Vol. B12 (1981) ACTA PHYSICA POLONICA No 8

ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ СЛЕДУЮЩИЕ ИЗ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ С ВЫСШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ*

LORENTZ INVARIANT EQUATIONS OF MOTION WHICH FOLLOW FROM GRAVITATIONAL FIELD EQUATIONS WITH HIGHER DERIVATIVES

Ч. Янкевич, Р. Ампель

Высшая Педагогическая Школа, Жешув**

(Поступила в редакцию 3-го февраля 1981 г.)

Approximate Lorentz invariant equations of motion which follow from a gravitational Lagrangian function with higher derivatives are derived. It is shown that in the nonrelativistic limit the equations go over into the Newtonian equations of motion for all values of the additional parameters in the Lagrangian.

PACS numbers: 04.20.Me

1. *Введение*

Самые общие уравнения поля тяготения, линейные относительно четвертых производных метрического тензора, можно получить из вариационного принципа с функцией Лагранжа [1, 2]

$$L = \kappa_0 L_0 + \kappa_1 L_1 + \kappa_2 L_2 + \kappa_3 L_3 + \kappa_4 L_4. \tag{1}$$

где

$$L_0 = \sqrt{-g}, \tag{2}$$

$$L_1 = \sqrt{-g}\, g_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}, \tag{3}$$

$$L_2 = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R_{\mu\nu}, \tag{4}$$

$$L_3 = \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu} R_{\beta\nu}, \tag{5}$$

$$L_4 = \sqrt{-g}\, g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g^{\varrho\sigma} g^{\lambda\tau} R^{\alpha}{}_{\mu\varrho\lambda} R^{\beta}{}_{\nu\sigma\tau}, \tag{6}$$

* Субсидировано польским Министерством Науки, Высшего Образования и Техники, проблема M.P.I.7: „Поля, частицы, пространство-время“.

** Address: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Turkienicza 24, 35-959 Rzeszów, Poland.

причем $\kappa_0 - \kappa_4$ постоянные. (Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, по этим повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 0 до 3). В работах [3—8] рассматриваются решения уравнений поля в пустоте, следующие в отдельности из вариационных принципов с функциями Лагранжа (4—6). В частности доказывается, что решение Шварцшильда совместно с этими уравнениями.

В работе Гаваса [3] исследуются также уравнения поля, соответствующие в отдельности функциям Лагранжа (4)—(6), но с тензором энергии-импульса источников поля. Доказывается там, что уравнения движения, вытекающие из таких уравнений поля в предельном переходе не совместны с ньютоновскими уравнениями движения. Отсюда следует неприменимость функции Лагранжа (1) с коэффициентом $\kappa_1 \neq 0$. Таким образом всякое обобщение уравнений Эйнштейна на уравнения, содержащие линейно четвертые производные метрического тензора, должно содержать по крайней мере одну новую постоянную κ_1.

В настоящей работе мы выводим приближенные, лоренц-инвариантные уравнения движения тел из уравнений поля, соответствующих самой общей функции Лагранжа (1), без космологической постоянной κ_0. Показываем также, что из полученных уравнений движения в предельном переходе следуют ньютоновские уравнения движения независимо от значений введенных новых параметров.

2. *Уравнения поля и уравнения движения*

Уравнения поля, соответствующие функции Лагранжа (1), можно написать в виде

$$G^{\lambda\tau} + b^{-2}(\nabla_\varrho \nabla^\varrho G^{\lambda\tau} - \nabla_\varrho \nabla^\lambda G^{\tau\varrho} - \nabla_\varrho \nabla^\tau G^{\lambda\varrho})$$

$$+\tfrac{1}{3}(a^{-2}-b^{-2})(g^{\lambda\tau}\nabla_\varrho\nabla^\varrho G - \nabla^\lambda\nabla^\tau G) + Q^{\lambda\tau} = -\frac{8\pi k}{c^2}T^{\lambda\tau}, \tag{7}$$

где

$$Q^{\lambda\tau} = -\tfrac{1}{3}(a^{-2}-4b^{-2})(GG^{\lambda\tau} - \tfrac{1}{4}G^2 g^{\lambda\tau}) - 2b^{-2}(G^\lambda_\varrho G^{\varrho\tau} - \tfrac{1}{4}G^{\varrho\sigma}G_{\varrho\sigma}g^{\lambda\tau}). \tag{8}$$

Здесь мы ввели для удобства вместо постоянных κ_1, κ_2 и κ_3 другие постоянные a, b и kc^{-2} и учли известную зависимость между вариациями функции L_2, L_3 и L_4 ([2], § 16). Согласно предположению, мы приняли также, что космологическая постоянная $\kappa_0 = 0$.

Во всех формулах мы используем следующие обозначения

$$G^{\lambda\tau} = R^{\lambda\tau} - \tfrac{1}{2}Rg^{\lambda\tau}, \qquad G = g_{\lambda\tau}G^{\lambda\tau}, \tag{9}$$

$$R_{\lambda\tau} = R^\mu{}_{\lambda\tau\mu}, \qquad R = g_{\lambda\tau}R^{\lambda\tau}, \tag{10}$$

$$R^\mu{}_{\lambda\tau\nu} = \partial_\tau \Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\mu_{\lambda\tau} + \Gamma^\mu_{\varrho\tau}\Gamma^\varrho_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\varrho\nu}\Gamma^\varrho_{\lambda\tau}, \tag{11}$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \tag{12}$$

Согласно Инфельду и Плебаньскому ([10], гл. I, §§ 3, 4) материальные тела будем рассматривать как особенности поля охарактеризованные тензором энергии--импульса источников поля в виде

$$T^{\lambda\tau} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \int \sum_{A} m_A \delta(x-\xi_A) \frac{d\xi_A^\lambda}{d\sigma_A} \frac{d\xi_A^\tau}{d\sigma_A} d\sigma_A, \tag{13}$$

где

$$d\sigma_A^2 = \overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} d\xi_A^\alpha d\xi_A^\beta, \tag{14}$$

$$\overset{A}{\tilde{g}}_{\alpha\beta} = \int g_{\alpha\beta} \delta(x-\xi_A)(dx). \tag{15}$$

Здесь $\delta(x-\xi)$ произведение четырех δ-функции Дирака, $(\xi_A^\mu) = (\xi_A^0, \bar{\xi}_A)$ пространство-временные координаты тел и $A = 1, 2, \ldots, N$.

Поскольку из общей ковариантности уравнений (7) следует, что ковариантная дивергенция левой стороны этих уравнений исчезает, получаем

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\tau} = 0. \tag{16}$$

Подстановка (13) в (16) дает ([10], гл, I, § 6)

$$\frac{d^2\xi_A^\mu}{d\sigma_A^2} + \overset{A}{\tilde{\Gamma}}{}^\mu_{\alpha\beta} \frac{d\xi_A^\alpha}{d\sigma_A} \frac{d\xi_A^\beta}{d\sigma_A} = 0, \tag{17}$$

где

$$\overset{A}{\tilde{\Gamma}}{}^\mu_{\alpha\beta} = \int \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \delta(x-\xi_A)(dx). \tag{18}$$

Уравнения поля (7) можно написать в другой эквивалентной форме

$$R^{\lambda\tau} + b^{-2}\nabla_\varrho\nabla^\varrho R^{\lambda\tau} + \tfrac{1}{6}(a^{-2}-b^{-2})g^{\lambda\tau}\nabla_\varrho\nabla^\varrho R + \tfrac{1}{3}(a^{-2}-b^{-2})\nabla^\lambda\nabla^\tau R$$
$$+\theta^{\lambda\tau} = -\frac{8\pi k}{c^2} T_*^{\lambda\tau}, \tag{19}$$

где

$$\theta^{\lambda\tau} = \tfrac{1}{3}(a^{-2}+2b^{-2})(RR^{\lambda\tau} - \tfrac{1}{4}R^2 g^{\lambda\tau}) - 2b^{-2}(R^{\lambda\varrho\sigma\tau}R_{\varrho\sigma} - \tfrac{1}{4}R^{\varrho\sigma}R_{\varrho\sigma}g^{\lambda\tau}), \tag{20}$$

$$T_*^{\lambda\tau} = T^{\lambda\tau} - \tfrac{1}{2}Tg^{\lambda\tau}, \qquad T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}. \tag{21}$$

Из уравнений (19) следует

$$R + a^{-2}\nabla_\varrho\nabla^\varrho R = \frac{8\pi k}{c^2} T. \tag{22}$$

В гармонической системе координат

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = 0 \tag{23}$$

имеем

$$R_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu g_{\alpha\beta} - g^{\mu\nu}g^{\varrho\sigma}\partial_\mu g_{\alpha\varrho}\partial_\nu g_{\beta\sigma} + \Gamma_\alpha{}^{\mu\nu}\Gamma_{\beta\mu\nu}, \tag{24}$$

причем

$$\Gamma_\alpha{}^{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}g^{\mu\varrho}g^{\nu\sigma}\Gamma^\beta_{\varrho\sigma}, \qquad \Gamma_{\beta\mu\nu} = g_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}. \tag{25}$$

Поскольку уравнения поля и уравнения движения будем решать методом последовательных приближений, начиная с псевдоевклидовой метрики, удобно ввести собственное время в смысле частной теории относительности

$$ds_A^2 = \eta_{\mu\nu}d\xi^\mu_A d\xi^\nu_A. \tag{26}$$

Используя (26) из (13), получаем

$$T_*^{\lambda\tau} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\int \sum_A m_A\delta(x-\xi_A)\left(\frac{ds_A}{d\sigma_A}\, u^\lambda_A u^\tau_A - \tfrac{1}{2}\,\frac{d\sigma_A}{ds_A}\, g^{\lambda\tau}\right) ds_A, \tag{27}$$

где

$$\left(\frac{d\sigma_A}{ds_A}\right)^2 = 1 + (\overset{A}{\tilde{g}}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu})u^\mu_A u^\nu_A, \tag{28}$$

причем

$$u^\mu_A = \frac{d\xi^\mu_A}{ds_A}, \qquad \eta_{\mu\nu}u^\mu_A u^\nu_A = 1. \tag{29}$$

Простое преобразование уравнений (17) дает

$$\frac{d^2\xi^\mu_A}{ds_A^2} + \overset{A}{\tilde{F}}{}^\mu_* = 0, \tag{30}$$

где

$$\overset{A}{\tilde{F}}{}^\mu_* = \overset{A}{\tilde{F}}{}^\mu - \eta_{\alpha\beta}\overset{A}{\tilde{F}}{}^\alpha u^\beta_A u^\mu_A, \qquad \overset{A}{\tilde{F}}{}^\alpha = \overset{A}{\tilde{\Gamma}}{}^\alpha_{\varrho\sigma}u^\varrho_A u^\sigma_A. \tag{31}$$

3. Приближенное решение уравнений поля

Для решения уравнений поля (19) применим разложение метрического тензора в степенные ряды

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \lambda \underset{(1)}{h_{\alpha\beta}} + \lambda^2 \underset{(2)}{h_{\alpha\beta}} + \ldots, \qquad \lambda = kc^{-2}. \tag{32}$$

Из этого разложения следует

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \lambda \underset{(1)}{h^{\mu\nu}} - \ldots, \qquad \underset{(1)}{h^{\mu\nu}} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\underset{(1)}{h_{\alpha\beta}},$$

$$\sqrt{-g} = 1 + \tfrac{1}{2}\,\lambda\eta^{\alpha\beta}\underset{(1)}{h_{\alpha\beta}} + \ldots \tag{33}$$

Поскольку

$$\underset{(1)}{R}_{\lambda\tau} = \tfrac{1}{2}\,\Box \underset{(1)}{h}_{\lambda\tau}, \tag{34}$$

то из (19) получаем

$$(\Box + b^{-2}\Box\Box)\underset{(1)}{h}_{\lambda\tau} + \tfrac{1}{3}(a^{-2}-b^{-2})\eta_{\lambda\tau}\Box \underset{(1)}{R} + \tfrac{2}{3}(a^{-2}-b^{-2})\partial_\lambda\partial_\tau \underset{(1)}{R} = -16\pi \underset{(0)}{T}_{*\lambda\tau} \tag{35}$$

причем $\underset{(1)}{R}$ удовлетворяет уравнению

$$\underset{(1)}{R} + a^{-2}\Box \underset{(1)}{R} = 8\pi \underset{(0)}{T} \tag{36}$$

Здесь мы используем обозначение $\Box = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$.

Запаздывающее решение уравнения (36) имеет вид ([11], § 20).

$$\underset{(1)}{R} = 2a^2 \int \frac{\delta(x^0 - x'^0 - |\bar{x} - \bar{x}'|)}{|\bar{x} - \bar{x}'|}\,\underset{(0)}{T}(x')\,(dx')$$

$$-2a^3 \int \int_0^\infty \frac{\delta(x^0 - x'^0 - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{x}'|^2})}{\sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{x}'|^2}}\,\underset{(0)}{T}(x') J_1(a\mu)\,d\mu(dx'), \tag{37}$$

где $J_1(a\mu)$ функция Бесселя.

Разлагая пространство-временные координаты в степенные ряды

$$\xi^\mu_A = \underset{(0)}{\xi}{}^\mu_A + \lambda \underset{(1)}{\xi}{}^\mu_A + \ldots \tag{38}$$

и вводя параметр

$$d\underset{(0)}{s}{}^2_A = \eta_{\alpha\beta}\, d\underset{(0)}{\xi}{}^\alpha_A\, d\underset{(0)}{\xi}{}^\beta_A, \tag{39}$$

из (27) и (28) получаем

$$\underset{(0)}{T}{}^{\alpha\beta} = \int \sum_A m_A \frac{d\underset{(0)}{\xi}{}^\alpha_A}{d\underset{(0)}{s}_A} \frac{d\underset{(0)}{\xi}{}^\beta_A}{d\underset{(0)}{s}_A}\,\delta(x - \underset{(0)}{\xi}_A)\,d\underset{(0)}{s}_A. \tag{40}$$

Уравнения движения (30) в нулевом приближении дают

$$\frac{d^2\underset{(0)}{\xi}{}^\alpha_A}{d\underset{(0)}{s}{}^2_A} = 0, \qquad \frac{d\underset{(0)}{\xi}{}^\alpha_A}{d\underset{(0)}{s}_A} = \underset{(0)}{u}{}^\alpha_A,$$

$$\underset{(0)}{\xi}{}^\alpha_A = \underset{(0)}{u}{}^\alpha_A \underset{(0)}{s}_A + a^\alpha_A, \qquad \eta_{\alpha\beta}\underset{(0)}{u}{}^\alpha_A \underset{(0)}{u}{}^\beta_A = 1, \tag{41}$$

где $\underset{(0)}{u}{}^\alpha_A$ и a^α_A постоянные интегрирования.

Таким образом имеем

$$\underset{(0)}{T_{\alpha\beta}} = \sum_A m_A \underset{(0)}{u_{A\alpha}}\,\underset{(0)}{u_{A\beta}} \int \delta(x-\underset{(0)}{\xi_A})d\underset{(0)}{s_A}, \tag{42}$$

$$\underset{(0)}{T} = \sum_A m_A \int \delta(x-\underset{(0)}{\xi_A})d\underset{(0)}{s_A}, \qquad \underset{(0)}{u_{A\alpha}} = \eta_{\alpha\mu}\underset{(0)}{u^{\mu}_A}. \tag{43}$$

Подстановка (43) в (37) дает

$$\underset{(1)}{R} = 2a^2 \sum_A m_A \int \frac{\delta(x^0-\underset{(0)}{\xi^0_A}-|\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}_A}|)}{|\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}_A}|}\,d\underset{(0)}{s_A}$$

$$-2a^3 \sum_A m_A \int\int_0^{\infty} \frac{\delta\left(x^0-\underset{(0)}{\xi^0_A}-\sqrt{\mu^2+|\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}_A}|^2}\right)}{\sqrt{\mu^2+|\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}_A}|^2}}\,J_1(a\mu)d\mu d\underset{(0)}{s_A}. \tag{44}$$

Вводя новые переменные

$$S^{(-)}_A = x^0-\underset{(0)}{\xi^0_A}-|\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}_A}|, \tag{45}$$

$$S^{(*)}_A = x^0-\underset{(0)}{\xi^0_A}-\sqrt{\mu^2+|\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}_A}|^2} \tag{46}$$

и выполняя интегрирование в (44), получаем

$$\underset{(1)}{R} = 2a^2 \sum_A m_A \frac{1}{\varrho^{(-)}_A} - 2a^3 \sum_A m_A \int_0^{\infty} \frac{J_1(a\mu)}{\varrho^{(*)}_A}\,d\mu, \tag{47}$$

где

$$\varrho_A = \eta_{\alpha\beta}(x^\alpha-\underset{(0)}{\xi^\alpha_A})\underset{(0)}{u^\beta_A},$$

$$\varrho^{(-)}_A = [\varrho_A]_{s_A^{(-)}=0}, \qquad \varrho^*_A = [\varrho_A]_{s_A^*=0}. \tag{48}$$

Подстановка (41) в уравнения

$$x^0-\underset{(0)}{\xi^0_A}(\underset{(0)}{s^{(-)}_A})-|\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}_A}(\underset{(0)}{s^{(-)}_A})| = 0,$$

$$x^0-\underset{(0)}{\xi^0_A}(\underset{(0)}{s^{(*)}_A})-\sqrt{\mu^2+|\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}_A}(\underset{(0)}{s^{(*)}_A})|^2} = 0 \tag{49}$$

дает

$$\underset{(0)}{s^{(-)}_A} = -\eta_{\alpha\beta}(x^\alpha-a^\alpha_A)\underset{(0)}{u^\beta_A}-\sqrt{w_{A\alpha\beta}(x^\alpha-a^\alpha_A)\,(x^\beta-a^\beta_A)}\,,$$

$$\underset{(0)}{s^{(*)}_A} = -\eta_{\alpha\beta}(x^\alpha-a^\alpha_A)\underset{(0)}{u^\beta_A}-\sqrt{\mu^2+w_{A\alpha\beta}(x^\alpha-a^\alpha_A)\,(x^\beta-a^\beta_A)}\,, \tag{50}$$

где

$$w^{\mu\nu}_A = \underset{(0)}{u^\mu_A}\underset{(0)}{u^\nu_A}-\eta^{\mu\nu}, \qquad w_{A\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}w^{\mu\nu}_A. \tag{51}$$

Таким образом из (48) получаем

$$\varrho_A^{(-)} = \sqrt{w_{A\alpha\beta}(x^\alpha - a_A^\alpha)(x^\beta - a_A^\beta)}\,,$$
$$\varrho_A^{(*)} = \sqrt{\mu^2 + (\varrho_A^{(-)})^2}\,. \tag{52}$$

Поскольку

$$\int_0^\infty \frac{J_1(a\mu)}{\sqrt{\mu^2+(\varrho_A^{(-)})^2}}\, d\mu = \frac{a^{-1}}{\varrho_A^{(-)}}\,(1-e^{-a\varrho_A{}^{(-)}}), \tag{53}$$

то из (47) окончательно получаем

$$\underset{(1)}{R} = 2a^2 \sum_A m_A \frac{e^{-a\varrho_A{}^{(-)}}}{\varrho_A^{(-)}}\,. \tag{54}$$

Для решения уравнений (35) введем вспомогательную функцию удовлетворяющую уравнению

$$(\Box + b^{-2}\Box\Box)f = \underset{(1)}{R}. \tag{55}$$

Из (54) следует, что запаздывающее решение уравнения (55) имеет вид ([11]), § 33)

$$f = \frac{a^2 b}{2\pi} \sum_A m_A \int\int_0^\infty \frac{e^{-a\varrho_A{}'^{(-)}}}{\varrho_A'^{(-)}}\, \frac{\delta(x^0 - x'^0 - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x}-\bar{x}'|^2})}{\sqrt{\mu^2+|\bar{x}-\bar{x}'|^2}}\, J_1(a\mu)d\mu(dx'). \tag{56}$$

Вводя переменную

$$v(\mu) = x^0 - x'^0 - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x}-\bar{x}'|^2} \tag{57}$$

и учитывая, что

$$\mu = \sqrt{\eta_{\alpha\beta}(x^\alpha - x'^\alpha)(x^\beta - x'^\beta)}\,,$$
$$\frac{dv}{d\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+|\bar{x}-\bar{x}'|^2}} \tag{58}$$

для

$$v(\mu) = 0, \tag{59}$$

из (56) получаем

$$f = \frac{a^2 b}{2\pi} \sum_A m_A \int \frac{e^{-a\varrho_A{}'^{(-)}}}{\varrho_A'^{(-)}}\, \frac{J_1(a\mu)}{\mu}\,(dx'). \tag{60}$$

Выполняя интегрирование, окончательно имеем

$$f = \frac{2}{a^2 - b^2} \sum_A m_A(a^2 \Psi_A^{(b)} - b^2 \Psi_A^{(a)}), \tag{61}$$

где

$$\Psi_A^{(a)} = \frac{1-e^{-a\varrho_A{}^{(-)}}}{\varrho_A^{(-)}}, \qquad \Psi_A^{(b)} = \frac{1-e^{-b\varrho_A{}^{(-)}}}{\varrho_A^{(-)}}. \tag{62}$$

Учитывая (55), уравнения (35) можем написать в виде

$$(\Box + b^{-2}\Box\Box)\,[\underset{(1)}{h_{\lambda\tau}} + \tfrac{1}{3}(a^{-2}-b^{-2})\eta_{\lambda\tau}\Box f + \tfrac{2}{3}(a^{-2}-b^{-2})\partial_\lambda\partial_\tau f] = -16\pi \underset{(0)}{T_{*\lambda\tau}}. \tag{63}$$

Из (27) и (42) получаем

$$\underset{(0)}{T_{*\lambda\tau}} = \sum_A m_A(\underset{(0)}{u_{A\lambda}}\underset{(0)}{u_{A\tau}} - \tfrac{1}{2}\eta_{\lambda\tau})\int \delta(x-\underset{(0)}{\xi_A})\underset{(0)}{ds_A}. \tag{64}$$

Применяя к уравнениям (63) функцию Грина для запаздывающего решения, имеем

$$\underset{(1)}{h_{\lambda\tau}} = \sum_A m_A(2\eta_{\lambda\tau} - 4\underset{(0)}{u_{A\lambda}}\underset{(0)}{u_{A\tau}})\Psi_A^{(b)} - \tfrac{1}{3}(a^{-2}-b^{-2})\eta_{\lambda\tau}\Box f - \tfrac{2}{3}(a^{-2}-b^{-2})\partial_\lambda\partial_\tau f. \tag{65}$$

Из соотношений

$$\Box\Psi_A^{(b)} = b^2\,\frac{e^{-b\varrho_A{}^{(-)}}}{\varrho_A^{(-)}}, \qquad \Box\Psi_A^{(a)} = a^2\,\frac{e^{-a\varrho_A{}^{(-)}}}{\varrho_A^{(-)}} \tag{66}$$

получаем

$$\Box f = 2\,\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\sum_A m_A(\Psi_A^{(a)} - \Psi_A^{(b)}). \tag{67}$$

Подстановка (61) и (67) в (65) окончательно дает

$$\begin{aligned}\underset{(1)}{h_{\lambda\tau}} = {} & 2\sum_A m_A(\eta_{\lambda\tau} - 2\underset{(0)}{u_{A\lambda}}\underset{(0)}{u_{A\tau}})\Psi_A^{(b)} + \tfrac{2}{3}\sum_A m_A\eta_{\lambda\tau}(\Psi_A^{(a)} - \Psi_A^{(b)}) \\ & - \tfrac{4}{3}\sum_A m_A(a^{-2}\partial_\lambda\partial_\tau\Psi_A^{(a)} - b^{-2}\partial_\lambda\partial_\tau\Psi_A^{(b)}).\end{aligned} \tag{68}$$

Для $a = b$ уравнения поля (19) принимают наиболее простой вид ([2], § 16)

$$R^{\lambda\tau} + a^{-2}\nabla_\varrho\nabla^\varrho R^{\lambda\tau} + \theta^{\lambda\tau} = -\frac{8\pi k}{c^2}\,T_*^{\lambda\tau}, \tag{69}$$

где

$$\theta^{\lambda\tau} = a^{-2}(RR^{\lambda\tau} - \tfrac{1}{4}R^2g^{\lambda\tau}) - 2a^{-2}(R^{\lambda\varrho\sigma\tau}R_{\varrho\sigma} - \tfrac{1}{4}R^{\varrho\sigma}R_{\varrho\sigma}g^{\lambda\tau}). \tag{70}$$

Из (68) получаем также простое приближенное решение этих уравнений

$$\underset{(1)}{h_{\lambda\tau}} = 2\sum_A m_A(\eta_{\lambda\tau} - 2\underset{(0)}{u_{A\lambda}}\underset{(0)}{u_{A\tau}})\Psi_A^{(a)}. \tag{71}$$

При $a = \infty$ и $b = \infty$ решения (68) принимают вид

$$\underset{(1)}{h_{\lambda\tau}} = 2\sum_A m_A(\eta_{\lambda\tau} - 2\underset{(0)}{u_{A\lambda}}\underset{(0)}{u_{A\tau}})\,\frac{1}{\varrho_A^{(-)}}. \tag{72}$$

Эти решения можно тоже получить непосредственно из уравнений поля Эйнштейна

$$R^{\lambda\tau} = -\frac{8\pi k}{c^2}\,T_*^{\lambda\tau}. \tag{73}$$

4. Лоренц-инвариантные уравнения движения

С точностью до λ уравнения движения (30) дают

$$\frac{d^2\xi_A^\mu}{ds_A^2} + \lambda \underset{(1)}{\overset{A}{\tilde{F}^\mu_*}} = 0, \tag{74}$$

где

$$\underset{(1)}{\overset{A}{\tilde{F}^\mu_*}} = \underset{(1)}{\overset{A}{\tilde{F}^\mu}} - \eta_{\alpha\beta} \underset{(1)}{\overset{A}{\tilde{F}^\alpha}} \underset{(0)}{u_A^\beta} \underset{(0)}{u_A^\mu}, \qquad \underset{(1)}{\overset{A}{\tilde{F}^\alpha}} = \underset{(1)}{\overset{A}{\tilde{\Gamma}^\alpha_{\varrho\sigma}}} \underset{(0)}{u_A^\varrho} \underset{(0)}{u_A^\sigma}. \tag{75}$$

Из (12) и (75) получаем

$$\underset{(1)}{F^\alpha} = \eta^{\alpha\beta}\partial_\varrho \underset{(1)}{h_{\sigma\beta}} \underset{(0)}{u_A^\varrho} \underset{(0)}{u_A^\sigma} - \tfrac{1}{2}\,\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta \underset{(1)}{h_{\varrho\sigma}} \underset{(0)}{u_A^\varrho} \underset{(0)}{u_A^\sigma}. \tag{76}$$

Формулы (51) и (52) дают

$$\underset{(0)}{u_A^\mu}\partial_\mu \varrho_A^{(-)} = 0. \tag{77}$$

Отсюда получаем

$$\underset{(0)}{u_A^\varrho}\partial_\varrho \Psi_A^{(a)} = \underset{(0)}{u_A^\varrho}\partial_\varrho \Psi_A^{(b)} = 0. \tag{78}$$

С другой стороны имеем

$$\int \partial_\mu \Psi_A^{(a)} \delta(x - \underset{(0)}{\xi_A})\,(dx) = \int \partial_\mu \Psi_A^{(b)} \delta(x - \underset{(0)}{\xi_A})\,(dx) = 0. \tag{79}$$

Это следует из того, что эти интегралы являются лоренцовыми четыревекторами и они в соответственно сопутствующих координатных системах ($\underset{(0)}{u_A^0} = 1$, $\underset{(0)}{u_A^r} = 0$, $r = 1, 2, 3$) равны нулю.

Дифференцируя (68) и учитывая (78) и (79), из (18) и (76) получаем

$$\begin{aligned}
\underset{(1)}{\overset{A}{\tilde{F}^\alpha}} = {} & 2 \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_B(\underset{(0)}{u_A^\alpha} - 2\underset{(0)}{u_{AB}} \underset{(0)}{u_B^\alpha}) \underset{(0)}{u_A} \partial_{A\varrho} \overset{A}{\tilde{\Psi}_B^{(b)}} - \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_B(1 - 2\underset{(0)}{u_{AB}^2})\eta^{\alpha\varrho}\partial_{A\varrho} \overset{A}{\tilde{\Psi}_B^{(b)}} \\
& - \tfrac{1}{3} \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_B \eta^{\alpha\varrho}\partial_{A\varrho}(\overset{A}{\tilde{\Psi}_B^{(a)}} - \overset{A}{\tilde{\Psi}_B^{(b)}}) + \tfrac{2}{3} \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_B \underset{(0)}{u_A^\alpha} \underset{(0)}{u_A^\varrho} \partial_{\varrho A}(\overset{A}{\tilde{\Psi}_B^{(a)}} - \overset{A}{\tilde{\Psi}_B^{(b)}}) \\
& - \tfrac{2}{3} \sum_{\substack{B \\ B \neq A}} m_B \eta^{\alpha\beta} \underset{(0)}{u_A^\varrho} \underset{(0)}{u_A^\sigma} \partial_{A\beta}\partial_{A\varrho}\partial_{A\sigma}(a^{-2}\overset{A}{\tilde{\Psi}_B^{(a)}} - b^{-2}\overset{A}{\tilde{\Psi}_B^{(b)}}),
\end{aligned} \tag{80}$$

где введены обозначения

$$\partial_{A\varrho} = \frac{\partial}{\partial \underset{(0)}{\xi_A^\varrho}}, \qquad \underset{(0)}{u_{AB}} = \eta_{\alpha\beta} \underset{(0)}{u_A^\alpha} \underset{(0)}{u_A^\beta}. \tag{81}$$

Подстановка (80) в первую формулу (75) дает

$$\underset{(1)}{\overset{A}{\tilde{F}}{}^{\mu}_{*}} = \sum_{\substack{B\\ B\neq A}} m_B\Big[w_A^{\mu\varrho}+2\underset{(0)}{u_{AB}}\Big(\underset{(0)}{u_{AB}}\eta^{\mu\varrho}+\underset{(0)}{u_{AB}}\underset{(0)}{u^{\mu}_A}\underset{(0)}{u^{\varrho}_A}-2\underset{(0)}{u^{\mu}_B}\underset{(0)}{u^{\varrho}_A}\Big)\Big]\partial_{A\varrho}\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(b)}_B$$

$$+\tfrac{2}{3}\sum_{\substack{B\\ B\neq A}} m_B w_A^{\mu\varrho}\underset{(0)}{u^{\alpha}_A}\underset{(0)}{u^{\beta}_A}\partial_{A\alpha}\partial_{A\beta}\partial_{A\varrho}\Big(a^{-2}\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(a)}_B-b^{-2}\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(b)}_B\Big)+\tfrac{1}{3}\sum_{B} m_B w_A^{\mu\varrho}\partial_{A\varrho}\Big(\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(a)}_B-\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(b)}_B\Big). \tag{82}$$

Учитывая (51), легко проверить, что из (82) следует

$$\eta_{\mu\nu}\underset{(1)}{\overset{A}{\tilde{F}}{}^{\mu}_{*}}\underset{(0)}{u^{\nu}_A} = 0. \tag{83}$$

Окончательно уравнения движения (74) принимают вид

$$\frac{d^2\xi^{\mu}_A}{ds_A^2}+kc^{-2}\sum_{\substack{B\\ B\neq A}} m_B\Bigg\{\Bigg[\left(\frac{d\xi^{\mu}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\varrho}_A}{ds_A}-\eta^{\mu\varrho}\right)-4\eta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^{\alpha}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\beta}_B}{ds_B}\frac{d\xi^{\mu}_B}{ds_B}\frac{d\xi^{\varrho}_A}{ds_A}$$

$$+2\left(\eta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^{\alpha}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\beta}_B}{ds_B}\right)^2\left(\frac{d\xi^{\mu}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\varrho}_A}{ds_A}-\eta^{\mu\varrho}\right)\Bigg]\frac{\partial}{\partial\xi^{\varrho}_A}\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(b)}_B$$

$$+\tfrac{2}{3}\left(\frac{d\xi^{\mu}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\varrho}_A}{ds_A}-\eta^{\mu\varrho}\right)\frac{d\xi^{\alpha}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\beta}_B}{ds_B}\frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}_A}\frac{\partial}{\partial\xi^{\beta}_A}\frac{\partial}{\partial\xi^{\varrho}_A}\Big(a^{-2}\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(a)}_B-b^{-2}\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(b)}_B\Big)$$

$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{d\xi^{\mu}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\varrho}_A}{ds_A}-\eta^{\mu\varrho}\right)\frac{\partial}{\partial\xi^{\varrho}_A}\Big(\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(a)}_B-\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(b)}_B\Big)\Bigg\} = 0, \tag{84}$$

где

$$\overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(a)}_B = \frac{1-e^{-a\overset{A}{\tilde{\varrho}}_B}}{\overset{A}{\tilde{\varrho}}_B},\qquad \overset{A}{\tilde{\Psi}}{}^{(b)}_B = \frac{1-e^{-b\overset{A}{\tilde{\varrho}}_B}}{\overset{A}{\tilde{\varrho}}_B}, \tag{85}$$

причем

$$\overset{A}{\tilde{\varrho}}_B = [\eta_{\alpha\beta}(\xi^{\alpha}_A-\xi^{\alpha}_B)u^{\beta}_B]_{\overset{A}{\tilde{s}}_B} = 0,$$

$$\overset{A}{\tilde{S}}_B = \xi^0_A-\xi^0_B-|\bar{\xi}_A-\bar{\xi}_B|. \tag{86}$$

Решения уравнений (84) верны только до первого приближения

$$\underset{(\to 1)}{\xi^{\mu}_A} = \underset{(0)}{\xi^{\mu}_A}+\lambda\underset{(1)}{\xi^{\mu}_A}. \tag{87}$$

Для $a=\infty$ и $b=\infty$ из (84) получаем

$$\frac{d^2\xi^{\mu}_A}{ds_A^2}+kc^{-2}\sum_{B} m_B\Bigg\{\Bigg[\left(\frac{d\xi^{\mu}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\varrho}_A}{ds_A}-\eta^{\mu\varrho}\right)-4\eta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^{\alpha}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\beta}_B}{ds_B}\frac{d\xi^{\mu}_B}{ds_B}\frac{d\xi^{\varrho}_A}{ds_A}$$

$$+2\left(\eta_{\alpha\beta}\frac{d\xi^{\alpha}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\beta}_B}{ds_B}\right)^2\left(\frac{d\xi^{\mu}_A}{ds_A}\frac{d\xi^{\varrho}_A}{ds_A}-\eta^{\mu\varrho}\right)\Bigg]\frac{\partial}{\partial\xi^{\varrho}_A}\frac{1}{\overset{A}{\tilde{\varrho}}_B}\Bigg\} = 0. \tag{88}$$

Эти уравнения можно тоже получить непосредственно из приближенных решений уравнений поля Эйнштейна (73).

При $|\xi_A| \gg a^{-1}$, $|\xi_A| \gg b^{-1}$ и $|\bar{v}_A| \ll c$ из уравнений (85) следуют ньютоновские уравнения движения. Таким образом принцип соответствия уравнений (84) с ньютоновскими уравнениями движения не ограничивает постоянных a и b.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. A. Buchdal, *Qart. J. Match. Oxford* **19**, 150 (1948).
[2] B. S. De Witt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York 1965.
[3] H. Weyl, *Ann. Phys.* **59**, 101 (1919).
[4] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press 1924.
[5] H. Weyl, *Math. Z.* **2**, 411 (1918).
[6] W. Pauli, *Phys. Z.* **20**, 457 (1919).
[7] C. Lanczos, *Ann. Math.* **39**, 842 (1938).
[8] H. A. Buchdal, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **8**, 89 (1948).
[9] P. Havas, *General Revativity and Gravitation* **8**, 631 (1977).
[10] L. Infeld, J. Plebański, *Motion and Relativity*, Pergamon Press-New York, PWN-Warszawa 1960.
[11] Д. Иваненко, А. Соколов, *Классическая теория поля*, ГИТТЛ, Москва, Ленинград 1949.