному и тому же собственному значению λ, тогда как преобразования (21) при отсутствии вырождения по собственным значениям λ у матрицы γ_4 связывают между собой собственные векторы $\psi^\pm_{\lambda S m}$, относящиеся к различным собственным значениям λ, т.е. их действие определено для всего пространства R. В общем случае преобразования Q (21) и группы Лоренца не коммутируются, поскольку неприводимые представления группы преобразований Q содержат частицы с различными значениями спина. Очевидно, однако, что преобразование $q' = eqe^{-1}$ где e — преобразование Лоренца и $q \in \{Q_i\}$ также принадлежит группе преобразований Q. Последнее, в частности, предполагает, что

$$[Q_i, J_k] \in \{Q_l\} \tag{23}$$

где Q_i — генераторы преобразований Q (21), $Q = \exp(i\theta_i\theta_i)$, J_k — генераторы лоренцевских вращений. Поскольку

$$\gamma_i = [J_i, \gamma_4] \tag{24}$$

то при условии вырождения корней матрицы γ_4, т.е. когда $[Q, \gamma_4] = 0$, учитывая (23) и (24), имеем:

$$[Q, \gamma_i] = [Q, [J_i, \gamma_4]] = [\gamma_4, [Q, J_i]] = 0. \qquad (25)$$

Теорема доказана.

Лемма 1. *Все релятивистские волновые уравнения, инвариантные относительно группы преобразований симметрии* (12), *имеют диракоподобную форму, т.е. матрицы этих уравнений удовлетворяют алгебре Дирака.*

Инвариантность уравнения (1) относительно преобразований (12) предполагает, что матрица γ_4 имеет минимальный полином вида:

$$(\gamma_4)^2 - 1 = 0. \qquad (26)$$

Факт инвариантности диракоподобных волновых уравнений относительно преобразований (12) достаточно известен. Из доказанной теоремы в то же время следует, что только такие уравнения и могут обладать подобной инвариантностью.

Лемма 2. *Если матрица γ_4 релятивистского волнового уравнения, инвариантного относительно группы преобразований внутренней симметрии* (12), *имеет только один спиновой блок, то это уравнение описывает систему фермионов со спином* 1/2 *и преобразования* (12) *коммутируются с группой Лоренца.*

Первое из утверждений леммы является очевидным следствием леммы 1. При наличии только одного спинового блока значение S является фиксированным и операторы лоренцевских вращений действуют только на индекс m, в то время как преобразования Q (21) в силу своего определения связывают между собой векторы $\psi_{\lambda S m}$ с одним и тем же значением m. Отсюда следует, что преобразования (12) коммутируются с группой Лоренца.

Лемма 3. *Теорема справедлива при включении взаимодействия с электромагнитным полем минимальным образом:* $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieC_\mu$, где C_μ — *электромагнитные потенциалы.*

Обсуждаемая симметрия может быть перенесена и на случай нелинейных обобщений РВУ. Например, нелинейное обобщение уравнений В. П. следующего типа

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa)\psi + \eta\psi(\bar{\psi}\psi) = 0 \qquad (27)$$

инвариантно относительно подгруппы диальных преобразований SO(4, 2) (которая является и группой инвариантности лагранжиана теории (см. [10])).

6. О дополнительной инвариантности РВУ

Определение симметрий уравнения (1) может быть расширено, именно (см. [12])

$$[Q, \hat{A}]\psi = 0 \qquad (28)$$

где $\hat{A} = \gamma_\mu \partial_\mu + \kappa$. Подобное определение включает в себя все известные типы симметрии, в том числе и симметрии вида (12). Для ряда известных уравнений существование такой дополнительной (не связанной с преобразованиями пространственно-временных координат) инвариантности было установлено в работах [13, 14]. Предложенный здесь подход основан на приведении исследуемых уравнений к гамильтоновой форме и последующей диагонализации гамильтониана. Формулировка РВУ в рамках подхода Гельфанда-Яглома позволяет установить причину существования дополнительной инвариантности и доказать следующую теорему: *Теорема*: *Все релятивистские волновые уравнения вида* (1) *обладают дополнительной инвариантностью.*

Для доказательства достаточно записать уравнение (1) в импульсном представлении и перейти в систему покоя частицы с помощью преобразования $T_g \equiv T(\Lambda_{\mu\nu})$ представления группы Лоренца волновой функции ψ, где $\Lambda_{\mu\nu} p_\nu = p'_\mu$, $p'_\mu = (0, 0, 0, p_4)$. В результате имеем

$$(\gamma_4 p'_4 + \kappa)\varphi = 0 \tag{29}$$

где $\varphi = T_g \psi$. Матрица γ_4 всегда имеет кратные корни (в их число включаются и равные нулю), связанные с коммутацией матрицы γ_4 с генераторами пространственных вращений (см. формулу (П.1)). Отсюда следует, что любая произвольная матрица Q вида

$$Q = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & I_{(S)} \times Q_{2S+1} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \tag{30}$$

где $I_{(S)}$ — единичная матрица, размерность которой совпадает с размерностью блока C^S, Q_{2S+1} — произвольная комплексная квадратная невырожденная матрица размерности $2S+1$, коммутирует с матрицей γ_4.

Очевидно, что если φ является решением уравнения (29), то и $Q\varphi$ также является решением этого уравнения, т.е. матрицы Q образуют группу симметрии уравнения (29). Но тогда операторы $Q^L = T_g^{-1} Q T_g$ также образуют группу симметрии уравнения (1), поскольку удовлетворяют условию (28).

Случай уравнений для частиц со спином $S = 0$ не представляет исключения. Опираясь на требование релятивистской инвариантности, нетрудно показать (см. [1, 2]), что помимо блока C^0 в матрице γ_4 должен присутствовать по меньшей мере еще один спиновой блок C^1 (с нулевыми корнями) с сопутствующей ему матричной клеткой I_3. Но с такой матрицей γ_4 всегда коммутирует оператор

$$Q = \begin{pmatrix} I_{(0)} & \\ & I_{(1)} \times Q_3 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

что соответствует дополнительной инвариантности, описываемой группой GL(3, C). Теорема доказана.

Как следует из доказательства теоремы, непосредственной причиной дополнительной инвариантности всех релятивистских волновых уравнений первого порядка, описывающих частицы с ненулевой массой покоя и произвольным спином, является их явная O(3) симметрия, которая обусловливает наличие кратных корней у характеристического полинома (см. [1, 2]). Подобную инвариантность можно назвать внутренней симметрией РВУ в системе покоя частицы.

Для определения группы дополнительной инвариантности любого РВУ вида (1) достаточно знать лишь структуру корней характеристического полинома матрицы γ_4. При формулировании теории РВУ в рамках подхода Гельфанда-Яглома эта структура автоматически известна[2], а значит отпадает необходимость в каких--либо специальных вычислениях.

Для уравнения Дирака, например, матрица γ_4 которого имеет корни $\{+1, +1, -1, -1\}$, преобразования симметрии данного типа образуют группу $GL(2, C) \times GL(2, C)$. Уравнение Даффина-Кеммера для скалярной частицы с корнями $\{+1, -1, 0, 0, 0\}$ матрицы γ_4 соответствует группа симметрии $GL(3, C)$; уравнению Даффина-Кеммера для векторной частицы с корнями $\{+1, +1, +1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0\}$ матрицы γ_4 соответствует группа $GL(3, C) \times GL(3, C) \times GL(4, C)$ и т.д.

7. *Заключение*

Диальная симметрия, в отличие от дополнительной инвариантности, требует выхода за рамки известных РВУ и ее существование обусловлено увеличением числа степеней свободы в рамках пространственно-временного описания квантового объекта. Такое направление, как отмечено в [15], может оказаться перспективным при описании кварковых систем. Несомненный интерес представляет изучение уравнений, описывающих частицы с мультиспинами 0,1 и 1/2, 3/2, волновые функции которых могут быть представлены в виде прямого произведения двух и трех биспиноров. Привлекательна физически интересная возможность рассмотрения таких частиц в рамках составных моделей. Заметим также, что полная группа инвариантности уравнений В.П. представляет собой полупрямое произведение группы Пуанкаре и группы диальных преобразований, т.е. соответствует структуре, которую необходимо иметь при совместном описании пространственно--временных и унитарных симметрий типа SU(6) в физике адронов [16].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Любое релятивистское волновое уравнение, соответствующее частицам с ненулевой массой, может быть записано в форме (1), где γ_μ, $\mu = 1 \ldots 4$, — четверка квадратных матриц размерностью $N \times N$, N — число компонент волновой функции ψ (которое может быть и бесконечным), κ — вещественная константа.

---

[2] Структура корней матрицы γ_4 для наиболее известных РВУ указана в [1].

Матрицы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, выражаются через γ_4, которая в базисе Гельфанда-Яглома (каноническом базисе) имеет вид:

$$\gamma_4 = \begin{bmatrix} C^0 \times I_1 & & & & \\ & C^1 \times I_3 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & C^S \times I_{2S+1} & \\ & & & & \dots \end{bmatrix}; \quad \gamma_4 = \begin{bmatrix} C^{1/2} \times I_2 & & & & \\ & C^{3/2} \times I_4 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & C^S \times I_{2S+1} & \\ & & & & \dots \end{bmatrix} \qquad (\text{П.1})$$

для целого и полуцелого спинов соответственно. Здесь C^S — спиновой блок, отвечающий спину S, I_{2S+1} — единичная матрица размерности $2S+1$. Нижние индексы блока $C^S = C^S_{\tau_i \tau_j}$ пробегают те неприводимые представления $\tau \sim (l, l')$ собственной группы Лоренца, для которых при фиксированном S выполняется условие $|l'-l''| \leqslant S \leqslant |l'+l''|$, где пара чисел l', l'' задает представление τ. Если блок C^S, входящий в матрицу γ_4, имеет ненулевые корни (собственные значения), то спин S присущ частице; если же блок C^S имеет только нулевые корни или он вообще отсутствует в матрице γ_4, то спином S частица не обладает. Ненулевые корни матрицы γ_4 определяют значения массы частицы.

Представления $\tau_i \sim (l_i', l_i'')$, $\tau_\gamma \sim (l_\gamma', l_\gamma'')$, для которых $C^S_{\tau_i \tau_\gamma} \neq 0$, называются зацепляющимися. Представления зацепляются, если $l_i' = l_\gamma \pm \frac{1}{2}$, $l_i'' = l_\gamma'' \pm \frac{1}{2}$. Набор неприводимых представлений группы Лоренца, на основе которых строится данное волновое уравнение, образует так называемую схему зацеплений. При распадении схемы зацеплений распадается и соответствующее уравнение. Если в схеме зацеплений хотя бы одно неприводимое представление содержится два или более раз, то говорят об РВУ с кратными представлениями.

Требование инвариантности РВУ (1) относительно собственной группы Лоренца накладывает следующие ограничения на элементы матрицы γ_4:

$$\begin{aligned}
C^S_{\tau_i \tau_\gamma} &= C_{\tau_i \tau_\gamma}[(S+l_{i+}+2)(S-l_{i+}+1)]^{1/2}, &&\text{если}\quad l_{i+} = l_{\gamma+}-1, \quad l_{i-} = l_{\gamma-},\\
C^S_{\tau_i \tau_\gamma} &= C_{\tau_i \tau_\gamma}[(S+l_{i+}+1)(S-l_{i+})]^{1/2}, &&\text{если}\quad l_{i+} = l_{\gamma+}+1, \quad l_{i-} = l_{\gamma-},\\
C^S_{\tau_i \tau_\gamma} &= C_{\tau_i \tau_\gamma}[(S-l_{i-}+1)(S+l_{i-})]^{1/2}, &&\text{если}\quad l_{i+} = l_{\gamma+}, \quad l_{i-} = l_{\gamma-}+1,\\
C^S_{\tau_i \tau_\gamma} &= C_{\tau_i \tau_\gamma}[(S+l_{i+}+1)(S-l_{i-})]^{1/2}, &&\text{если}\quad l_{i+} = l_{\gamma+}, \quad l_{i-} = l_{\gamma-}-1,\\
C^S_{\tau_i \tau_\gamma} &= C_{\tau_i \tau_\gamma}(S+\tfrac{1}{2}), &&\text{если}\quad l_{i+} = l_{\gamma+}, \quad l_{i-} = l_{\gamma-} \qquad (\text{П.2})
\end{aligned}$$

где $l_{i-} = |l_i'-l_i''|$, $l_{i+} = l_i'+l_i''$, $l_{j-} = |l_\gamma'-l_\gamma''|$, $l_\gamma = l_\gamma'+l_\gamma''$, $C_{\tau_i \tau_\gamma}$ — произвольные комплексные числа в рассмотренных случаях, а в остальных случаях равные нулю.

Требование инвариантности уравнения (1) относительно полной группы Лоренца приводит к появлению в схеме зацеплений наряду с представлением $\tau \sim (l', l'')$, представления $\dot{\tau} \sim (l'', l')$, называемого сопряженным к τ (в схеме зацеплений

(3) это выражается в присутствии представлений (0, 1) и (1, 0)). При этом на числа $C_{\tau_i\tau_\gamma}$ налагаются условия

$$C_{\tau_i\tau_\gamma} = C_{\dot{\tau}_i\dot{\tau}_\gamma}, \quad \text{если} \quad \dot{\tau}_i = \tau_i, \quad \dot{\tau}_\gamma = \tau_\gamma$$

$$C_{\tau_i\tau_\gamma} = \pm C_{\dot{\tau}_i\dot{\tau}_\gamma}, \quad \text{если} \quad \dot{\tau}_i = \tau_i, \quad \dot{\tau}_\gamma \neq \tau_\gamma \quad \text{или} \quad \dot{\tau}_i \neq \tau_i, \quad \dot{\tau}_\gamma = \tau. \qquad (\Pi.1)$$

Для построения лагранжиана используется инвариантная билинейная форма $(\psi, \psi) = \psi^+\eta\psi$, где η — матрица билинейной формы. В базисе Гельфанда-Яглома матрица η имеет такую же структуру, что и γ_4. В блоках $\eta^S = \eta^S_{\tau_i\tau_\gamma}$ отличными от нуля являются лишь элементы $\eta^S_{\tau\dot{\tau}} = \eta^S_{\dot{\tau}\tau} = -\eta^{S-1}_{\dot{\tau}\tau}$, причем, не уменьшая общности, можно выбирать $\eta^S_{\tau\dot{\tau}} = \pm 1$. Требование возможности лагранжевой формулировки уравнения (1) приводит к условию

$$C^S_{\tau_i\tau_\gamma}\eta^S_{\tau_\gamma\dot{\tau}_\gamma} = \bar{C}^S_{\dot{\tau}_\gamma\dot{\tau}_i}\eta^S_{\tau_i\dot{\tau}_i}, \qquad (\Pi.4)$$

где „—“ означает комплексное сопряжение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представление группы вращений и группы Лоренца*, Физматгиз, Москва 1958.
[2] Ф. И. Федоров, *Группа Лоренца*, Наука, Москва 1979.
[3] А. А. Боргардт, *ЖЭТФ* **24**, 284 (1953); **45**, 116 (1963).
[4] H. Feshbach, A. Nichols, *Ann. Phys.* (USA) **4**, 448 (1958).
[5] E. Durand, *Phys. Rev.* **D11**, 3405 (1975).
[6] А. Б. Пестов, *Теоретич. математич. физика* **34**, 48 (1978).
[7] V. I. Strazhev, *Acta Phys. Pol.* **B9**, 449 (1978).
[8] V. I. Strazhev, P. L. Schkolnikov, *Acta Phys. Pol.* **B10**, 121 (1979).
[9] С. И. Круглов, В. И. Стражев, *Известия вузов СССР, физика* № 4, 81 (1978); № 5, 93 (1979).
[10] А. А. Богуш, С. И. Круглов, В. И. Стражев, *Доклады Академии наук БССР* **22**, № 10 (1978).
[11] Б. Г. Конопельченко, *Элемент. частицы и атомное ядро* **8**, 135 (1977).
[12] И. А. Малкин, В. И. Манько, *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*, Наука, Москва 1979.
[13] В. И. Фущич, *Доклады Академии наук СССР* **246**, 846 (1979).
[14] Сборник *Теоретико-групповые методы в математической физике*, Институт математики АН УССР, Киев 1978.
[15] В. Л. Гинзбург, В. И. Манько, *Элемент. частицы и атомное ядро* **7**, 1 (1976).
[16] P. Budini, C. Fronsdal, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 968 (1965).