СИЛА САМОДЕЙСТВИЯ В ГРАВИТАЦИИ С ВЫШИМИ ПРИЗВОДНЫМИ*

SELFINTERACTION FORCE IN A THEORY OF GRAVITATION WITH HIGHER DERIVATIVES

Ч. Янкевич

Высшая Педагогическая Школа, Жешув**

(Поступила в редакцию 17-го марта 1981 г.)

Approximate equations of motion are derived from gravitational field equations with higher derivatives. The approximation takes into account the selfinteraction force. The selfinteraction force coincides with the analogous force resulting from the Einstein field equations.

PACS numbers: 04.20.Me, 04.50.+h

1. *Введение*

Как известно, в электродинамике при выводе уравнений движения электрона с силой самодействия появляются трудности, связанные с точечностью электрона. Для устранения этих трудностей применяются разные методы регуляризации уравнений движения. Одна из попыток регуляризации уравнений движения состоит во введении уравнений поля с высшими производными [1, 2, 3].

Использование высших производных в уравнениях поля эквивалентно „размазыванию" электрона. Видно это из уравнений поля для точечного электрона

$$L(\Box)\Box A^{\mu} = (a_0+a_1\Box+ \dots +a_n\Box)\Box A^{\mu} = -\frac{4\pi e}{c}\int \delta(x-\xi)\frac{d\xi^{\mu}}{ds}\,ds, \tag{1}$$

* Субсидировано польским Министерством Науки, Высшего Образования и Техники, проблема M.P.I.7: „Поля, частицы, пространство-время".

** Address: Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Turkienicza 24, 35-959 Rzeszów, Poland

где $a_0, \ldots, a_n$ постоянные и $\delta(x-\xi)$ дельта-функция Дирака. Применяя к обеим частям равенства (1) оператор $\frac{1}{L(\Box)}$, получаем уравнения поля в виде

$$\Box A^{\mu} = -\frac{4\pi}{c}\int \varrho(x-\xi)\frac{d\xi^{\mu}}{ds}\,ds. \tag{2}$$

Эти уравнения второго порядка соответствуют „размазанному" электрону с плотностью заряда

$$\varrho(x-\xi) = \frac{e\delta(x-\xi)}{L(\Box)}. \tag{3}$$

Трудности, связанные с точечностью массы, появляются тоже в теории тяготения Эйнштейна при выводе уравнений движения учитывающих силу самодействия [4, 5]. Аналогия приближенных уравнений поля тяготения с уравнениями электромагнитного поля наводит на мысль применить уравнения с высшими производными к регуляции уравнений движения точечных масс в теории тяготения.

В связи с различными вопросами гравитации, первые попытки применения уравнений поля с высшими производными представлены в работах Вейля [6], Паули [7] и Эддингтона [8]. Эти исследования продолжались в работах [9—14]. В цитированных работах исследуются разные варианты уравнений поля следующих из функций Лагранжа

$$\begin{aligned} L_1 &= \sqrt{-g}\; g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \\ L_2 &= \sqrt{-g}\; g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}R^{\mu\nu}R^{\alpha\beta}, \\ L_3 &= \sqrt{-g}\; g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}R^{\mu\alpha}R^{\nu\beta}, \\ L_4 &= \sqrt{-g}\; g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}g^{\varrho\sigma}g^{\lambda\tau}R^{\alpha}{}_{\mu\varrho\lambda}R^{\beta}{}_{\nu\sigma\tau}. \end{aligned} \tag{4}$$

Краткое содержание полученных результатов представлено в работе Гаваса [15]. В той же работе показано, что уравнения поля следующие в отдельности из функций Лагранжа (4) с тензором масс с правой стороны, после предельного перехода к нерелятивистскому случаю не дают ньютоновских уравнений движения тел. Ньютоновские уравнения движения получаются только для произвольной комбинации функций Лагранжа (4) с функцией Лагранжа

$$L_0 = \sqrt{-g}\; g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}. \tag{5}$$

В настоящей работе, для определения силы самодействия точечных масс мы используем уравнения поля следующие из функции Лагранжа

$$L_{\mathrm{F}} = -\frac{c^2}{16\pi k}\sqrt{-g}\,[R + a^{-2}(\tfrac{1}{2}R^2 - R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})]. \tag{6}$$

Эта функция дает уравнения поля содержащие одну новую постоянную a размерности длины [6].

2. *Уравнения поля и уравнения движения*

Общие уравнения поля следующие из вариационного принципа

$$\delta \int (L_{\mathrm{F}}+L_{\mathrm{M}})\,(dx) = 0 \tag{7}$$

можно написать в виде[1]

$$G_{\mathrm{F}}^{\lambda\tau} = -\frac{8\pi k}{c^2}\,T^{\lambda\tau}, \tag{8}$$

где

$$\frac{\delta L_{\mathrm{F}}}{\delta g_{\lambda\tau}} = \frac{c^2}{16\pi k}\sqrt{-g}\,G_{\mathrm{F}}^{\lambda\tau}, \tag{9}$$

$$\frac{\delta L_{\mathrm{M}}}{\delta g_{\lambda\tau}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,T^{\lambda\tau}. \tag{10}$$

Здесь $G_{\mathrm{F}}^{\lambda\tau}$ — обобщенный тензор Эйнштейна и $T^{\lambda\tau}$ — тензор источников поля тяготения. Учитывая вариацию тензора Риччи $R^{\mu\nu}$ и скаляра R, из функции Лагранжа (6) получаем [16]

$$G_{\mathrm{F}}^{\lambda\tau} = G^{\lambda\tau}+a^{-2}(\nabla_\mu\nabla^\mu G^{\lambda\tau}-\nabla_\mu\nabla^\lambda G^{\mu\tau}-\nabla_\mu\nabla^\tau G^{\mu\lambda})+a^{-2}Q^{\lambda\tau}, \tag{11}$$

где

$$Q^{\lambda\tau} = G(G^{\lambda\tau}-\tfrac{1}{4}\,Gg^{\lambda\tau})-2(G^{\lambda}{}_{\varrho}G^{\tau\varrho}-\tfrac{1}{4}\,G^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta}g^{\lambda\tau}). \tag{12}$$

Здесь $G^{\lambda\tau}$ тензор Эйнштейна

$$G^{\lambda\tau} = R^{\lambda\tau}-\tfrac{1}{2}\,Rg^{\lambda\tau}, \qquad G = g_{\lambda\tau}G^{\lambda\tau}. \tag{13}$$

Поскольку функция (6) является скалярной плотностью, то имеют место обобщенные тождества Бианки

$$\nabla_\lambda G^{\lambda\tau} = 0. \tag{14}$$

Из этих тождеств и из уравнений поля (8) вытекают уравнения движения источников поля

$$\nabla_\lambda T^{\lambda\tau} = 0. \tag{15}$$

Следуя Инфельду и Плебаньскому ([17], гл. I, §4) полагаем, что тензор масс материальной точки имеет вид

$$T^{\lambda\tau} = \frac{m}{\sqrt{-g}}\int \delta(x-\xi)\,\frac{d\xi^\lambda}{d\sigma}\,\frac{d\xi^\tau}{d\sigma}\,d\sigma, \tag{16}$$

где

$$d\sigma^2 = \tilde{g}_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu. \tag{17}$$

---

[1] Греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, по этим повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 0 до 3.

Здесь $(\xi) = (\xi^0, \bar{\xi})$ пространственно-временные координаты материальной точки, m её масса и $\delta(x-\xi)$ произведение четырех δ — функции Дирака. Из (15) и (16) получаются ковариантные уравнения движения материальной точки ([17], гл. I, §6)

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\sigma^2} + \tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta} \frac{d\xi^\alpha}{d\sigma} \frac{d\xi^\beta}{d\sigma} = 0, \tag{18}$$

где мы используем, общее обозначение

$$\widetilde{(\ldots)} = \int (\ldots)\delta(x-\xi)\,(dx). \tag{19}$$

Учитывая условия перестановочности

$$\nabla_\mu\nabla_\nu G^{\lambda\tau} - \nabla_\nu\nabla_\mu G^{\lambda\tau} = R^\lambda{}_{\varrho\mu\nu}G^{\varrho\tau} + R^\tau{}_{\varrho\mu\nu}G^{\lambda\varrho}$$

и формулы (11)—(13), уравнения поля (8) можем написать в виде

$$R^{\lambda\tau} + a^{-2}\nabla_\mu\nabla^\mu R^{\lambda\tau} + a^{-2}D^{\lambda\tau} = -\frac{8\pi k}{c^2} T_*^{\lambda\tau}, \tag{20}$$

где

$$D^{\lambda\tau} = R(R^{\lambda\tau} - \tfrac{1}{4} Rg^{\lambda\tau}) - 2(R^{\lambda\mu\nu\tau}R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4} R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}g^{\lambda\tau}), \tag{21}$$

$$T_*^{\lambda\tau} = T^{\lambda\tau} - \tfrac{1}{2} Tg^{\lambda\tau}, \qquad T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}. \tag{22}$$

Уравнения поля (20) будем решать в гармонических координатах, определяемых условиями

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta})}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{23}$$

В этих координатах тензор Риччи имеет вид ([18], Добавление Г)

$$R^{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta g^{\mu\nu} + g^{\alpha\beta}g^{\varrho\sigma}\Gamma^\mu_{\alpha\varrho}\Gamma^\nu_{\beta\sigma}, \tag{24}$$

где

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \tag{25}$$

Поскольку уравнения поля и уравнения движения будем решать методом последовательных приближений, начиная с псевдоевклидсвой метрики, целесообразно ввести собственное время в смысле частной теории относительности

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}d\xi^\mu d\xi^\nu. \tag{26}$$

Из (16) и (26) следует

$$T_*^{\lambda\tau} = \frac{m}{\sqrt{-g}} \int \delta(x-\xi)\left(\frac{ds}{d\sigma}\,\mu^\lambda\mu^\tau - \tfrac{1}{2}\frac{d\sigma}{ds}\, g^{\lambda\tau}\right) ds, \tag{27}$$

где

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = 1 + (\tilde{g}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu})u^\mu u^\nu, \tag{28}$$

причем

$$\mu^{\mu} = \frac{d\xi^{\mu}}{ds}, \qquad \eta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = 1. \tag{29}$$

Простое преобразование уравнений (18) дает

$$\frac{d^2\xi^{\mu}}{ds^2} + \tilde{F}^{\mu}_{*} = 0, \tag{30}$$

где сила самодействия $\tilde{F}^{\mu}_{*}$ получается по формуле (19) из выражений

$$F^{\mu}_{*} = F^{\mu} - \eta_{\alpha\beta}F^{\alpha}u^{\beta}u^{\mu}, \qquad F^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}{}_{\varrho\sigma}u^{\varrho}u^{\sigma}. \tag{31}$$

Уравнения (30) описывают движение материальной точки. Если рассматривать систему материальных точек, то уравнения движения точки имеют вид

$$\frac{d^2\xi^{\mu}}{ds^2} + \tilde{F}^{\mu}_{*} + \tilde{F}^{\mu}_{(\mathrm{ex})} = 0. \tag{32}$$

Здесь $\tilde{F}^{\mu}_{(\mathrm{ex})}$ сила действия остальных точек рассматриваемой системы на исследуемую материальную точку.

3. *Нулевое приближение*

В приближении быстрых движений предполагается, что все величины можно разложить в степенные ряды по малому параметру $\lambda = kc^{-2}$ ([19], §18). Таким образом, для метрического тензора и координат имеем

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \lambda \underset{(1)}{g^{\mu\nu}} - \lambda^2 \underset{(2)}{g^{\mu\nu}} - \ldots, \tag{33}$$

$$\xi^{\mu} = \underset{(0)}{\xi^{\mu}} + \lambda \underset{(1)}{\xi^{\mu}} + \lambda^2 \underset{(2)}{\xi^{\mu}} + \ldots . \tag{34}$$

Согласно предположению (33), в нулевом приближении метрика пространства--времени псевдоевклидова. Вводя собственное время нулевого порядка

$$\underset{(0)}{ds^2} = \eta_{\mu\nu} d\underset{(0)}{\xi^{\mu}} d\underset{(0)}{\xi^{\nu}}, \tag{35}$$

из формул (30) и (31) получаем

$$\frac{d^2 \underset{(0)}{\xi^{\mu}}}{\underset{(0)}{ds^2}} = 0. \tag{36}$$

Отсюда следует

$$\frac{d\underset{(0)}{\xi^{\mu}}}{\underset{(0)}{ds}} = \underset{(0)}{u^{\mu}}, \qquad \underset{(0)}{\xi^{\mu}} = \underset{(0)}{u^{\mu}}\underset{(0)}{s} + c^{\mu}, \qquad \eta_{\mu\nu}\underset{(0)}{u^{\mu}}\underset{(0)}{u^{\nu}} = 1, \tag{37}$$

где $\underset{(0)}{u^{\mu}}$ и c^{μ} постоянные интегрирования.

Поскольку в нулевом приближении метрика пространства-времени псевдоевклидова, то материальные точки не взаимодействуют и не самодействуют. Таким образом, уравнения (36) верны для всех точек рассматриваемой системы.

4. *Первое приближение*

Из (21), (22) и (27) следует, что в первом приближении уравнения поля (20) имеют вид

$$(1+a^{-2}\Box)\Box \underset{(1)}{g^{\mu\nu}} = -16\pi m \int \delta(x-\underset{(0)}{\xi})\, \underset{(0)}{\sigma^{\mu\nu}} d\underset{(0)}{s}, \tag{38}$$

где

$$\underset{(0)}{\sigma^{\mu\nu}} = \underset{(0)}{u^\mu}\underset{(0)}{u^\nu} - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}, \tag{39}$$

причем $\Box = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta$. Решение уравнений (38) дается формулой

$$\underset{(1)}{g^{\mu\nu}} = -4m \int \underset{(0)}{\sigma'^{\mu\nu}} \delta(x'-\underset{(0)}{\xi}) K(x,x') d\underset{(0)}{s}(dx'), \tag{40}$$

где

$$K(x,x') = a\int\limits_0^\infty \frac{\delta(x^0 - x'^0 - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x}-\bar{x}'|^2})}{\sqrt{\mu^2+|\bar{x}-\bar{x}'|}}\, J_1(a\mu)\,d\mu \tag{41}$$

запаздывающая функция Грина ([20], §20). Здесь $J_1(a\mu)$ функция Бесселя первого порядка. Из (40), (41) и постоянства $\underset{(0)}{\sigma^{\mu\nu}}$ следует

$$\underset{(1)}{g^{\mu\nu}} = -4am\underset{(0)}{\sigma^{\mu\nu}} \int\int\limits_0^\infty \frac{\delta(x^0 - \underset{(0)}{\xi^0} - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}}|^2}}{\sqrt{\mu^2+|\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}}|^2}}\, J_1(a\mu)\,d\mu\, d\underset{(0)}{s}. \tag{42}$$

Вводя новую переменную

$$\underset{(0)}{S} = x^0 - \underset{(0)}{\xi^0} - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x}-\underset{(0)}{\bar{\xi}}|^2} \tag{43}$$

и интегрируя (42), получаем

$$\underset{(1)}{g^{\mu\nu}} = -4am\underset{(0)}{\sigma^{\mu\nu}} \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{\underset{(0)}{\varrho_*}}\right]_{\underset{(0)}{S}=0} J_1(a\mu)\,d\mu, \tag{44}$$

где

$$\underset{(0)}{\varrho_*} = \eta_{\alpha\beta}(x^\alpha - \underset{(0)}{\xi^\alpha})\underset{(0)}{u^\beta}. \tag{45}$$

Из общего определения

$$\underset{(n)}{(\ldots)}^{(-)} = [\underset{(n)}{(\ldots)}]_{\underset{(n)}{S}=0} \tag{46}$$

в частности следует

$$\underset{(0)}{\varrho}{}_*^{(-)} = [\underset{(0)}{\varrho_*}]_{\underset{(0)}{s}=0}, \tag{47}$$

$$\underset{(0)}{x^0} - \underset{(0)}{\xi^0}(s^{(-)}) - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \underset{(0)}{\bar{\xi}}(\underset{(0)}{s^{(-)}})|^2} = 0. \tag{48}$$

Учитывая (37) из (47) и (48), получаем

$$\underset{(0)}{\varrho}{}_*^{(-)} = \sqrt{\mu^2 + \underset{(0)}{\varrho}{}^2}, \tag{49}$$

где

$$\underset{(0)}{\varrho}{}^2 = w_{\alpha\beta}(x^\alpha - c^\alpha)(x^\beta - c^\beta), \qquad w^{\alpha\beta} = \underset{(0)}{u^\alpha}\underset{(0)}{u^\beta} - \eta^{\alpha\beta}. \tag{50}$$

Здесь и в дальнейшем все индексы поднимаются и обнижаются при помощи $\eta^{\mu\nu}$ и $\eta_{\mu\nu}$ соответственно.

Подставляя (49) в (44), получаем

$$\underset{(1)}{g}{}^{\mu\nu} = -4am\underset{(0)}{\sigma}{}^{\mu\nu}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(a\mu)}{\sqrt{\mu^2 + \underset{(0)}{\varrho}{}^2}}\,d\mu. \tag{51}$$

Выполняя интегрирование ([21], 6.565.8), имеем

$$\underset{(1)}{g}{}^{\mu\nu} = -4m\underset{(0)}{\sigma}{}^{\mu\nu}\psi, \tag{52}$$

где

$$\psi = \frac{1}{\underset{(0)}{\varrho}}(1 - e^{-a\underset{(0)}{\varrho}}). \tag{53}$$

Уравнения движения (32) с точностью до первого приближения дают

$$\frac{d^2\xi^2}{ds^2} + \lambda\underset{(1)}{\tilde{F}}{}^\mu + \lambda\underset{(1)}{\tilde{F}}{}^\mu_{(\mathrm{ex})} = 0, \tag{54}$$

где

$$\underset{(1)}{F}{}^\mu_* = \underset{(1)}{F}{}^\mu - \eta_{\alpha\beta}\underset{(1)}{F}{}^\alpha\underset{(0)}{u}{}^\beta\underset{(0)}{u}{}^\mu, \qquad \underset{(1)}{F}{}^\alpha = \underset{(1)}{\Gamma}{}^\alpha_{\varrho\sigma}\underset{(0)}{u}{}^\varrho\underset{(0)}{u}{}^\sigma,$$

$$\underset{(1)}{F}{}^\alpha_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\mu\underset{(1)}{g}_{\nu\beta} + \partial_\mu\underset{(1)}{g}_{\mu\beta} - \partial_\beta\underset{(1)}{g}_{\mu\nu}). \tag{55}$$

Подставляя (52) в (55) и учитывая, что

$$\underset{(0)}{u}{}^\alpha\partial_\alpha\underset{(0)}{\varrho} = 0, \qquad \underset{(0)}{u}{}^\alpha\partial_\alpha\psi = 0, \tag{56}$$

получаем

$$\underset{(1)}{F}{}^\alpha = m\partial^\alpha\psi. \tag{57}$$

В системе координат, относительно которой материальная точка покоится ($\underset{(0)}{u^0} = 1$, $\underset{(0)}{u^r} = 0$, $\underset{(0)}{\bar{\xi}} = \bar{c}$) [2], имеем

$$\partial_r\psi = \left(a\,\frac{e^{-a|\bar{x}-\bar{c}|}}{|\bar{x}-\bar{c}|} - \frac{1-e^{-a|\bar{x}-\bar{c}|}}{|\bar{x}-\bar{c}|^2}\right)\frac{x^r - c^r}{|\bar{x}-\bar{c}|}, \qquad \partial_0\psi = 0. \tag{58}$$

Поскольку функции $\partial_r\psi$ антиссиметричны, то.

$$\int \delta(\bar{x}-\bar{c})\partial_r\psi dV = 0. \tag{59}$$

Из (58) и (59) следует

$$\widetilde{\partial_\alpha\psi} = 0. \tag{60}$$

Эта формула справедлива в произвольной системе координат относительно которой материальная точка движется с постоянной скоростью. Таким образом, в первом приближении сила самодействия равна нулю

$$\underset{(1)}{\tilde{F}^\mu} = 0, \qquad \underset{(1)}{\tilde{F}^\mu_*} = 0. \tag{61}$$

Уравнения движения (54) принимают вид

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} + \lambda \underset{(1)}{\tilde{F}^\mu_{(\mathrm{ex})}} = 0. \tag{62}$$

Здесь $\underset{(1)}{\tilde{F}^\mu_{(\mathrm{ex})}}$ сила действия остальных точек рассматриваемой системы на исследуемую точку.

5. Второе приближение

Как следует из (21), (24) и (27), с точностью до второго порядка уравнения поля (20) имеют вид

$$(1+a^{-2}\Box)\Box \underset{(\to 2)}{g^{\mu\nu}} + 2\lambda^2 a^{-2} \underset{(2)}{D^{\mu\nu}} = -16\pi\lambda \underset{(\to 1)}{T^{\mu\nu}_*}, \tag{63}$$

где

$$\underset{(2)}{D^{\mu\nu}} = \underset{(1)}{R}(\underset{(1)}{R^{\mu\nu}} - \tfrac{1}{4}\underset{(1)}{R}\eta^{\mu\nu}) - 2(\underset{(1)}{R^{\mu\lambda\tau\nu}}\underset{(1)}{R_{\lambda\tau}} - \tfrac{1}{4}\underset{(1)}{R^{\lambda\tau}}\underset{(1)}{R_{\lambda\tau}}\eta^{\mu\nu}), \tag{64}$$

$$\underset{(\to 1)}{T^{\mu\nu}_*} = m\int \delta(x-\xi)\sigma^{\mu\nu}ds - \tfrac{1}{2}\lambda m\int \delta(x-\underset{(0)}{\xi})\,\underset{(1)}{t^{\mu\nu}}d\underset{(0)}{s}, \tag{65}$$

причем

$$\sigma^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu - \tfrac{1}{2}\eta^{\mu\nu}, \tag{66}$$

$$\underset{(1)}{t^{\mu\nu}} = \underset{(1)}{g_{\alpha\beta}}(\underset{(0)}{u^\alpha}\underset{(0)}{u^\beta} + \eta^{\alpha\beta})\underset{(0)}{u^\mu}\underset{(0)}{u^\nu} - \tfrac{1}{2}\underset{(1)}{g_{\alpha\beta}}w^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} - \underset{(1)}{g^{\mu\nu}}. \tag{67}$$

Латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, по этим повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3.

Здесь мы использовали обозначения

$$\underset{(\to 2)}{g^{\mu\nu}} = \lambda \underset{(1)}{g^{\mu\nu}} + \lambda^2 \underset{(2)}{g^{\mu\nu}}, \qquad \underset{(\to 1)}{T_*^{\mu\nu}} = \underset{(0)}{T_*^{\mu\nu}} + \lambda \underset{(1)}{T_*^{\mu\nu}}. \tag{68}$$

Подстановка (52) в формулы

$$R^{\mu}{}_{\lambda\tau\nu} = \partial_\tau \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\lambda\tau} + \Gamma^{\mu}_{\varrho\tau}\Gamma^{\varrho}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\mu}_{\varrho\nu}\Gamma^{\varrho}_{\lambda\tau},$$

$$R_{\lambda\tau} = R^{\mu}{}_{\lambda\tau\mu}, \qquad R = g^{\lambda\tau}R_{\lambda\tau} \tag{69}$$

дает

$$\underset{(1)}{R^{\mu}{}_{\lambda\tau\nu}} = 2m(\underset{(0)}{\sigma^{\mu}_{\tau}}\partial_\lambda\partial_\nu\psi - \underset{(0)}{\sigma^{\mu}_{\nu}}\partial_\lambda\partial_\tau\psi + \underset{(0)}{\sigma_{\lambda\nu}}\partial_\tau\partial^\mu\psi - \underset{(0)}{\sigma_{\lambda\tau}}\partial_\nu\partial^\mu\psi),$$

$$\underset{(1)}{R^{\lambda\tau}} = -2m\underset{(0)}{\sigma^{\lambda\tau}}\Box\psi, \qquad \underset{(1)}{R} = 2m\Box\psi. \tag{70}$$

Учитывая (56) из (64) и (70), получаем

$$\underset{(2)}{D^{\mu\nu}} = m^2(\eta^{\mu\nu}\Box\psi\Box\psi - 4\Box\psi\partial^\mu\psi\partial^\nu\psi). \tag{71}$$

Подставляя (52) в (67), имеем

$$\underset{(1)}{t^{\mu\nu}} = m(6\underset{(0)}{u^\mu}\underset{(0)}{u^\nu} - 5\eta^{\mu\nu})\psi. \tag{72}$$

Вводя обозначения

$$\underset{(\to 2)}{g^{\mu\nu}} = \underset{(\to 2)}{\gamma^{\mu\nu}} + \lambda^2 \underset{(2)}{h^{\mu\nu}} + \lambda^2 \underset{(2)}{f^{\mu\nu}} \tag{73}$$

и учитывая (65), (71) и (72), уравнения (63) можем написать в виде

$$(1 + a^{-2}\Box)\Box\underset{(\to 2)}{\gamma^{\mu\nu}} = -16\pi m\lambda \int \delta(x-\xi)\sigma^{\mu\nu}ds, \tag{74}$$

$$(1 + a^{-2}\Box)\Box\underset{(2)}{h^{\mu\nu}} = 8\pi m^2(6\underset{(0)}{u^\mu}\underset{(0)}{u^\nu} - 5\eta^{\mu\nu}) \int \delta(x-\underset{(0)}{\xi})\underset{(0)}{\psi}ds, \tag{75}$$

$$(1 + a^{-2}\Box)\Box\underset{(2)}{f^{\mu\nu}} = -2m^2a^{-2}(\eta^{\mu\nu}\Box\psi\Box\psi - 4\Box\psi\partial^\mu\partial^\nu\psi). \tag{76}$$

Из приближенной формулы

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \underset{(\to 2)}{g^{\alpha\beta}} \tag{77}$$

следует

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \underset{(\to 2)}{g_{\alpha\beta}} + \lambda^2\eta^{\mu\nu}\underset{(1)}{g_{\mu\alpha}}\underset{(1)}{g_{\nu\beta}}. \tag{78}$$

Подстановка (73) и (78) дает

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \underset{(\to 2)}{\gamma_{\alpha\beta}} + \lambda^2(\underset{(2)}{h_{\alpha\beta}} + \underset{(2)}{f_{\alpha\beta}} + \eta^{\mu\nu}\underset{(1)}{g_{\mu\alpha}}\underset{(1)}{g_{\nu\beta}}). \tag{79}$$

Соответственно разложению (79) и (32) получаем уравнения движения материальной точки с точностью до второго приближения

$$\frac{d^2\xi^\mu}{ds^2} + \underset{(\to 2)}{\tilde{F}^\mu_*} + \underset{(\to 2)}{\tilde{F}^\mu_{(\mathrm{ex})}} = 0, \tag{80}$$

где

$$\underset{(\to 2)}{F^\mu_*} = \underset{(\to 2)}{F^\mu} - \eta_{\alpha\beta} \underset{(\to 2)}{F^\alpha} \underset{(0)}{u^\beta} \underset{(0)}{u^\mu},$$

$$\underset{(\to 2)}{F^\mu} = \underset{(\to 2)}{Q^\mu} + \lambda^2 (\underset{(2)}{P^\mu} + \underset{(2)}{H^\mu} + \underset{(2)}{N^\mu}), \tag{81}$$

причем

$$\underset{(\to 2)}{Q^\mu} = \underbrace{\Pi^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}_{(\to 2)}, \qquad \Pi^\mu_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\alpha \gamma_{\beta\nu} + \partial_\beta \gamma_{\alpha\nu} - \partial_\nu \gamma_{\alpha\beta}), \tag{82}$$

$$\underset{(2)}{P^\mu} = \underset{(2)}{\Lambda^\mu_{\alpha\beta}} \underset{(0)}{u^\alpha} \underset{(0)}{u^\beta}, \qquad \underset{(2)}{\Lambda^\mu_{\alpha\beta}} = \tfrac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\alpha \underset{(2)}{h_{\beta\nu}} + \partial_\beta \underset{(2)}{h_{\alpha\nu}} - \partial_\nu \underset{(2)}{h_{\alpha\beta}}), \tag{83}$$

$$\underset{(2)}{H^\mu} = \underset{(2)}{L^\mu_{\alpha\beta}} \underset{(0)}{u^\alpha} \underset{(0)}{u^\beta}, \qquad \underset{(2)}{L^\mu_{\alpha\beta}} = \tfrac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\alpha \underset{(2)}{f_{\beta\nu}} + \partial_\beta \underset{(2)}{f_{\alpha\nu}} - \partial_\nu \underset{(2)}{f_{\alpha\beta}}). \tag{84}$$

Для

$$\underset{(2)}{N^\mu} = \underset{(2)}{K^\mu_{\alpha\beta}} \underset{(0)}{u^\alpha} \underset{(0)}{u^\beta} \tag{85}$$

имеем более сложную формулу

$$\underset{(2)}{K^\mu_{\varrho\sigma}} = \eta^{\beta\tau} \underset{(1)}{\Gamma^\mu_{\varrho\tau}} \underset{(1)}{g_{\beta\sigma}} + \eta^{\alpha\tau} \underset{(1)}{\Gamma^\mu_{\sigma\tau}} \underset{(1)}{g_{\alpha\varrho}} + \tfrac{1}{2} \eta_{\alpha\varrho} \eta_{\beta\sigma} (\underset{(1)}{g^{\mu\nu}} \partial_\nu \underset{(1)}{g^{\alpha\beta}} - \underset{(1)}{g^{\alpha\nu}} \partial_\nu \underset{(1)}{g^{\mu\beta}} - \underset{(1)}{g^{\beta\nu}} \partial_\nu \underset{(1)}{g^{\mu\alpha}}). \tag{86}$$

Учитывая запаздывающую функцию, Грина (41) из (75) получаем

$$\underset{(2)}{h^{\mu\nu}} = 2a^2 m^2 (6u^\mu u^\nu - 5\eta^{\mu\nu}) \int \frac{\delta(x^0 - \underset{(0)}{\xi^0} - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \underset{(0)}{\bar{\xi}}|^2})}{\sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \underset{(0)}{\bar{\xi}}|^2}} J_1(a\mu) \underset{(0)}{ds} d\mu \tag{87}$$

Здесь мы учли, что

$$\underset{(0)}{\tilde{\psi}(\xi)} = a. \tag{88}$$

Вводя переменную (43) и выполняя интегрирование, из (87) имеем

$$\underset{(2)}{h^{\mu\nu}} = 2am^2 (6\underset{(0)}{u^\mu} \underset{(0)}{u^\nu} - 5\eta^{\mu\nu}) \psi. \tag{89}$$

Подстановка (89) в (83) дает

$$\underset{(2)}{P^\mu} = -am^2 \partial^\mu \psi. \tag{90}$$

Из (60) следует

$$\underset{(2)}{\tilde{P}^\mu} = 0, \qquad \underset{(2)}{\tilde{P}^\mu_*} = 0. \tag{91}$$

Из (84) получаем

$$\underset{(2)}{H^{\mu}} = \underset{(0)(0)}{u^{\alpha} u^{\beta}} \partial_{\alpha} \underset{(2)}{f^{\mu}_{\beta}} - \tfrac{1}{2} \underset{(0)(0)}{u^{\alpha} u^{\beta}} \partial^{\mu} \underset{(2)}{f_{\alpha\beta}}. \tag{92}$$

Дифференцируя уравнения (76) и умножая на $\underset{(0)(0)}{u^{\alpha} u^{\beta}}$, соответственно имеем

$$(1 + a^{-2}\Box)\Box(\underset{(0)(0)}{u^{\alpha} u^{\beta}} \partial_{\alpha} \underset{(2)}{f^{\mu}_{\beta}}) = 0, \tag{93}$$

$$(1 + a^{-2}\Box)\Box \underset{(2)}{f^{\mu}} = -4a^2 m^2 \frac{e^{-a\underset{(0)}{\varrho}}}{\underset{(0)}{\varrho}} \partial^{\mu} \frac{e^{-a\underset{(0)}{\varrho}}}{\underset{(0)}{\varrho}}, \tag{94}$$

где

$$\underset{(2)}{f^{\mu}} = \underset{(0)(0)}{u^{\alpha} u^{\beta}} \partial^{\mu} \underset{(2)}{f_{\alpha\beta}}. \tag{95}$$

Здесь мы учли, что

$$\Box\psi = a^2 \frac{e^{-a\underset{(0)}{\varrho}}}{\underset{(0)}{\varrho}}. \tag{96}$$

Из (93) следует

$$\underset{(0)(0)}{u^{\alpha} u^{\beta}} \partial_{\alpha} \underset{(0)}{f^{\mu}_{\beta}} = 0. \tag{97}$$

В системе координат сопутствующей равномерно движущейся материальной точке, уравнения (94) принимают вид

$$(1 - a^{-2}\triangle)\triangle f^0 = 0, \tag{98}$$

$$(1 - a^{-2}\triangle)\triangle f_r = -4a^2 m^2 \frac{e^{-a|\bar{x} - \bar{c}|}}{|\bar{x} - \bar{c}|} \partial_r \frac{e^{-a|\bar{x} - \bar{c}|}}{|\bar{x} - \bar{c}|}. \tag{99}$$

Из уравнений (98) и (99) получаем

$$\underset{(2)}{f_0} = 0, \tag{100}$$

$$\underset{(2)}{f_r} = \frac{a^2 m^2}{\pi} \int \frac{e^{-a|\bar{x}' - \bar{c}|}}{|\bar{x}' - \bar{c}|} \partial'_r \frac{e^{-a|\bar{x}' - \bar{c}|}}{|\bar{x}' - \bar{c}|} \frac{1 - e^{-a|\bar{x}' - x|}}{|\bar{x} - \bar{x}'|} dV'. \tag{101}$$

Последняя формула для $\bar{x} = \underset{(0)}{\bar{\xi}} = \bar{c}$ дает

$$\underset{(2)}{\tilde{f}_r} = \frac{a^2 m^2}{\pi} \int \frac{e^{-a|\bar{x}' - \bar{c}|}}{|\bar{x}' - \bar{c}|} \partial'_r \frac{e^{-a|\bar{x}' - \bar{c}|}}{|\bar{x}' - \bar{c}|} \frac{1 - e^{-a|\bar{x}' - \bar{c}|}}{|\bar{x}' - \bar{c}|} dV'. \tag{102}$$

Поскольку в (102) подинтегральная функция антисимметрична, то из (100) и (102) следует

$$\tilde{f}^{\mu} = 0. \tag{103}$$

Эта формула справедлива в произвольной системе координат, относительно которой материальная точка движется с постоянной скоростью. Таким образом, формулы (92), (97) и (103) дают

$$\underset{(2)}{\tilde{H}^{\mu}} = 0, \qquad \underset{(2)}{\tilde{H}^{\mu}_{*}} = 0. \tag{104}$$

Подставляя (52) в (86) а затем в (85) получаем

$$\underset{(2)}{N^{\mu}} = -6m^2\psi\partial^{\mu}\psi. \tag{105}$$

Из (60) и (88) следует

$$\underset{(2)}{\tilde{N}^{\mu}} = 0, \qquad \underset{(2)}{\tilde{N}^{\mu}_{*}} = 0. \tag{106}$$

Учитывая (91), (104) и (106) из (80) получаем окончательные уравнения движения материальной точки с точностью до второго приближения

$$\frac{d^2\xi^{\mu}}{ds^2} + \underset{(\to 2)}{Q^{\mu}_{*}} + \underset{(\to 2)}{\tilde{F}^{\mu}_{(ex)}} = 0. \tag{107}$$

Здесь сила самодействия определяется уравнениями (82) и (74).

6. *Сила самодействия*

Для определения силы Q^{μ} необходимо решить уравнения (74). В отличие от уравнений (38) в уравнениях (74) величины u^{μ} не постоянные. Применяя к этим уравнениям функцию Грина (41), получаем

$$\gamma^{\alpha\beta} = -4\lambda am \int\int_0^{\infty} \sigma^{\alpha\beta} \frac{\delta(x^0 - \xi^0 - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{\xi}|^2})}{\sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{\xi}|^2}} J_1(a\mu) ds d\mu. \tag{108}$$

Вводя переменную

$$S = x^0 - \xi^0 - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{\xi}|^2} \tag{109}$$

и интегрируя (108), имеем

$$\gamma^{\alpha\beta} = -4\lambda am \int_0^{\infty} \left[\sigma^{\alpha\beta} \frac{J_1(a\mu)}{\varrho_*}\right]_{S=0} d\mu, \tag{110}$$

где

$$\varrho_* = \eta_{\mu\nu}(x^{\mu} - \xi^{\mu})u^{\nu}. \tag{111}$$

Дифференцирование уравнения

$$x^0 - \xi^0 - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{\xi}|^2} = 0 \tag{112}$$

дает

$$\partial_\varrho s = \left[\frac{\eta_{\varrho\sigma}(x^\sigma - \xi^\sigma)}{\varrho_*}\right]_{s=0}. \tag{113}$$

Отсюда получаем

$$\partial_\varrho \varrho_* = \left[u_\varrho - \frac{\eta_{\varrho\sigma}(x^\sigma - \xi^\sigma)}{\varrho_*} + \frac{\eta_{\alpha\beta}(x^\alpha - \xi^\alpha)\dot{u}^\beta \eta_{\varrho\sigma}(x^\sigma - \xi^\sigma)}{\varrho_*}\right]_{s=0}, \tag{114}$$

где точка обозначает дифференцирование по s. Дифференцируя (110) и учитывая (113) и (114), имеем

$$\partial_\varrho \gamma^{\alpha\beta} = -4\lambda am \int_0^\infty \left[\frac{\dot{\sigma}^{\alpha\beta}\eta_{\varrho\sigma}(x^\sigma - \xi^\sigma) - \sigma^{\alpha\beta}u_\varrho}{\varrho_*^2}\right]_{s=0} J_1(a\mu)d\mu$$

$$-4\lambda am \int_0^\infty \left\{\frac{\sigma^{\alpha\beta}\eta_{\varrho\sigma}(x^\sigma - \xi^\sigma)\,[1 - \eta_{\mu\nu}(x^\mu - \xi^\mu)\dot{u}^\nu]}{\varrho_*^3}\right\}_{s=0} J_1(a\mu)d\mu. \tag{115}$$

Формулу (115) можем написать тоже в виде

$$\partial_\varrho \gamma^{\alpha\beta} = -4\lambda am \int\int_0^\infty \frac{\dot{\sigma}^{\alpha\beta}\eta_{\varrho\sigma}(x^\sigma - \xi^\sigma) - \sigma^{\alpha\beta}u_\varrho}{\varrho_*} \frac{\delta(x^0 - \xi^0 - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{\xi}|^2})}{\sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{\xi}|^2}} J_1(a\mu)ds d\mu$$

$$-4\lambda am \int\int_0^\infty \frac{\sigma^{\alpha\beta}\eta_{\varrho\sigma}(x^\sigma - \xi^\sigma)\,[1 - \eta_{\mu\nu}(x^\mu - \xi^\mu)\dot{u}^\nu]}{\varrho_*^2} \cdot \frac{\delta(x^0 - \xi^0 - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{\xi}|^2})}{\sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{\xi}|^2}} J_1(a\mu)ds d\mu. \tag{116}$$

Из свойств δ-функции следует

$$\frac{\delta(x^0 - \xi^0 - \sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{\xi}|^2})}{\sqrt{\mu^2 + |\bar{x} - \bar{\xi}|^2}} = \left(1 + \frac{(x^0 - \xi^0)}{|\bar{x}^0 - \xi^0|}\right)\delta(\mu^2 - \Lambda^2), \tag{117}$$

где

$$\Lambda^2 = \eta_{\alpha\beta}(x^\alpha - \xi^\alpha)(x^\beta - \xi^\beta). \tag{118}$$

Подстановка (117) в (116) дает

$$\widetilde{\partial_\varrho \gamma}^{\alpha\beta} = -4\lambda am \int\int_0^\infty \frac{\ddot{\sigma}^{\alpha\beta}\eta_{\varrho\sigma}(\xi^\sigma - \xi'^\sigma) - \sigma'^{\alpha\beta}\mu'_\varrho}{\tilde{\varrho}_*} \left(1 + \frac{\xi^0 - \xi'^0}{|\xi^0 - \bar{\xi}'^0|}\right)\delta(\mu^2 - \tilde{\Lambda}^2)J_1(a\mu)ds'd\mu$$

$$-4\lambda am \int\int_0^\infty \frac{\sigma'^{\alpha\beta}\eta_{\varrho\sigma}(\xi^\sigma - \xi'^\sigma)\,[1 - \eta_{\mu\nu}(\xi^\mu - \xi'^\mu)\dot{u}'^\nu]}{\tilde{\varrho}_*^2} \left(1 + \frac{\xi^0 - \xi'^0}{|\xi^0 - \xi'^0|}\right)\delta(\mu^2 - \tilde{\Lambda}^2)J_1(a\mu)ds'd\mu. \tag{119}$$

где введены обозначения

$$\tilde{\varrho}_* = \eta_{\alpha\beta}(\xi^\alpha - \xi'^\alpha)u'^\beta,$$

$$\tilde{\Lambda}^2 = \eta_{\alpha\beta}(\xi^\alpha - \xi'^\alpha)(\xi^\beta - \xi'^\beta),$$

$$\xi'^\alpha(s') = [\xi^\alpha(s)]_{s=s'}. \tag{120}$$

Учитывая формулу (82), из (119) получаем

$$Q^\varrho = \lambda am \int \int_0^\infty \left(\frac{A^\varrho}{\tilde{\varrho}_*} + \frac{B^\varrho}{\tilde{\varrho}_*^2} \right) \left(1 + \frac{\xi^0 - \xi'^0}{|\xi^0 - \xi'^0|} \right) \delta(\mu^2 - \tilde{\Lambda}^2) J_1(a\mu) ds' d\mu, \tag{121}$$

где

$$A^\varrho = 2u^\mu u^\nu [\dot{\sigma}'_{\mu\nu}(\xi^\varrho - \xi'^\varrho) - \sigma'_{\mu\nu} u'^\varrho - 2\dot{\sigma}'^\varrho_\nu(\xi_\mu - \xi'_\mu) + 2\sigma'^\varrho_\nu u'_\mu], \tag{122}$$

$$B^\varrho = 2\mu^\mu \mu^\nu [1 - \eta_{\alpha\beta}(\xi^\alpha - \xi'^\alpha)\dot{u}'^\beta] [\sigma'_{\mu\nu}(\xi^\varrho - \xi'^\varrho) - 2\sigma'^\varrho_\nu(\xi_\mu - \xi'_\mu)]. \tag{123}$$

Вводя новую переменную

$$s' = s + \varepsilon \tag{124}$$

и раскладывая выражения (121), (122) и (119) по малому параметру ε, находим

$$\tilde{Q}^\mu = -\tfrac{7}{2} \lambda am \dot{u}^\mu \int \int_0^\infty \left(1 - \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \right) \delta(\varepsilon^2 - \mu^2) J_1(a\mu) d\varepsilon d\mu$$

$$- \lambda am \left(\tfrac{11}{3} \ddot{u}^\mu - \tfrac{1}{3} \dot{u}^\alpha \dot{u}_\alpha u^\mu\right) \int \int_0^\infty \left(1 - \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \right) \varepsilon \delta(\varepsilon^2 - \mu^2) J_1(a\mu) d\varepsilon d\mu. \tag{125}$$

Из свойств δ-функции получаем

$$\int \int_0^\infty \left(1 - \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \right) \delta(\varepsilon^2 - \mu^2) J_1(a\mu) d\varepsilon d\mu = \int_0^\infty \frac{J_1(a\mu)}{\mu} d\mu, \tag{126}$$

$$\int \int_0^\infty \left(1 - \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \right) \varepsilon \delta(\varepsilon^2 - \mu^2) J_1(a\mu) d\varepsilon d\mu = - \int_0^\infty J_1(a\mu) d\mu. \tag{127}$$

Поскольку ([21], 6.561.7; 6.511.1)

$$\int_0^\infty J_1(a\mu) d\mu = a^{-1}, \qquad \int_0^\infty \frac{J_1(a\mu)}{\mu} d\mu = 1, \tag{128}$$

то из (125) имеем

$$\tilde{Q}^{\mu} = -\tfrac{7}{2}\lambda am\dot{u}^{\mu} + \lambda m(\tfrac{11}{3}\ddot{u}^{\mu} - \tfrac{1}{3}\dot{u}^{\alpha}\dot{u}_{\alpha}u^{\mu}). \tag{129}$$

Таким образом, формулы (31) и (129) дают

$$\tilde{Q}^{\mu}_{*} = -\tfrac{7}{2}\lambda am\dot{u}^{\mu} + \tfrac{11}{3}\lambda m(\ddot{u}^{\mu} + \dot{u}^{\alpha}\dot{u}_{\alpha}u^{\mu}). \tag{130}$$

Окончательно уравнения движения материальной точки (107) принимают вид

$$(1-\tfrac{7}{2}\lambda am)\frac{d^2\xi^{\mu}}{ds^2} + F^{\mu}_{(\mathrm{ex})} = -\tfrac{11}{3}\lambda m\left(\frac{d^3\xi^{\mu}}{ds^3} + \eta_{\alpha\beta}\frac{d^2\xi^{\alpha}}{ds^2}\frac{d^2\xi^{\beta}}{ds^2}\frac{d\xi^{\mu}}{ds}\right). \tag{131}$$

Уравнения эти справедливы для $\xi(s)$ с точностью до λ^2. Умножая уравнения (131) на m получаем

$$m_{*}\frac{d^2\xi^{\mu}}{ds^2} + m_{*}F^{\mu}_{(\mathrm{ex})} = -\tfrac{11}{3}\frac{k}{c^2}m_{*}^2\left(\frac{d^3\xi^{\mu}}{ds^3} + \eta_{\alpha\beta}\frac{d^2\xi^{\alpha}}{ds^2}\frac{d^2\xi^{\beta}}{ds^2}\frac{d\xi^{\mu}}{ds}\right), \tag{132}$$

где

$$m_{*} = m\left(1-\tfrac{7}{2}\frac{kam}{c^2}\right). \tag{133}$$

Из (133) следует, что в отличие от электродинамики механическая масса материальной точки не может быть полностью обусловлена энергией гравитационного поля.

При $a \to \infty$ уравнения поля (20) переходят в уравнения Эйнштейна. При этом же предельном переходе, как видно из (133), m_{*} стремится к бесконечности, что непосредственно вытекает из теории Эйнштейна и что необходимо регуляризировать. Эта регуляризация достигнута здесь введением в уравнения поля высших производных.

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Bopp, *Ann. Phys.* (Germany) **38**, 345 (1940).
[2] B. Podolsky, *Phys. Rev.* **62**, 68 (1941).
[3] B. Podolsky, A. Schwed, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 40 (1948).
[4] P. Havas, *Phys. Rev.* **108**, 1351 (1957).
[5] P. Havas, J. N. Goldberg, *Phys. Rev.* **128**, 398 (1962).
[6] H. Weyl, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* 465 (1918); *Ann. Phys.* (Germany) **59**, 101 (1919); *Z. Phys.* **22**, 743 (1921).
[7] W. Pauli, *Z. Phys.* **29**, 457 (1919).
[8] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge 1952.
[9] C. Gregory, *Phys. Rev.* **72**, 72 (1947).
[10] H. Buchdahl, *Q. J. Math. (Oxford)*, **19**, 150 (1948).
[11] D. E. Littewood, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49**, 90 (1953).
[12] F. A. E. Pirani, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **51**, 535 (1955).
[13] R. I. Arnowitt, *Phys. Rev.* **105**, 735 (1957).
[14] G. Stephenson, *Nuovo Cimento* **9**, 364 (1958).

[15] P. Havas, *Gen. Relativ. Gravitation*, Vol. 8, No 8 (1977).
[16] B. S. De Witt, *Dynamical Theory of Groups and Fields, Relativite, Groupes et Topologie*, Les Houches 1963.
[17] L. Infeld, J. Plebański, *Motion and Relativity*, Pergamon Press- New York, PWN — Warszawa 1960.
[18] V. A. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon Press, New York 1964.
[19] Ch. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, San Francisco 1973.
[20] О. Иваненко, А. Соколов, *Классическая Теория Поля*, Москва, Ленинград 1949.
[21] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы Интегралов, Сумм, Рядов и Произведений*, Москва 1963.