Vol. B13 (1982) ACTA PHYSICA POLONICA No 7

# АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПОЛЕЙ ТЯГОТЕНИЯ И ДЕВИАЦИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

# ALGEBRAIC STRUCTURE OF GRAVITATIONAL FIELDS AND GEODESIC DEVIATION

А. Н. Александров, Ю. Н. Кудря *

Государственный комитет СССР по стандартам, Москва*

*(Поступила в редакцию 3-го декабря 1981 г.)*

The set of Jacobi curvature operators (i.e. coefficient matrices from the equation of geodesic deviation) is included in an algebra $\mathscr{Q}$ of fundamental geometrical quantities. An equivalence relation on $\mathscr{Q}$ is defined by the action of local pseudoorthogonal transformation group. For spaces of general relativity the algebraic structure, invariants and the normal forms of Jacobi operators are studied. General properties, examples and the interpretation of bifurcation diagrams characterizing gravitation field distribution are considered.

PACS numbers: 04.20.-q

## 1. *Введение*

Изучение соотношений между кривизной пространства и поведением геодезических представляет значительный интерес как для собственно дифференциальной геометрии, так и для общей теории относительности (ОТО). Некоторые аспекты этой проблемы для общих римановых пространств и пространств аффинной связности без кручения рассматривались в работах [1, 2] (в которых можно найти дальнейшие ссылки). Там, в частности, обсуждались следствия фундаментальных уравнений Картана, связывающих основные геометрические величины с поведением геодезических и через него с кривизной пространства. В римановом случае фундаментальное уравнение, содержащее полную информацию о геометрии, совпадает по сути с уравнением девиации для определенной совокупности геодезических.

Многочисленные приложения уравнения девиации в ОТО обусловлены тем, что именно во взаимном поведении пробных тел наиболее непосредственно проявляется действие гравитации [3]. Уравнение геодезической девиации лежит в основе теоретического описания гравитационно-волновых экспериментов и служит мощным

* Address: USSR State Committee for Standards, 9, Leninsky Prospekt, 117049 Moscow, USSR

средством исследования глобальной структуры пространства-времени (ПВ) [4]. При изучении движения тел это уравнение играет фундаментальную роль в качестве первого приближения для уравнений относительного движения [1, 5].

Поведение решений уравнения девиации зависит от структуры тензора кривизны и от направления вектора $\boldsymbol{u}$, касательного к опорной геодезической. Таким образом, возникает весьма актуальная, на наш взгляд, задача изучения этой зависимости для пространств, соответствующих полям тяготения. Эта задача была выдвинута Плебаньским в [6], частные аспекты ее были им рассмотрены в [7].

В следующем разделе обсуждается математическая постановка задачи. Здесь рассматривается введенная в [2] алгебра фундаментальных геометрических величин и отношение эквивалентности, задаваемое на ней действием группы локальных псевдоортогональных преобразований. Указанная эквивалентность порождает алгебраическую классификацию операторов кривизны Якоби, которую можно рассматривать также как классификацию римановых геометрий.

В третьем разделе этот подход конкретизируется для пространств ОТО. Исследуются возможные алгебраические типы, инварианты и нормальные формы оператора Якоби. Условия типа формулируются как соотношения на вектор $\boldsymbol{u}$ и спиноры кривизны.

В четвертом разделе рассматриваются поверхности особенностей оператора Якоби и обсуждаются вопросы интерпретации. В приложение вынесены некоторые наиболее громоздкие явные выражения.

## *2. Оператор кривизны Якоби*

*2.1.* Напомним обозначения и некоторые соотношения, связанные с экспоненциальным отображением римановых пространств (подробнее см. в [1, 2]). Пусть $\{M, g\}$ — $n$-мерное псевдориманово многообразие индекса $l$, $\pi$: $TM \to M$ — касательное расслоение и $T_{\bar p} = T_{\bar p}(M) = \pi^{-1}(\bar p)$ — касательное пространство точки $\bar p$. Максимальную геодезическую, касательную к вектору $u^{\bar\mu} \in T_{\bar p}$ и параметризованную аффинным параметром $t$ обозначим как $\gamma(u^{\bar\mu}, t)$, полагая при этом, что $\gamma(u^{\bar\mu}, 0) = \bar p$. Пусть далее $\overset{*}{N} \subset T_{\bar p}$ и $N \subset M$ — нормальные окрестности нуля и точки $\bar p$, соответственно; $\exp_{\bar p}$: $\overset{*}{N} \to N$ — экспоненциальное отображение, так что $\gamma(u^{\bar\mu}, t) = \exp_{\bar p}(u^{\bar\mu} t)$. Экспоненциальное отображение, будучи диффеоморфизмом, обладает обратным, которое мы обозначаем как $\vee V_{\bar p}$: $N \to \overset{*}{N}$, и которое сопоставляет точке $p = \gamma(u^{\bar\mu}, t)$ геодезический радиус-вектор $y^{\bar\mu}(p) = u^{\bar\mu} t$. Компоненты вектора $y^{\bar\mu}(p)$ относительно фиксированного нормированного репера $h_i^{\bar\mu}$ называют нормальными координатами точки $p$ с центром в точке $\bar p$.

Дифференциал экспоненциального отображения определяет изоморфизм касательных пространств $T_y(T_{\bar p}) \to T_p$, причем $T_y(T_{\bar p})$ можно канонически отождествить с $T_{\bar p}(M)$. Этот изоморфизм задается двухточечным тензором, обозначаемым как $Y^{\alpha}{}_{\bar\mu}$; обратный оператор — тензором $Y^{\bar\mu}{}_{\alpha}$. Изоморфизм касательных пространств естественно продолжается до изоморфизма соответствующих тензорных алгебр.

Следовательно, экспоненциальное отображение связывает тензорные поля, определенные на $\overset{*}{N}$ и $N$. Если, например, $\boldsymbol{t} = (t^{\alpha}{}_{\beta})$ — поле аффинора на $N$, то поле $\vee V_{*}(\boldsymbol{t})$, обозначаемое как $\overset{*}{\boldsymbol{t}} = (\overset{*}{t}{}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}})$ и называемое нормальным прообразом поля $\boldsymbol{t}$, определяется выражением

$$\overset{*}{t}{}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}}(\boldsymbol{y}) = \bar{Y}^{\mu}{}_{\alpha} t^{\alpha}{}_{\beta} Y^{\beta}{}_{\bar{\nu}}|_{\exp(y)}. \tag{1}$$

Другой важный изоморфизм касательных пространств $T_{\bar{p}} \to T_{p}$ определяется параллельным переносом вдоль геодезической $\gamma(u^{\bar{\mu}}, t)$ и задается оператором $G^{\alpha}{}_{\bar{\mu}}$. Обратный оператор обозначаем как $G^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}$. Аналогично предыдущему определяем параллельный прообраз $\tilde{\boldsymbol{t}}$ тензорного поля $\boldsymbol{t}$:

$$\tilde{t}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}}(\boldsymbol{y}) = G^{\bar{\mu}}{}_{\alpha} t^{\alpha}{}_{\beta} G^{\beta}{}_{\bar{\nu}}|_{\exp(y)}. \tag{2}$$

Расслоение тензоров типа $(r, s)$ над $\overset{*}{N}$ обозначим как $\overset{*}{T}{}^{r}{}_{s}$.

Переход к тензорным полям на $\overset{*}{N}$ обладает тем преимуществом, что на $T_{\bar{p}} \supset \overset{*}{N}$ существует естественный параллелизм и, следовательно, определено обычное аффинное измерение тензорных полей. По этой причине тензорные поля на $\overset{*}{N}$, а также их значения в тех или иных точках мы называем локально наблюдаемыми. При заданном репере $h^{\bar{\mu}}{}_{i}$ значения локально наблюдаемых определяются однозначно.

Использование локально наблюдаемых позволяет дать однозначное описание геометрии пространства с отмеченным репером $h^{\bar{\mu}}{}_{i}$. Действительно, локальные свойства бесконечно дифференцируемого риманого пространства в окрестности отмеченной точки $\bar{p}$ однозначно задаются нормальным прообразом $\overset{*}{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ метрического тензора, определенным на $\overset{*}{N}$. При изучении геометрии в точке $\bar{p}$ достаточно рассматривать росток поля $\overset{*}{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$, или даже его $k$-струю подходящего порядка [8]. Тем самым можно говорить о ростке и струе риманового пространства с отмеченным репером. Более точно, пусть $\{M, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}_{i}\}$ — риманово пространство с отмеченным репером $\boldsymbol{h}_{i}$ и $\overset{*}{g}_{ik}(y^{1}, \dots, y^{n})$ — компоненты метрического тензора в нормальных координатах, определяемых репером $\boldsymbol{h}_{i}$. Ростком ($k$-струей) пространства $\{M, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}_{i}\}$ назовём класс эквивалентности римановых пространств с отмеченным репером, обладающих одним и тем же ростком ($k$-струей) отображения $\overset{*}{g} = \{\overset{*}{g}_{ik}\}$ в нуле. Заметим, что идея сравнения пространств с отмеченным репером по-видимому впервые была сформулирована в работах Героча [9].

*2.2.* Разнообразные соотношения, связывающие $\overset{*}{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ с другими локально наблюдаемыми геометрическими характеристиками удобно формулировать на языке специальной операторной алгебры. Пусть $\mathscr{E}(n)$ — алгебра ростков гладких функций $f: T_{\bar{p}} \to \mathbf{R}$ в нуле. Рассмотрим алгебру $\mathscr{K} = \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(T_{\bar{p}}) \otimes \mathscr{E}(n) \cong \mathrm{End}_{\mathscr{E}(n)}(T_{\bar{p}})$, образованную ростками дифференцируемых сечений расслоения $\overset{*}{T}{}^{1}{}_{1}$. Очевидно, $\mathscr{K}$ обладает единицей, которую обозначим как $I$. Далее, т.к. в $T_{\bar{p}}$ задано псевдоевклидово скалярное произведение (с метрическим тензором $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$), то в алгебре $\mathscr{K}$ определена операция транспонирования $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}$. Действие элемента $\boldsymbol{k} \in \mathscr{K}$ на вектор $\boldsymbol{v} \in T_{\bar{p}}$ будем обозначать как $\boldsymbol{kv}$.

В дальнейшем основную роль играет подалгебра $\mathscr{Q} \subset \mathscr{K}$, образованная теми элементами $\boldsymbol{q}$, для которых

$$\boldsymbol{q}y = \boldsymbol{q}_0 y, \qquad \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} y = \boldsymbol{q}_0 y \tag{3}$$

при некотором $q_0 \in \mathscr{E}(n)$. Дифференцируя эти условия, замечаем, что $\boldsymbol{q}|_{y=0} = q_0(0)\boldsymbol{e}$.

Рассмотрим подмножество $\mathscr{G} \subset \mathscr{Q}$ симметрических элементов $\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{q}$, удовлетворяющих дополнительному условию $q_0 = 1$. При заданном нормированном репере $\boldsymbol{h}_i$ множество $\mathscr{G}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством ростков пространств $\{M, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}_i\}$ [2]. При этом, если $\overset{*}{g}_{\bar\mu\bar\nu}$ — нормальный прообраз тензора $\boldsymbol{g}$, то соответствующий оператор $\overset{*}{\boldsymbol{g}} \in \mathscr{G}$, который мы будем называть метрическим оператором, определяется ростком поля

$$\overset{*}{g}{}^{\bar\mu}{}_{\bar\nu} = g^{\bar\mu\bar\sigma}\overset{*}{g}_{\bar\sigma\bar\nu}. \tag{4}$$

Поле метрического тензора является параллельным, и следовательно, $g_{\alpha\beta} = g_{\bar\mu\bar\nu}G^{\bar\mu}{}_{\alpha}G^{\bar\nu}{}_{\beta}$. Для нормального прообраза метрики находим

$$\overset{*}{g}_{\bar\mu\bar\nu} = g_{\bar\sigma\bar\tau}S^{\bar\sigma}{}_{\bar\mu}S^{\bar\tau}{}_{\bar\nu}, \tag{5}$$

где

$$S^{\bar\sigma}{}_{\bar\mu} = G^{\bar\sigma}{}_{\alpha}Y^{\alpha}{}_{\bar\mu}.$$

*2.3*. Нетрудно указать уравнение, связывающее $\boldsymbol{S}$ с кривизной пространства. Хорошо известно, что векторное поле $J^\alpha = Y^\alpha{}_{\bar\mu}b^{\bar\mu}t$, определённое вдоль $\gamma(u^{\bar\mu}, t)$, при произвольном векторе $b^{\bar\mu} \in T_{\bar p}$ является якобиевым, т.е. удовлетворяет уравнению девиации геодезических

$$D^2J^\alpha/dt^2 + R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}u_\beta u^\beta J^\gamma = 0. \tag{6}$$

Аффинор $K^\alpha{}_\gamma = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}u^\beta u^\delta$ называют оператором кривизны Якоби [3]. Сворачивая уравнение (6) с $G^{\bar\kappa}{}_\alpha$, переходя к обыкновенным производным и опуская произвольный вектов $\boldsymbol{b}$, получаем

$$d^2(S^{\bar\kappa}{}_{\bar\mu}t)/dt^2 + \tilde{K}^{\bar\kappa}{}_{\bar\tau}S^{\bar\tau}{}_{\bar\mu}t = 0. \tag{7}$$

Это уравнение, рассматриваемое для совокупности геодезических $\Gamma_{\bar p}$, проходящих через точку $\bar p$, совпадает фактически с фундаментальным уравнением Картана [10] и позволяет в силу соотношения (5) восстанавливать метрику в окрестности точки $\bar p$ по заданному полю $\tilde{K}^{\bar\kappa}{}_{\bar\tau}$.

Для дальнейшего целесообразно переписать (7) в несколько ином виде. Введем дифференциальный оператор $\boldsymbol{D} = t d/dt = y^{\bar\mu}\partial/\partial y^{\bar\mu}$ и обозначим $t^2\tilde{K}^{\bar\kappa}{}_{\bar\tau}$ как $\tilde{r}^{\bar\kappa}{}_{\bar\tau}$ (называя его по-прежнему оператором Якоби). Уравнение (7) принимает вид

$$(\boldsymbol{D}^2 + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{r})\boldsymbol{S} = 0. \tag{8}$$

Из соотношений (4) и (5) легко получить для метрического оператора

$$\overset{*}{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}. \tag{9}$$

Легко заметить, что операторы $S$, $r \in \mathscr{Q}$, причем $S_0 = 1$, $\tilde{r}_0 = 0$. Кроме того, $D$ — дифференцирование алгебры $\mathscr{Q}$, иак что соотношения (8) и (9) формулируются в терминах дифференциальной алгебры $\{\mathscr{Q}, D\}$. Эти соотношения устанавливают биективное соответствие между множеством $\mathscr{G}$ метрических операторов и множеством операторов Якоби $\mathscr{J} = \{\tilde{r} \in \mathscr{Q} | \tilde{r} = \tilde{r}^{\mathrm{T}}, \tilde{r} = 0\}$.

Допустим теперь, что росток пространства $\{M, g, h_i\}$ — аналитический. В этом случае каждое из геометрических полей, определенных на $\overset{*}{N}$ может быть представлено своим рядом Тейлора [11]. В частности для $\tilde{r}$ имеем

$$\tilde{r} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} r_k, \tag{10}$$

где $r_k$ — сумма однородных слагаемых степени $k$:

$$r_k{}^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} = R^{\mu}{}_{\tau_1 \nu \tau_2;\tau_3 \dots \tau_k}|_{\bar{p}}\, y^{\bar{\tau}_1} \dots y^{\bar{\tau}_k}. \tag{11}$$

Видно, что все $r_k \in \mathscr{Q}$.

Соотношения (8) и (9) позволяют выразить однородные члены тейлоровских разложений операторов $S$ и $\overset{*}{g}$ через $r_k$ в рамках алгебры $\mathscr{Q}$ [2]. Другими словами, операторы $\tilde{r}$, $S$, $\overset{*}{g}$ (как и ряд других геометрических полей) принадлежат подалгебре $\mathscr{R} \subset \mathscr{Q}$, порожденной операторами $e$ и $r_k$ с $k = 2, 3, \dots$. Алгебра $\mathscr{R}$ взаимно однозначно соответствует ростку $\{M, g, h_i\}$. Заметим, что $\{\mathscr{R}, D\}$ — также дифференциальная подалгебра.

В случае, если $\{M, g\}$ принадлежит классу $C^{m+2}$, экспоненциальное отображение допускает производные порядка $m+1$, $\overset{*}{g} \in C^m$ и определены $k$-струи пространства $\{M, g, h_i\}$ с $k \leqslant m$. Заменяя в определениях алгебр $\mathscr{K}$, $\mathscr{Q}$ и $\mathscr{R}$ алгебры $\mathscr{E}(n)$ на $\mathscr{E}_k(n)$ — алгебру $k$-струй отображений $T_{\bar{p}} \to \mathbf{R}$ [8], приходим к алгебрам $\mathscr{K}_k$, $\mathscr{Q}_k$ и $\mathscr{R}_k$. Такой переход представляет собой гомоморфизм соответствующих алгебр, так что все соотношения между ростками остаются справедливыми и для $k$-струй[1].

*2.4*. Качественное поведение решений уравнений (6), (8) может быть весьма различным в зависимости от алгебраической структуры оператора $\tilde{r}$ (а в особых случаях и его $k$-струйных расширений). Под алгебраической структурой симметрического оператора в евклидовом пространстве понимается характер его собственных значений. В псевдоевклидовом случае симметрический оператор не приводится, вообще говоря, к диагональному виду и его алгебраическая структура является более сложной.

Сформулируем задачу классификации операторов Якоби в терминах алгебры $\mathscr{Q}$, причем её можно рассматривать также как классификацию римановых пространств с отмеченным репером. Выше было показано, что множество ростков

[1] Часто рассматривают девиацию геодезических в одной точке в зависимости от касательного вектора $u$. Это, очевидно, сводится к рассмотрению 2-струи $r_2$ оператора Якоби.

$\{M, g, h_i\}$ находится в биективном соответствии с множеством $\mathscr{G} \subset \mathscr{Q}$ метрических операторов и с множеством $\mathscr{J} \subset \mathscr{Q}$ операторов Якоби. Автоморфизмы алгебры $\mathscr{Q}$, оставляющие инвариантными эти множества, задают на них отношение эквивалентности. Для его определения рассмотрим действие псевдоортогональной группы $\mathrm{O}(n-l, l)$ на $\overset{*}{T}{}^1{}_1$. Оно согласовано со структурой алгебры $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(T_{\bar{p}})$, включая операцию транспонирования, и приводит к преобразованиям алгебры $\mathscr{K}$ вида

$$\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{oko}^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{o}$ — росток отображения $T_{\bar{p}} \to \mathrm{O}(n-l, l)$.

Чтобы преобразования такого типа оставляли инвариантной алгебру $\mathscr{Q}$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\boldsymbol{oy} = \boldsymbol{y}, \tag{13}$$

т.е. $\boldsymbol{o} \in \mathscr{Q}$ и $o_0 = 1$.

Совокупность $\boldsymbol{o} \in \mathscr{Q}$, удовлетворяющих условиям $\boldsymbol{oo}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{e}$ и $o_0 = 1$, образует группу по умножению, которую обозначим как $\mathscr{O}_y$. Она действует на $\mathscr{Q}$ по формуле (12) как группа псевдоортогональных внутренних автоморфизмов. Сужение действия этой группы на подмножество $\mathscr{Q}_{\mathrm{sym}}$ симметрических операторов порождает рассматриваемую нами классификацию. Заменяя в соотношениях (12) и (13) ростки $\boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{k}$ их $m$-струями, получаем также отношение эквивалентности на алгебре $\mathscr{Q}_m$.

Согласно (13) образ отображения $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{y})$ принадлежит стационарной подгруппе $\mathscr{O}_y$ вектора $\boldsymbol{y}$. Очевидно, что при $n = 2$ группа $\mathscr{O}_y$ тривиальна, поэтому дальше будем полагать $n \geqslant 3$. Генераторами группы $\mathscr{O}_y$ служат, очевидно, кососимметрические $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{x} \in \mathscr{Q}$, множество которых обозначим как $\mathscr{X}$. Отметим, что для пространств различной сигнатуры множества $\mathscr{X}$, рассматриваемые как линейные пространства, изоморфны. Полезно отметить, что всякий $\boldsymbol{q} \in \mathscr{Q}$ однозначно разлагается в сумму вида

$$\boldsymbol{q} = q_0 \boldsymbol{e} + \boldsymbol{j}_q + \boldsymbol{x}_q, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{j}_q \in \mathscr{J}$, $\boldsymbol{x}_q \in \mathscr{X}$.

Нетрудно подсчитать, что общий элемент $\boldsymbol{x} \in \mathscr{X}$ зависит от $(n-1)(n-2)/2$ произвольных функций, и следовательно, от такого же числа функций зависит общее преобразование из $\mathscr{O}_y$. С другой стороны, произвольный симметрический оператор из $\mathscr{Q}_{\mathrm{sym}}$ содержит $n(n-1)/2$ независимых компонент, так что рассматриваемое соотношение эквивалентности является весьма сильным. Вместе с тем ему соответствуют нетривиальные инварианты, представляющие значительный интерес. Например, из инвариантности $\det \boldsymbol{g}$ следует, что в пространствах $\{M, g, h_i\}$ с эквивалентными метрическими операторами сопряженные множества точки $\bar{p}$ одинаковы. Преобразование (12) не коммутирует с оператором $\boldsymbol{D}$, так что эквивалентность метрических операторов не означает эквивалентности операторов Якоби и наоборот. Для пространств $\{M, g, h_i\}$ можно говорить о $g$-эквивалентности, $\tilde{r}$-эквивалентности и т.д.

Полезно ввести на $\mathscr{Q}$ также более сильное отношение эквивалентности, определяемое группой $\mathscr{O}$ всех дифференцируемых ростков $\boldsymbol{o}$: $T_{\bar{p}} \to \mathrm{O}(n-l, l)$, действие которой задается соотношениями:

$$q(y) \to q'(z) = oqo^{\mathrm{T}}; \quad z = oy. \tag{15}$$

Видно, что формулы (12), (13) задают ограничение этой группы преобразований на подгруппу $\mathcal{O}_y$, и следовательно, инварианты группы $\mathcal{O}$ являются также инвариантами группы $\mathcal{O}_y$. Следует, однако, иметь в виду, что эти инварианты характеризуют эквивалентные операторы лишь с точностью до локальных диффеоморфизмов $T_p^-$ вида $y \to z = oy$ (например, $\mathrm{Sp}\, q(y) = \mathrm{Sp}\, q'(z)$).

Чтобы дать алгебраическую классификацию операторов из $\mathcal{Q}_{\mathrm{sym}}$, нужно найти их нормальные формы, или иначе указать полную систему инвариантов группы $\mathcal{O}_y$ на $\mathcal{Q}_{\mathrm{sym}}$. Назовём поточечной нормальной формой оператора $q \in \mathcal{Q}_{\mathrm{sym}}$ росток отображения $\langle q \rangle : T_p^- \to \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$, образ которого при каждом $y$ совпадает с нормальной формой матрицы эндоформизма $q(y)$ относительно группы $\mathcal{O}_y$. В связи с этим необходимо сделать два замечания.

Нормальные (псевдожордановы) формы симметрических эндоморфизмов псевдоевклидового пространства хорошо изучены [12]. Они, однако, получены относительно группы $\mathrm{O}(n-l, l)$, а не её стационарной подгруппы $\mathcal{O}_y$. Т.к. $y$ — собственный вектор, то в некоторых случаях, например, при простом спектре оператора $q(y)$, нормальные формы относительно обеих групп совпадают. В общем случае нормальные формы относительно $\mathcal{O}_y$ образуют более широкий класс.

Второе обстоятельство, на которое мы хотели бы обратить внимание, касается зависимости поточечных нормальных форм от параметров. В качестве параметров выступают нормальные координаты $y^i$, хотя в их число могут включаться также параметры, определяющие семейство римановых пространств. Нормальная форма $\langle q \rangle$ испытывает разрывы в тех точках, где происходит изменение структуры жордановых клеток. В работах Арнольда [13] и Галина [14] для матриц, зависящих от параметров, рассматривались также гладкие нормальные формы. Наша задача отличается как группой преобразований, так и рядом других особенностей, которые не позволяют непосредственно использовать полученные ими результаты. В то же время, основные понятия и идеи указанного подхода сохраняют своё значение. В первую очередь это относится к представлению о бифуркационной диаграмме семейства и теореме об устойчивости семейств, трансверсальных стратификации по жордановым типам.

В следующем разделе мы рассматриваем алгебраическую классификацию операторов из $\mathcal{Q}_{\mathrm{sym}}$ для 4-мерных пространств ОТО. Рассматриваемые операторы интерпретируются как операторы Якоби, что позволяет использовать хорошо известные свойства тензора кривизны, в частности его спинорную структуру.

### *3. Алгебраическая структура оператора Якоби для пространств ОТО*

*3.1.* Переходя к рассмотрению четырехмерных пространств лоренцевой сигнатуры, будем наряду с тензорными использовать также спинорные обозначения. Определяя обычным образом параллельный перенос спиноров (см., например, [15]), мы далее будем иметь дело с параллельными спинорными и тензорными прообразами. Для упрощения записи формул будем опускать переводящие символы Инфельда-Ван дер Вардена, надчеркивание индексов и тильду, обозначающую параллельный прообраз.

Используя разложение тензора кривизны по неприводимым представлениям группы Лоренца [15], нетрудно получить спин-образ ковариантного тензора Якоби:

$$r_{\alpha\beta} = \Psi_{ABMN}y^M{}_{A'}y^N{}_{B'} + y^{M'}{}_A y^{N'}{}_B \overline{\Psi}_{A'B'M'N'} + 2y^{M'}{}_{(A}\Phi_{B)MM'(A'}y^M{}_{B')} \tag{16}$$

$$-2\Lambda y_{(A/A'}y_{|B)B'} + \tfrac{1}{2}(3\Lambda\Omega - \Phi_{MNM'N'}y^{MM'}y^{NN'})\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}.$$

Здесь $\Psi_{ABCD}$ — полностью симметричный спинор Вейля; $\Phi_{ABA'B'}$ — эрмитов спин-тензор, соответствующий бесследовой части тензора Риччи: $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}Rg_{\alpha\beta} = -2\Phi_{ABA'B'}$; $24\Lambda = R$ — скалярная кривизна; $\varepsilon_{AB}$ — кососимметричная „спинорная метрика“; $\Omega = g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta$. По индексам в круглых скобках, за исключением выделенных вертикальными чёрточками, производится симметризация.

Переход к спинорам предполагает редукцию векторного базиса к спиновой системе отсчета. Пусть $\{o^A, \iota^A\}$ — базис спинорного слоя точки $\bar{p}$, нормированный условием $o_A\iota^A = 1$. С каждой такой диадой можно связать комплексную световую тетраду $z^\alpha{}_i$:

$$z^\alpha{}_0 \equiv l^\alpha = O^A\bar{O}^{A'}, \quad z^\alpha{}_1 \equiv n^\alpha = l^A l^{A'}; \quad z^\alpha{}_2 \equiv m^\alpha = O^A\bar{\imath}^{A'}; \quad z^\alpha{}_3 \equiv \bar{z}^\alpha{}_2. \tag{17}$$

Разложим вектор $\boldsymbol{y}$ по этому базису:

$$\boldsymbol{y} = v\boldsymbol{l} + u\boldsymbol{n} + z\boldsymbol{m} + \overline{z\boldsymbol{m}}. \tag{18}$$

Коэффициенты $u$, $v$, $z$, $\bar{z}$ играют роль комплексных световых нормальных координат. Теперь нетрудно найти в явном виде спинорные компоненты бесследовой части $\varrho_{\alpha\beta}$ тензора Якоби и его след $r^\sigma{}_\sigma$. Эти выражения приведены в приложении (П.2).

Поточечная нормальная форма $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ оператора Якоби в соответствии с данным выше определением, при каждом $\boldsymbol{y}$ представляет собой матрицу эндоформизма $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})$ в некотором каноническом репере. Принимая во внимание, что $\boldsymbol{r}$ — собственный вектор оператора $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})$:

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{y} = 0, \tag{19}$$

и что преобразования из группы эквивалентности $\mathcal{O}_{\boldsymbol{y}}$ оставляют его неподвижным, выберем его в качестве одного из векторов канонического репера. Остальные векторы канонического базиса определяются в процессе упрощения матрицы Якоби с помощью преобразований из группы $\mathcal{O}_{\boldsymbol{y}}$. Задача состоит в том, чтобы зная матрицу $r'_{ij}$ в отмеченной системе отсчета, определить её алгебраическую структуру для каждого $\boldsymbol{y}$ и найти вид соответствующих нормальных форм (штрихом возле коренной буквы обозначаем компоненты в отмеченном репере).

В качестве канонического репера в различных случаях удобно наряду с комплексной изотропной тетрадой использовать правый ортонормированный репер $\boldsymbol{\delta}_i$:

$$\boldsymbol{\delta}_0 = (\boldsymbol{l}+\boldsymbol{n})/\sqrt{2};\ \boldsymbol{\delta}_1 = (\boldsymbol{l}-\boldsymbol{n})/\sqrt{2};\ \boldsymbol{\delta}_2 = (\boldsymbol{m}+\overline{\boldsymbol{m}})/\sqrt{2};\ \boldsymbol{\delta}_3 = i(\boldsymbol{m}-\overline{\boldsymbol{m}})/\sqrt{2}, \tag{20}$$

а также действительный изотропный базис $\boldsymbol{b}_i = \{\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_3\}$.

Для группы Лоренца стационарные подгруппы $\mathcal{O}_y$, называемые также малыми группами, бывают трех типов в зависимости от знака $\Omega$ [16]. В случае временноподобного $\boldsymbol{y}(\Omega > 0)$ группа $\mathcal{O}_y$ изоморфна группе вращений O(3). Для построения нормальных форм ограничимся её связной компонентой SO(3), которая, как известно, локально изоморфна SU(2). Выбирая диаду $\{\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\iota}\}$, так чтобы нормированный вектор $\Omega^{-1/2}\boldsymbol{y}$ имел спинорную форму базисного вектора $\boldsymbol{\delta}_0$, находим, что преобразования из этой группы имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{\iota} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{\iota} \end{pmatrix}; \qquad \alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta} = 1. \tag{21}$$

Нетрудно выписать соответствующие преобразования векторного базиса и матрицы Якоби.

В случае изотропного $\boldsymbol{y}$ группа $\mathcal{O}_y$ изоморфна группе движений евклидовой плоскости E(2). Ограничиваясь по-прежнему собственными преобразованиями и выбирая $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{y}$, находим спинорное представление этих преобразований

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{\iota} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ \gamma & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{\iota} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in \mathbf{R}. \tag{22}$$

Для пространственноподобного $\boldsymbol{y}$ группа $\mathcal{O}_y$ изоморфна O(1 ,2). Учитывая локальный изоморфизм $\mathrm{SO}(1,2) \cong \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ и принимая нормированный вектор $(-\Omega)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{y}$ в качестве базисного $\boldsymbol{\delta}_3$, находим, что рассматриваемые преобразования имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{\iota} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{\iota} \end{pmatrix}, \alpha\delta-\beta\gamma = 1; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}. \tag{23}$$

Действие группы $\mathcal{O}_y$ разбивает пространство тензоров $r_{\alpha\beta}(\boldsymbol{y})$ на орбиты (классы эквивалентности), каждой из которых принадлежит своя нормальная форма $\langle r_{ik}\rangle(\boldsymbol{y})$. Хотя малые группы $\mathcal{O}_y$ трехпараметрические, размерность орбиты может быть меньше трех, если некоторые преобразования оставляют её точки (в частности, нормальную форму) неподвижными. В этом случае канонический репер определяется неоднозначно, а размерность орбиты $b = 3-a$, где $a$ — число параметров преобразования, остающихся неопределенными. Учитывая, что размерность пространства тензоров Якоби (при фиксированном $\boldsymbol{y}$) равна шести, находим, что коразмерность орбиты $d = 3+a$.

*3.2.* Так как $\mathcal{O}_y$ — подгруппа группы Лоренца, то нормальные формы $\langle r_{ik}\rangle(\boldsymbol{y})$ представляют собой „расширение" квазижордановых нормальных форм. Алгебраическая структура и квазижордановы формы симметрического тензора в четырехмерном пространстве лоренцевой сигнатуры изучались с разных точек зрения в ряде работ [12, 17, 18] (см. также ссылки в [18]). Мы будем опираться на фундаментальную работу Плебаньского [6], в которой содержится подробнсе исследование этого вопроса, а также ставится задача классификации операторов Якоби. Как следует из указанных работ, симметрическая матрица может принадлежать к одному из следующих типов: $\mathrm{I_R}$, $\mathrm{I_Z}$, II и III с возможными вырождениями (обозначения из [6]). Для матрицы Якоби нужно учесть ещё тождественное обращение в нуль одного собственного значения (19).

Для определения алгебраического типа, которому принадлежит тензор $r_{\alpha\beta}(\boldsymbol{y})$ при тех или иных $\boldsymbol{y}$, нам понадобятся его полиномиальные инварианты, прежде всего коэффициенты $\underset{[k]}{r}$ его характеристического уравнения. Учитывая (19), его можно записать в виде:

$$\det(\boldsymbol{r}-\lambda\boldsymbol{e}) = \lambda(\lambda^3 - \underset{[1]}{r}\,\lambda^2 + \underset{[2]}{r}\,\lambda - \underset{[3]}{r}) = 0. \tag{24}$$

Заменой $\lambda = \mu + \frac{1}{3}\underset{[1]}{r}$ кубический сомножитель сводится к приведенному виду: $\mu^3 + p\mu - q = 0$, причём

$$p = \underset{[2]}{r} - \tfrac{1}{3}\underset{[1]}{r}^2; \qquad q = \underset{[3]}{r} - \tfrac{1}{3}\underset{[1]}{r}\,\underset{[2]}{r} + \tfrac{2}{27}\underset{[1]}{r}^3. \tag{25}$$

Выражения для инвариантов $\underset{[k]}{r}$ приведены в приложении (П.7—П.11).

Будем рассматривать $r_{\alpha\beta}$, как семейство тензоров, которое параметризовано нормальными координатами, принимающими значения в $\overset{*}{N}$. Назовём бифуркационным множеством $B$ заданного семейства множество тех $\boldsymbol{y} \in \overset{*}{N}$, для которых дискриминант $D$ характеристического уравнения (24) обращается в нуль

$$D \equiv \underset{[3]}{r}^2 \Delta = 0. \tag{26}$$

Здесь $\Delta$ — дискриминант кубического сомножителя в (24), определяемый выражением

$$\Delta = -4\underset{[2]}{r}^3 - 27\underset{[3]}{r}^2 + \underset{[1]}{r}^2\underset{[2]}{r}^2 + 18\underset{[1]}{r}\,\underset{[2]}{r}\,\underset{[3]}{r} - 4\underset{[1]}{r}\,\underset{[3]}{r} = -4p^3 - 27q^2. \tag{27}$$

В точках, которые не принадлежат бифуркационному множеству, оператор $r^{\alpha}{}_{\beta}$ имеет простой спектр, т.е. принадлежит типу, образующему, как известно, всюду плотное множество в пространстве эндоморфизмов. В точках множества $B$ происходит совпадение собственных значений или становится непростой характеристика. Эти особенности характеризуют распределение напряженности гравитационного поля и проявляются во взаимном поведении геодезических. Разбиение пространства параметров $\overset{*}{N}$ по алгебраическим типам оператора $r^{\alpha}{}_{\beta}(\boldsymbol{y})$ назовём бифуркационной диаграммой. Возникает задача изучения бифуркационной диаграммы в зависимости от свойств тензора кривизны, прежде всего его алгебраической структуры.

Значительный интерес вызывает вопрос о размерности тех подмногообразий, на которых могут возникать определенные алгебраические типы оператора Якоби. Известно, что в параметрическом семействе матриц некоторые особенности возникают устойчиво, другие же разрушаются при малом шевелении семейства (при малом изменении кривизны). Теорема о трансверсальных семействах утверждает, что в пространстве семейств матриц всюду плотное множество образуют семейства, трансверсальные стратификации по алгебраическим типам [13]. Из неё следует, что алгебраический тип, которому соответствует страт коразмерности $c$ в пространстве матриц, может устойчиво возникать на подмногообразиях, коразмерность которых в пространстве параметров также равна $c$. Страт представляет собой объединение орбит, характеризуемых одним и тем же алгебраическим типом, и его коразмерность $c = d - v = 3 + a - v$, где $v$ — число переменных параметров в нормальной форме. Этот алгебраический тип может устойчиво появляться на подмногообразиях размерности $4 - c = 1 + a - v$.

*3.3.* Алгебраическую структуру оператора Якоби будем описывать, задавая характеристику Вейерштрасса его $\lambda$-матрицы $\|r^i{}_j - \lambda\delta^i{}_j\|$. При этом примем следующие соглашения: первым пишем символ собственного значения принадлежащего временноподобному или изотропному собственному вектору; при $\Omega < 0$ символ, соответствующий $y$, пишем последним; круглые скобки обозначают совпадение собственных значений; „$\circ$" над символом — нулевое собственное значение, черта — комплексно сопряженное. Например, характеристика $[\overset{\circ}{2}(11)]$ означает, что оператор имеет одну двумерную жорданову клетку с $\lambda_1 = 0$ и две одномерные с $\lambda_2 = \lambda_3$. Для указания структуры бесследового тензора $\varrho_{\alpha\beta}$ будем также использовать обозначения Плебаньского.

Знание инвариантов $\underset{[k]}{r}$ позволяет определить характеристику оператора Якоби лишь в том случае, если он заведомо является оператором простого типа. Для определения алгебраической структуры оператора, который может иметь как простую так и непростую характеристику, знания собственных значений недостаточно и требуется дальнейшее исследование. Известно, что для непростого типа необходимо существование строго одного изотропного собственного вектора [18]. В общем случае проверка этого условия вызывает определенные трудности. Однако, учитывая (19) и взаимную ортогональность собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, нетрудно понять, что при $\Omega > 0$ возможен лишь простой тип.

Для определения структуры $r_{\alpha\beta}$ при $\Omega \leqslant 0$ мы будем кроме $\underset{[k]}{r}$ использовать квадратичный спин-тензор

$$V_{ABCD} = \varrho_{(AB}{}^{M'N'}\varrho_{CD)M'N'} \equiv \varrho_{AB}{}^{M'N'}\varrho_{CDM'N'} - \left(\tfrac{1}{4}\underset{[1]}{r}{}^2 - \tfrac{2}{3}\underset{[2]}{r}\right)\varepsilon_{A(C|}\varepsilon_{B|D)}. \tag{28}$$

Связь компонент $V_{ABCD}$ и $\varrho_{ABA'B'}$ приведена в приложении (П.6). Как показал Плебаньский в цитированной работе, исследуя тип этого симметрического спинора, классифицируемого по той же схеме что и спинор Вейля, можно в ряде случаев определить структуру тензора $\varrho$. (Интересно отметить, что отыскание корней характеристического уравнения матрицы $\varrho_{\alpha\beta}$ посредством кубического характеристического уравнения спинора $V$ является переформулировкой решения Декарта-Эйлера для уравнений четвертой степени.)

Однако, исследуя $V_{ABCD}$, нельзя, например, разделить типы $[2N-2S]_{(2-1)}$ и $[2T-2S]_2$. Это можно сделать, используя явный вид преобразований спинорных компонент $\varrho_{ik}$. Соответствующие условия приведены ниже. Заметим, что они становятся прозрачными, если привлечь к рассмотрению теорию эрмитовой квартики $\boldsymbol{H} = \varrho_{ABA'B'}\omega^A\omega^B\overline{\omega}^{A'}\overline{\omega}^{B'}$. Её исследование оказывается необходимым также для разделения „близнецов“ $[T-2S_1-S_2]_3$ и $[2T-S_1-S_2]_3$, $[T-3S]_2$ и $[3T-S]_2$. Эти

ТАБЛИЦА I

$\Omega > 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\Delta \neq 0,\quad \underset{[3]}{r} \neq 0$ | $[\overset{\circ}{1}111]$ | — | 0 |
| 2 | $\underset{[3]}{r} = 0$ | $[(\overset{\circ}{1}1)11]$ | — | 1 |
| 3 | $\Delta = 0,\quad \underset{[3]}{r} \neq 0,\quad p \neq 0$ | $[\overset{\circ}{1}(11)]1$ | $\arg\alpha$ | 2 |
| 4 | $p = 0$ | $[\overset{\circ}{1}(111)]$ | $\alpha, \arg\beta$ | 5 |
| 5 | $\underset{[3]}{r} = 0,\quad \underset{[2]}{r} \neq 0$ | $[(\overset{\circ}{1}1)(11)]$ | $\arg\alpha$ | 3 |
| 6 | $\underset{[2]}{r} = 0,\quad \underset{[1]}{r} \neq 0$ | $[(1\overset{\circ}{1}1)1]$ | $\operatorname{mod}\alpha$ | 3 |
| 7 | $\underset{[1]}{r} = 0$ | $[(1\overset{\circ}{1}11)]$ | $\alpha, \arg\beta$ | 6 |

ТАБЛИЦА II

$\Omega = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\underset{[2]}{r} \neq 0,\quad 4\underset{[2]}{r} \neq \underset{[1]}{r^2},\quad \Gamma \neq 0$ | $[\overset{\circ}{2}11]$ | — | 0 |
| 2 | $\Gamma = 0$ | $[(\overset{\circ}{1}1)11]$ | — | 1 |
| 3 | $4\underset{[2]}{r} = \underset{[1]}{r^2},\quad \Gamma \neq 0$ | $[\overset{\circ}{2}(11)]$ | $\theta$ | 2 |
| 4 | $\Gamma = 0$ | $[(\overset{\circ}{1}1)(11)]$ | $\theta$ | 3 |
| 5 | $\underset{[2]}{r} = 0,\quad \underset{[1]}{r} \neq 0,\quad \Gamma \neq 0$ | $[\overset{\circ}{3}1]$ | — | 1 |
| 6 | $\Gamma = 0,\quad V_{ABCD} \neq 0$ | $[(\overset{\circ}{2}1)]$ | $\operatorname{Re}\gamma$ | 2 |
| 7 | $V_{ABCD} = 0$ | $[(1\overset{\circ}{1}1)1]$ | $\operatorname{Re}\gamma$ | 3 |
| 8 | $\underset{[1]}{r} = 0,\quad E' \neq 0$ | $[(\overset{\circ}{3}1)]$ | $\operatorname{Im}\gamma$ | 3 |
| 9 | $E' = 0,\quad P_0' \neq 0$ | $[(2\overset{\circ}{1}1)]$ | $\gamma, \theta$ | 5 |
| 10 | $P_0' = 0$ | $[(11\overset{\circ}{1}1)]$ | $\gamma, \theta$ | 6 |

ТАБЛИЦА III

$\Omega < 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\Delta < 0,\quad r_{[3]} \neq 0$ | $[1\bar{1}1\mathring{1}]$ | — | 0 |
| 2 | $r_{[3]} = 0$ | $[1\bar{1}(1\mathring{1})]$ | — | 1 |
| 3 | $\Delta > 0,\quad r_{[3]} \neq 0$ | $[111\mathring{1}]$ | — | 0 |
| 4 | $r_{[3]} = 0,\quad r_{[2]} \neq 0$ | $[\mathring{1}11\mathring{1}]$<br>$[11(1\mathring{1})]$ | — | 1 |
| 5 | $\Delta = 0,\quad r_{[3]} \neq 0,\quad p \neq 0,\quad V'_0 \neq 0,\quad G' \neq 0$ | | | |
| | $V'_0 = 0,\quad V'_1 \neq 0$ | $[21\mathring{1}]$ | — | 1 |
| | $V'_1 = 0,\quad F' \neq 0$ | | | |
| 6 | $V'_0 \neq 0,\quad G' = 0$ | $[1(11)\mathring{1}]$ | arc cos $\alpha$ | 2 |
| | $V'_0 = V'_1 = 0,\quad F' = 0$ | $[(11)1\mathring{1}]$ | $\alpha$ | |
| 7 | $p = 0,\quad V'_0 \neq 0,\quad H' \neq 0$ | | | |
| | $V'_0 = 0,\quad V'_1 \neq 0$ | $[3\mathring{1}]$ | — | 2 |
| | $V'_1 = 0,\quad V'_3 \neq 0$ | | | |
| 8 | $V'_0 \neq 0,\quad H' = 0$ | | | |
| | $V'_0 = V'_1 = V'_3 = 0,\quad V'_4 \neq 0$ | $[(21)\mathring{1}]$ | $\gamma$ | 3 |
| 9 | $V_{ABCD} = 0$ | $[(111)\mathring{1}]$ | $\alpha, \beta, \gamma$ | 5 |
| 10 | $r_{[3]} = 0,\quad r_{[2]} \neq 0,\quad p'_1 \neq 0,\quad p'_2 \neq 0$ | | | |
| | $p'_1 = 0,\quad p'_3 \neq 0$ | $[2(\mathring{1}1)]$ | — | 2 |
| 11 | $p'_1 \neq 0,\quad p'_2 = 0$ | $[\mathring{1}(11)\mathring{1}]$ | arc cos $\alpha$ | 3 |
| | $p'_1 = 0,\quad p'_3 = 0$ | $[(11)(1\mathring{1})]$ | $\alpha$ | |
| 12 | $r_{[2]} = 0,\quad r_{[1]} \neq 0,\quad E' \neq 0$ | $[\mathring{2}1\mathring{1}]$ | — | 2 |
| 13 | $E' = 0$ | $[1(11\mathring{1})]$ | arc cos $\alpha$ | 3 |
| | | $[(1\mathring{1})1\mathring{1}]$ | $\alpha$ | |
| 14 | $r_{[1]} = 0,\quad E' \neq 0$ | $[(3\mathring{1})]$ | — | 3 |
| 15 | $E' = 0\quad p'_0 \neq 0$ | $[(2\mathring{1}1)]$ | $\gamma$ | 4 |
| 16 | $p'_0 = 0$ | $[(11\mathring{1}1)]$ | $\alpha, \beta, \gamma$ | 6 |

и другие результаты по спинорной классификации $H$ авторы предполагают привести в двугой работе.

Необходимо ещё отметить, что на световом конусе $r_{[3]} = 0$ (и, следовательно, изотропный конус включается в бифуркационное множество $B$). При этом существует нетривиальный инвариант $\Gamma = \Omega^{-1} r_{[3]}$ (см. приложение). Можно показать, что обращение его в нуль (при $\Omega = 0$) соответствует понижению ранга $r_{\alpha\beta}$. Это позволяет более простым способом разделить типы $[\overset{\circ}{2}11]$ и $[(\overset{\circ}{1}1)11]$, $[\overset{\circ}{3}1]$ и $[(\overset{\circ}{2}1)1]$, $[\overset{\circ}{2}(11)]$ и $[(\overset{\circ}{1}1)(11)]$, чем при использовании $V_{ABCD}$.

Перечисленные методики позволили исследовать условия, при которых оператор $r^\alpha{}_\beta$ имеет ту или иную характеристику.

*Теорему об алгебраической структуре оператора Якоби* удобно сформулировать в виде серии предложений, сведенных в таблицы I, II, III, соответствующие $\Omega >, =, < 0$. В первой колонке указаны условия, выполнение которых является необходимым и достаточным, чтобы оператор $r^\alpha{}_\beta(y)$ имел алгебраический тип, указанный во второй колонке. Соответствующий произвол в определении канонического репера и коразмерность страта в пространстве матриц указаны в третьей и четвертой колонках.

Пропуск в начале строки в таблицах означает выполнение соответствующих условий из предшествующих строк. Несколько строк условий, помещенных под одним номером, соединяются союзом „или"; то же самое и для характеристик. Введены также следующие обозначения:

$$E = |V_0|^2+|V_4|^2; \quad F = 2V_3^2-3V_2V_4;$$

$$G = V_0^2V_3-3V_0V_1V_2+2V_1^3; \quad H = V_0V_2-V_1^2;$$

$$P_0 = \varrho_{00}^2+\varrho_{22}^2; \quad P_1 = \varrho_{00}^2+|\varrho_{01}|^2;$$

$$P_2 = \varrho_{00}\varrho_{11}-|\varrho_{01}|^2; \quad P_3 = \varrho_{11}\varrho_{22}-|\varrho_{12}|^2.$$

$V_i$ и $\varrho_{kl}$ — компоненты спиноров $V_{ABCD}$ и $\varrho_{ABA'B'}$ в обычных собирательных индексах. Штрих возле коренной буквы означает, что берутся компоненты в отмеченной системе отсчёта.

При определении стратификации пространства параметров по алгебраическим типам оператора Якоби следует иметь в виду, что структуры, перечисленные в Таблице II, определены на гиперповерхности $\Omega = 0$, так что коразмерность соответствующих стратов в пространстве всех параметров на единицу больше.

*3.4*. Приведём теперь явные выражения для нормальных форм оператора Якоби. С этой целью удобно задавать в каноническом репере значения $\lambda$-матрицы $\langle r_{ik}-\lambda g_{ik}\rangle$. Такая запись позволяет непосредственно судить о нормировке репера. Общая структура нормальных форм $\langle r\rangle$ совпадает с квазижордановой, но в некоторых случаях недиагональные элементы не приводятся к постоянному значению. Достаточно указать нормальные формы с несовпадающими собственными значениями, т.к. более вырожденные случаи получаются при наложении очевидных условий.

**I. $\Omega > 0$.** Принимая $y = \Omega^{1/2}\delta_0$ $(u = v = \Omega^{1/2}/\sqrt{2}),\ z = 0)$, получаем из (П.2) следующие выражения для $r$ и $\varrho_{ik}$:

$$\overset{[1]}{r} = \Omega(6\Lambda-\Phi_{00}-2\Phi_{11}-\Phi_{22}) = 4(\varrho_{00}+\varrho_{11});$$

$$\overset{[1]}{\varrho_{00}} = \varrho_{22} = \Omega(\mathrm{Re}\Psi_2+\Phi_{11}-\Lambda); \quad \varrho_{01} = -\varrho_{12} = \Omega(\overline{\Psi}_3-\Psi_1+\Phi_{12}-\Phi_{01})/2;$$

$$\varrho_{02} = \Omega(\Psi_0+\overline{\Psi}_4-2\Phi_{02})/2; \quad \varrho_{11} = \Omega[-\Lambda/2-\mathrm{Re}\,\Psi_2+(\Phi_{00}+\Phi_{22}-2\Phi_{11})/4].$$

Выбором параметров $\alpha$ и $\arg\beta$ в (21) добиваемся $\varrho_{01}=\operatorname{Im}\varrho_{02}=0$. Для характеристики $[\overset{\circ}{1}111]$ получаем:

$$\langle r_{ik}-\lambda g_{ik}\rangle=\operatorname{diag}\{-\lambda,\ -\lambda_1+\lambda,\ -\lambda_2+\lambda,\ -\lambda_3+\lambda\};$$

$$\lambda_1=\tfrac{1}{4}\underset{[1]}{r}+\varrho_{11}-\varrho_{00}=2\Omega(\Lambda-\Phi_{11}-\operatorname{Re}\Psi_2);$$

$$\lambda_{2,3}=\tfrac{1}{4}\underset{[1]}{r}-\varrho_{11}\mp\varrho_{02}=\Omega[2\Lambda+\operatorname{Re}\Psi_2-\tfrac{1}{2}(\Phi_{00}+\Phi_{22})\mp\tfrac{1}{2}(\Psi_0+\overline{\Psi}_4-2\Phi_{02})].$$

II. $\Omega=0$. Принимая $y=l(u=z=0,v=1)$, получаем из (П.2):

$$\underset{[1]}{r}=-2\Phi_{00};\qquad \varrho_{00}=\varrho_{01}=0;\qquad \varrho_{02}=\Psi_0;\qquad \varrho_{11}=\tfrac{1}{2}\Phi_{00};$$

$$\varrho_{12}=\Psi_1+\Phi_{01};\qquad \varrho_{22}=2(\operatorname{Re}\Psi_2+\Phi_{11}-\Lambda).$$

$[\overset{\circ}{2}11]$. Выбором $\theta$ и $\gamma$ в (22) добиваемся: $\varrho_{12}=\operatorname{Im}\varrho_{02}=0$. Нормальная форма имеет вид:

$$\langle r_{ik}-\lambda g_{ik}\rangle=\operatorname{diag}\left\{\begin{Vmatrix}0 & -\lambda\\ -\lambda & \varrho_{22}\end{Vmatrix},\ -\lambda_2+\lambda,\ -\lambda_3+\lambda\right\};$$

$$\lambda_{2,3}=\tfrac{1}{2}\underset{[1]}{r}\mp\varrho_{02}=-\Phi_{00}\mp\Psi_0;\qquad \varrho_{22}\neq 0.$$

Переход к характеристике $[(\overset{\circ}{1}1)11]$ получаем при $\varrho_{22}=0$.

$[\overset{\circ}{3}1]$. Выбирая параметры в (22), получаем $\operatorname{Im}\varrho_{02}=\operatorname{Im}\varrho_{12}=\varrho_{22}=0$. В силу условий (5) из Таблицы II имеем также $\varrho_{02}-\tfrac{1}{2}\underset{[1]}{r}=\Psi_0+\Phi_{00}=0$.

$$\langle r_{ik}-\lambda g_{ik}\rangle=\operatorname{diag}\left\{\begin{Vmatrix}0 & -\lambda & 0\\ -\lambda & 0 & \sqrt{2}\varrho_{12}\\ 0 & \sqrt{2}\varrho_{12} & \lambda\end{Vmatrix},\ -\lambda_3+\lambda\right\};\qquad \lambda_3=\underset{[1]}{r}=-2\Phi_{00}=2\Psi_0.$$

III. $\Omega<0$. Полагая $y=(-\Omega)^{1/2}\delta_3(u=v=0;\ z=\Omega^{1/2}/\sqrt{2})$ находим из (П.2):

$$\varrho_{00}=\Omega(\operatorname{Re}\Psi_0-\Phi_{00});\qquad \varrho_{01}=\Omega\operatorname{Re}(\Psi_1-\Phi_{01});\qquad \varrho_{02}=\Omega(\operatorname{Re}\Psi_2-\Phi_{11}-\Lambda);$$

$$\varrho_{11}=\tfrac{1}{2}\Omega[\operatorname{Re}(2\Psi_2-\Phi_{02})-\Phi_{11}+\Lambda];\qquad \varrho_{12}=\Omega(\operatorname{Re}\Psi_3-\Phi_{12});$$

$$\varrho_{22}=\Omega(\operatorname{Re}\Psi_4-\Phi_{22});\qquad \underset{[1]}{r}=4(\varrho_{11}-\varrho_{02})=2\Omega(3\Lambda+\Phi_{11}-\operatorname{Re}\Phi_{02}).$$

$[1\bar{1}1\overset{\circ}{1}]$. Выбором $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ в (23) добиваемся: $\varrho_{00}+\varrho_{22}=\varrho_{01}=\varrho_{12}=0$.

$$\langle r_{ik}-\lambda g_{ik}\rangle=\operatorname{diag}\left\{\begin{Vmatrix}a-\lambda & b\\ b & -a+\lambda\end{Vmatrix},\ -\lambda_2+\lambda,\ \lambda\right\};$$

$$\lambda_{0,1}=a\pm ib;\qquad a=\varrho_{11}+\tfrac{1}{4}\underset{[1]}{r}=\Omega[2\Lambda+\operatorname{Re}(\Psi_2-\Phi_{02})];\qquad b=\varrho_{00};$$

$$\lambda_2=\tfrac{1}{4}\underset{[1]}{r}-\varrho_{11}-\varrho_{02}=2\Omega(\Lambda+\Phi_{11}-\operatorname{Re}\Psi_2).$$

$[11\mathring{1}]$. Выбирая параметры преобразования, добиваемся $\varrho_{00}-\varrho_{22} = \varrho_{01} = \varrho_{12} = 0$.

$$\langle r_{ik}-\lambda g_{ik}\rangle = \operatorname{diag}\{\lambda_0-\lambda,\ -\lambda_1+\lambda,\ -\lambda_2+\lambda,\ \lambda\};$$

$$\lambda_{0,1} = \tfrac{1}{4}\underset{[1]}{r}+\varrho_{11}\pm\varrho_{00} = \Omega[2\Lambda+\mathrm{Re}(\Psi_2-\Phi_{02})\pm(\mathrm{Re}\,\Psi_0-\Phi_{00})];$$

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{4}\underset{[1]}{r}-\varrho_{11}-\varrho_{02} = 2\Omega(\Lambda+\Phi_{11}-\mathrm{Re}\,\Psi_2).$$

$[21\mathring{1}]$. Выбором $\alpha, \beta, \gamma$: $\varrho_{00} = \varrho_{12} = 0$, $\varrho_{22} = \pm 1$. В силу условий (5) из Таблицы III имеем также $\varrho_{01} = 0$.

$$\langle r_{ik}-\lambda g_{ik}\rangle = \operatorname{diag}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & \lambda_0-\lambda \\ \lambda_0-\lambda & \pm 1\end{Vmatrix},\ -\lambda_2+\lambda,\ \lambda\right\};$$

$$\lambda_0 = \tfrac{1}{4}\underset{[1]}{r}+\varrho_{11} = \Omega[2\Omega+\mathrm{Re}(\Psi_2-\Phi_{02})];$$

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{4}\underset{[1]}{r}-\varrho_{11}-\varrho_{02} = 2\Omega(\Lambda+\Phi_{11}-\mathrm{Re}\,\Psi_2).$$

$[3\mathring{1}]$. Выбором $\alpha, \beta, \gamma$: $\varrho_{00} = \varrho_{02} = 0$, $\sqrt{2}\varrho_{12} = \pm 1$. Кроме того, в силу условий (7) из Таблицы III: $\varrho_{01} = 2\varrho_{11}+\varrho_{02} = 0$.

$$\langle r_{ik}-\lambda g_{ik}\rangle = \operatorname{diag}\left\{\begin{Vmatrix} 0 & \lambda_0-\lambda & 0 \\ \lambda_0-\lambda & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & -\lambda_0+\lambda\end{Vmatrix},\ \lambda\right\};$$

$$\lambda_0 = \tfrac{1}{3}\underset{[1]}{r} = 2\Omega(\Lambda+\Phi_{11}-\mathrm{Re}\,\Psi_2).$$

## *4. Бифуркационные диаграммы*

*4.1.* В этом разделе мы хотим дать примеры бифуркационных диаграмм оператора Якоби и показать, что они содержат богатую информацию о строении гравитационного поля, в частности об алгебраической структуре тензора кривизны.

Рассматривая алгебраическую классификацию тех или иных физических величин, следует иметь в виду, что некоторые из типов могут существовать устойчиво, тогда как другие разрушаются при малом шевелении [13]. Так, гравитационное поле, устойчиво существующее в свободной от источников точке ПВ, может быть только общего типа по классификации Петрова. Тем не менее неустойчивые в этом смысле алгебраические типы в ОТО привлекают не меньше, а может быть, больше внимания, чем общий случай. Они, как правило, легче поддаются исследованию, а их специальные свойства могут быть связаны с определённой физической идеализацией. Примером может служить тип $N$ по Петрову-Пенроузу, обычно ассоциируемый с чистым гравитационным излучением [19].

При переходе от классификации отдельных объектов к рассмотрению их параметрических семейств оказывается, что на некоторых подмногообразиях алгебраически вырожденные типы возникают вполне закономерно. Малые шевеления семейства не разрушают такие особенности, а приводят лишь к шевелению особых подмногообразий. Как уже отмечалось в п. 3.2, такого рода устойчивыми объектами в пространстве семейств матриц являются семейства, трансверсальные стратификации по алгебраическим типам. Для сравнения укажем, *что* II *тип по Петрову может устойчиво существовать на двумерных поверхностях, а* III *и* D *— в изолированных точках. Коразмерности алгебраически специальных типов в пространстве тензоров Вейля равны*: $c_{\mathrm{II}} = 2$; $c_{\mathrm{III}} = c_{\mathrm{D}} = 4$; $c_{\mathrm{N}} = 6$; $c_0 = 10$. Они подсчитываются как в 3.2 по формуле $c = 10-(6-a)-v$, где $v$ — число переменных параметров в нормальной форме, $a$ — произвол в определении канонического репера (см. также [20]).

В рассматриваемых ниже примерах встречаются как устойчивые, так и неустойчивые особенности. Появление последних на некотором подмножестве $B_1 \subset B$ свидетельствует либо о специальных физических свойствах, ограничивающих допустимые возмущения, либо о неадекватности модели в окрестности множества $B_1$. Вместе с тем, сильно вырожденные типы могут устойчиво существовать при увеличении числа параметров, когда пространство $\{M, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}_i\}$ само включается в некоторое семейство, в частности путем варьирования опорной точки.

На основе соотношений (26) и (П.7), проясняющих структуру дискриминанта характеристического уравнения, можно сформулировать некоторые наиболее общие свойства бифуркационной диаграммы.

1. *Бифуркационное множество B образовано объединением изотропного конуса L и множеств $B_\Delta$ и $B_\Gamma$, определяемых уравнениями $\Delta = 0$, $\Gamma = 0$. Если компоненты матриц Якоби как функции нормальных координат являются аналитическими (полиномиальными), то указанные множества — аналитические (алгебраические).*

2. *Комплексные собственные значения существуют в той и только той области, где $\Delta < 0$.*

Учитывая, что при $\Omega \geqslant 0$ не может быть комплексных корней, заключаем также:

3. *В причинной области $\Delta \geqslant 0$.*

Далее, пусть $K$ обозначает множество тех $y \in L$, которые являются главными световыми векторами для $\Psi_{ABCD}(y)$: $K = \{y^{AA'} = \omega^A \overline{\omega}^{A'} / \Psi_{ABCD}(y)\omega^A\omega^B\omega^C\omega^D = 0\}$. Следующие три предложения нетрудно получить, исходя из Таблицы II и явного вида инвариантов оператора Якоби.

4. $K \subset L \cap B_\Delta$.

5. *Если* $y \in L \cap B_\Delta$ *и* $\Phi_{ABA'B'}\omega^A\omega^B\overline{\omega}^{A'}\overline{\omega}^{B'} = 0$, *то* $y \in K \cap B_\Gamma$.

6. *Для пространств Эйнштейна* $K = L \cap B_\Delta = L \cap B_\Delta \cap B_\Gamma$.

Перечислим ещё возможные алгебраические типы оператора $r$ на $K$, причем условия типа выразим через компоненты в спинорном базисе, полагая $y^{AA'} = o^A\bar{o}^A$ :

1. $\Phi_{00} \neq 0$; $\quad \mathrm{Re}\,\Psi_2+\Phi_{11}-\Lambda \neq 0 \quad [\overset{\circ}{2}(11)]$

2. $\mathrm{Re}\,\Psi_2+\Phi_{11}-\Lambda = 0 \quad [(1\overset{\circ}{1})(11)]$

3. $\Phi_{00} = 0$; $\quad \Psi_1+\Phi_{01} \neq 0 \quad [(\overset{\circ}{3}1)]$

4. $\Psi_1+\Phi_{01} = 0 \quad \mathrm{Re}\quad {}_2+\Phi_{11}-\Lambda \neq 0 \quad [(2\overset{\circ}{1}1)]$

5. $\mathrm{Re}\,\Psi_2+\Phi_{11}-\Lambda = 0 \quad [(1\overset{\circ}{1}11)]$

Здесь легко прослеживается влияние спинора $\Phi$ и скаляра $\Lambda$, а также переход от простого к кратным векторам Дебеве.

*4.2.* Далее будем рассматривать свободные гравитационные поля. В 2.4 было отмечено, что бифуркационное множество $B$, рассматриваемое с точностью до диффеоморфизмов пространства $T_p^-$, является инвариантом группы $\mathcal{O}$, действие которой определяется формулами (15). Допустим, что в нормальной окрестности $N_p^-$ тип по Петрову не меняется. Тогда легко видеть, что указанные преобразования позволяют привести тензор кривизны, входящий в определение оператора Якоби к каноническому виду. Другими словами, при таком подходе достаточно рассматривать операторы Якоби, определяемые каноническими формами Петрова.

Ограничимся рассмотрением операторов Якоби, квадратично зависящих от нормальных координат. Их можно интерпретировать двояким образом. С одной стороны они могут трактоваться как 2-струи $r_2$ оператора Якоби[2]. С другой — как операторы Якоби для пространств, характеризуемых условием $r = r_2$. Такие пространства мы называем обобщенно симметрическими. Их геометрия определяется тензором кривизны в одной точке, но, в отличие от симметрических пространств, он может быть произвольным. Авторы намерены более подробно обсудить геометрию этих пространств в следующей публикации. Заметим, что классификацию Петрова можно рассматривать как классификацию 2-струй $r_2$ для пустых ПВ.

Теперь, принимая во внимание, что нормальные формы типов N и III не содержат переменных параметров, можно сформулировать следующую теорему.

*Бифуркационные диаграммы операторов Якоби $r$ для свободных гравитационных полей типа* N (III *типа*) *локально диффеоморфны в нуле друг другу и бифуркационной диаграмме соответствующей 2-струи $r_2$.*

Таким образом, локальное топологическое строение диаграмм нильпотентных типов полностью описывается приведенными ниже диаграммами соответствующих 2-струй. Здесь же рассмотрена диаграмма 2-струи типа D, её топология меняется

---

[2] См. примечание к п. 2.3.

в зависимости от стационарной кривизны. Заметим ещё, что поскольку компоненты тензора $r_2$ однородны по нормальным координатам, его алгебраическая структура постоянна вдоль всей геодезической $\gamma(y^\alpha, t)$ (за исключением точки $t = 0$). Другими словами, пространством независимых параметров в этом случае служит проективное пространство $\mathbf{RP}^3$.

*Тип* N. Примем следующую каноническую форму $\Psi_{ABCD}$: $\Psi_4 = 1$; $\Psi_k = 0$; $k = 0, \ldots, 3$. Тогда из (П.2) находим:

$$\|r_{ik} - \lambda g_{ik}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ * & z^2+\bar{z}^2 & -uz & -u\bar{z} \\ * & * & u^2 & \lambda \\ * & * & * & u^2 \end{matrix} \right\|$$

Инварианты равны: $\underset{[1]}{r} = \Gamma \equiv 0$; $\underset{[2]}{r} = -u^4$. Собственные значения: $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$; $\lambda_{2,3} = \pm u^2$. Множество $B_\Delta$ представляет собой световую гиперплоскость $u = 0$. Если $y \notin B_\Delta$, то собственными являются: 2-плоскость, натянутая на $y$ и 4-кратный вектор Дебеве $l = \{0, v, 0, 0\}$; два пространноподобных вектора

$$\delta_2' = i[l(z-\bar{z})/u - m + \bar{m}]/\sqrt{2}; \qquad \delta_3' = [l(z+\bar{z})/u + m + \bar{m}]/\sqrt{2},$$

лежащих в $B_\Delta$. При $u = 0$ компоненты собственных векторов терпят разрывы, собственной становится вся гиперплоскость $u = 0$ или всё $T_{\bar{p}}$, если $z^2 + \bar{z}_2 = 0$. Разбиение пространства $T_{\bar{p}}$ по алгебраическим типам имеет вид:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $u \neq 0$ | | $[(1\mathring{1})11]$ | 0 |
| 2. $u = 0$; | $z^2+\bar{z}^2 \neq 0$ | $[(2\mathring{1}1)]$ | 1 |
| 3. | $z^2+\bar{z}^2 = 0$ | $[(11\mathring{1}1)]$ | 2 |

В последней колонке указана коразмерность подмножества в $T_{\bar{p}}$. Это разбиение очевидным образом превращается в стратификацию (заменой неопределенных неравенств — определенными).

Относительно произвольных малых шевелений рассматриваемое семейство является неустойчивым. Однако, в классе возмущений, сохраняющих тип N, оно, конечно, устойчиво в силу сформулированной выше теоремы. Обобщенно симметрическое пространство, определяемое этим оператором Якоби, является симметрическим [12].

*Тип* III. Каноническая форма спинора Вейля $\Psi_3 = 1$; $\Psi_k = 0$; $k = 0, 1, 2, 4$. Из (П.2) получаем:

$$\|r_{ik} - \lambda g_{ik}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & -u(z+\bar{z})-\lambda & u^2 & u^2 \\ * & 2v(z+\bar{z}) & \bar{z}^2-uv-z\bar{z} & z^2-uv-z\bar{z} \\ * & * & 2u\bar{z} & -u(z+\bar{z})+\lambda \\ * & * & * & 2uz \end{matrix} \right\|$$

Выражения для инвариантов имеют вид:

$$\Delta = 16u^6[2(\Omega+8z\bar{z})^3-27(z+\bar{z})^2\Omega^2];$$

$$\underset{[3]}{r} = 4u^3(z+\bar{z})\Omega.$$

Бифуркационное множество $B_\Gamma$ включает две компоненты: $B_z$ — гиперплоскость $z+\bar{z}=0$; $B_u$ — светоподобная гиперплоскость $u=0$, касающаяся изотропного конуса $L$ вдоль главного трёхкратного направления Дебеве $u=z=0$. $B_u$ входит также в $B_\Delta$. Кроме того $B_\Delta$ включает гиперповерхность $B_\Pi$, определяемую неприводимым полиномом шестого порядка $\Pi$ в выражении для $\Delta$. Разбиение $T_p^-$ по алгебраическим типам приведено в Таблице IV.

ТАБЛИЦА IV

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\Delta\neq 0$; $\underset{[3]}{r}\neq 0$; $\Omega>0$ | $[\mathring{1}111]$ | 0 | |
| 2 | $\Omega<0$; $\Pi>0$ | $[111\mathring{1}]$ | 0 | $T_p^-\backslash B$ |
| 3 | $\Pi<0$ | $[1\bar{1}1\mathring{1}]$ | 0 | |
| 4 | $\Omega=0$; $z+\bar{z}\neq 0$ | $[\mathring{2}11]$ | 1 | $L\backslash(B_z\cup B_u)$ |
| 5 | $\Pi=0$; $\Omega\neq 0$; $z+\bar{z}\neq 0$; $u\neq 0$ | $[21\mathring{1}]$ | 1 | $B_\Pi\backslash(L\cup B_z\cup B_u)$ |
| 6 | $z+\bar{z}=0$; $\Omega>0$ | $[(\mathring{1}1)11]$ | 1 | |
| 7 | $\Omega<0$; $uv+3z\bar{z}>0$; $u\neq 0$ | $[11(\mathring{1}1)]$ | 1 | $B_z\backslash(L\cup B_\Pi\cup B_u)$ |
| 8 | $uv+3z\bar{z}<0$ | $[1\bar{1}(\mathring{1}1)]$ | 1 | |
| 9 | $\Omega=0$; $uz\neq 0$ | $[(\mathring{1}1)11]$ | 2 | $(B_z\cap L)\backslash(B_\Pi\cup B_u)$ |
| 10 | $uv+3z\bar{z}=0$; $u\neq 0$ | $[(\mathring{3}1)]$ | 2 | $(B_z\cap B_\Pi)\backslash B_u$ |
| 11 | $u=0$; $z-\bar{z}\neq 0$ | $[(\mathring{3}1)]$ | 1 | |
| 12 | $z-\bar{z}=0$; $vz\neq 0$ | $[(2\mathring{1}1)]$ | 2 | $B_u$ |
| 13 | $vz=0$ | $[(11\mathring{1}1)]$ | 3 | |

В предпоследней колонке указана коразмерность соответствующих стратов в $T_p^-$, в последней — явно указаны некоторые подмножества. Трёхкратное главное световое направление входит в тринадцатое подмножество, однократное ($v=z=0$) — в десятое.

Если в предыдущем примере все страты неустойчивы относительно возмущений общего вида, то в рассматриваемом случае неустойчивыми становятся подмножества с десятого по тринадцатое.

*Тип* D. Принимаем в этом случае: $\Psi_2=a+ib$; $\Psi_k=0$; $k=1,3,4$. Используя (П.2), находим:

$$\|r_{ik}-\lambda g_{ik}\| = \left\|\begin{matrix} 2au^2 & -2a(uv+z\bar{z})-\lambda & \bar{\gamma}u\bar{z} & \gamma uz \\ * & 2av^2 & \gamma v\bar{z} & \bar{\gamma}vz \\ * & * & 2a\bar{z}^2 & -2a(uv+z\bar{z})+\lambda \\ * & * & * & 2az^2 \end{matrix}\right\|$$

Здесь $\gamma = a+3ib$. Выражения для инвариантов имеют вид:

$$\Delta = 6^6(|\Psi_2|+|b|)^2\,(\Psi_2\overline{\Psi}_2uvz\bar{z})^2Q_1;$$

$$\underset{[3]}{r} = -8a\Omega(|\gamma|+3|\Psi_2|)^2Q_2,$$

где

$$Q_s = (uv+\kappa_s z\bar{z})\,(\kappa_s uv+z\bar{z}), \qquad 0 \leqslant \kappa_1 = a^2(|\Psi_2|+|b|)^{-2} \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant \kappa_2 = 8a^2(|\gamma|+3|\Psi_2|)^{-2} \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

При $a \neq 0$ ($\kappa_s \neq 0$) множество $B_\Gamma$ представляет собой пару пространственноподобных эллиптических конусов $Q_2 = 0$. В $B_\Delta$ входят следующие компоненты: $B_1$ — пара пространственноподобных конусов $Q_1 = 0$; $B_{uv}$ — пара светоподобных гиперплоскостей, определяемых двукратными направлениями Дебеве ($u = z = 0$ и $v = z = 0$); $B_z$ — двумерная плоскость $z = 0$, натянутая на векторы Дебеве. Конусы $B_1$ расположены между конусами $B_\Gamma$ (т.к. $\kappa_1 > \kappa_2$). Область между конусами $B_1$ характеризуется комплексными собственными значениями. Все перечисленные компоненты пересекаются по главным световым направлениям.

При значениях параметров $a = 0$ и $b = 0$ топология бифуркационной диаграммы меняется. При $a = 0$ внешние из конусов $B_1$ и $B_\Gamma(uv+\kappa_s z\bar{z} = 0)$ разворачиваются

ТАБЛИЦА V

$a \neq 0$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\Delta \neq 0$; | $\underset{[3]}{r} \neq 0$; | $\Omega > 0$ | | $[\mathring{1}111]$ | 0 | |
| 2 | | | $\Omega < 0$; | $Q_2 > 0$ | $[111\mathring{1}]$ | 0 | |
| 3 | | | | $Q_2 < 0$ | $[1\bar{1}1\mathring{1}]$ | 0 | При $b = 0$ это подмножество пусто |
| 4 | $z \neq 0$; | $\Omega = 0$ | | | $[\mathring{2}11]$ | 1 | |
| 5 | | $Q_1 = 0$ | | | $[21\mathring{1}]$ | 1 | При $b = 0$ — $[(11)1\mathring{1}]$ |
| 6 | | $Q_2 = 0$ | | | $[11(1\mathring{1})]$ | 1 | |
| 7 | | $uv = 0$; | $u^2+v^2 \neq 0$ | | $[21\mathring{1}]$ | 1 | |
| 8 | | | $u = v = 0$ | | $[(11)1\mathring{1}]$ | 2 | |
| 9 | $z = 0$; | $\Omega > 0$ | | | $[\mathring{1}(11)1]$ | 2 | |
| 10 | | $\Omega < 0$ | | | $[1(11)\mathring{1}]$ | 2 | |
| 11 | | $uv = 0$ | | | $[(2\mathring{1}1)]$ | 3 | Главные направления |

$a = 0$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $z \neq 0$; | $uv > 0$ | | $[(\mathring{1}1)11]$ | 0 | |
| 2 | | $uv < 0$ | | $[1\bar{1}(\mathring{1}1)]$ | 0 | |
| 3 | | $uv = 0$; | $u^2+v^2 \neq 0$ | $[(\mathring{3}1)]$ | 1 | |
| 4 | | | $u = v = 0$ | $[(1\mathring{1}11)]$ | 2 | |
| 5 | $z = 0$ | | | $[(1\mathring{1}11)]$ | 2 | |

в пару гиперплоскостей $B_{uv}$, внутренние сливаются с 2-плоскостью $B_z$. При $b = 0$ конусы $B_1$ сливаются между собой (исчезает область с комплексными $\lambda$), конусы $B_\Gamma$ занимают предельное положение ($\kappa_2 = \frac{1}{2}$).

Разбиение $T_{\bar{p}}^-$ по алгебраическим типам приведено в таблице V.

В рассматриваемом примере при $a$, $b \neq 0$ неустойчивым является лишь одиннадцатое подмножество, образованное главными световыми направлениями. При $b = 0$ неустойчивым становится также пятое подмножество, при $a = 0$ все страты неустойчивы.

*4.3*. Некоторым из стратов бифуркационной диаграммы оператора Якоби (а также его 2-струи) можно дать определенную физическую или кинематическую интерпретацию. Выше в 4.1 было показано, что $L \subset B$ и что дальнейшее вырождение алгебраической структуры происходит при совпадении $\boldsymbol{y}$ с главными направлениями спинора Вейля, выделенность которых общеизвестна.

В рассмотренных примерах вместе с кратными направлениями Дебеве $\boldsymbol{l}$ в бифуркационную диаграмму 2-струи $\boldsymbol{r}_2$ входят светоподобные гиперплоскости $u = l_\alpha y^\alpha = 0$ ($B_\Delta$ в типе N, $B_u$ в типе III, $B_{uv}$ — в D). Оказывается, что это неслучайно. В пустом ПВ те из светоподобных гиперплоскостей, которые определяются кратными главными направлениями спинора Вейля, и только они, характеризуются равенством римановых кривизн двумерных пространственноподобных площадок, лежащих в гиперплоскости. Переформулируя результаты работы [21], нетрудно показать, что для общих полей тяготения ($\Phi, \Lambda \neq 0$) требование равенства таких кривизн эквивалентно условиям:

$$\Psi_0 = \Phi_{00} = \Psi_1 - \Phi_{01} = 0. \tag{28}$$

(Вектор $\boldsymbol{l}$ принят в качестве базисного $z_0$.) Теперь из (П.2) видно, что при $u = 0$ имеем $\varrho_{00} = \varrho_{01} = 0$, $\boldsymbol{l}$ — изотропный собственный вектор $\boldsymbol{r}_2$, и следовательно, *гиперплоскость $u = 0$ входит в бифуркационную диаграмму 2-струи оператора Якоби.*

Предположим далее, что пространство допускает семейство светоподобных гиперповерхностей, причем поле нормали $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{y})$ удовлетворяет условиям (28). Тогда в каждой точке равны кривизны всех двумерных пространственноподобных площадок, касательных к гиперповерхности. Подобную гиперповерхность можно интерпретировать как фронт волны, распространяющейся с фундаментальной скоростью (гравитационная волна в непустом ПВ). Условие равенства кривизн имеет смысл требования, чтобы локально наблюдаемая форма двумерного фронта волны не зависела от скорости наблюдателя.

Легко видеть, что волновая гиперповерхность, проходящая через отмеченную точку $\bar{p}$, будет бифуркационной для точного оператора Якоби $\boldsymbol{r}$. Для $\boldsymbol{y}$, принадлежащих гиперповерхности, вектор $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{y})$ (его параллельный прообраз) является собственным вектором оператора $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})$. Уравнение волновой гиперповерхности можно представить как условие ортогональности собственных векторов: $l_\alpha(\boldsymbol{y})y^\alpha = 0$. Теперь, наряду с известным разделением волн на плоские, цилиндрические и сферические по оптическим скалярам [22], можно рассматривать волны с различными алгебраическими характеристиками. К примеру, плоские гравитационные волны типов N и III имеют характеристики [(2$\mathring{1}$1)] и [($\mathring{3}$1)] соответственно. Это различие проявляется в поведении пробных частиц, рассеиваемых на волне [20].

Несомненный интерес вызывают сравнительно слабо выраженные временно-подобные бифуркации. В частности, определенную интерпретацию можно дать бифуркациям $B_z$ в пустых ПВ типа D. Для примера рассмотрим пространство Керра (в координатах Бойера-Линдквиста). Как известно, в этом случае движение пробной частицы ограничено по широте $\theta$ некоторыми углами, которые определяются интегралами движения [23]. Можно показать, что $z = 0$ именно в точках, граничных по $\theta$. Таким образом, если в некоторой точке пространства Керра 4-скорость частицы принадлежит $B_z$, то в этой точке происходит поворот траектории по $\theta$. Кроме того, значение азимутальной угловой скорости $d\varphi/dt$ при этом минимально. В предельном случае геометрии Шварцшильда условие $z = 0$ определяет радиальное движение.

Проиллюстрировать выделенность временноподобных направлений $z = 0$ в пространствах типа D можно также с помощью введенного Белем тензора суперэнергии свободного гравитационного поля [24]. Можно показать, что плотность потока гравитационной суперэнергии (вектор Пойнтинга) обращается в нуль, в тех и только тех направлениях, которые принадлежат бифуркационному множеству $B_z$. Если с полем направлений, принадлежащих $B_z$, связать систему отсчета, то она удовлетворяет условиям Пирани следования за гравитационным полем [25]; она будет также „идеальной системой отсчета“ по терминологии работ [26, 27].

Можно предположить, что и другие бифуркации, в том числе пространственно-подобные (например, области с комплексными собственными значениями), играют определенную роль в физических явлениях.

Авторы благодарны профессору К. А. Пирагасу за многочисленные обсуждения рассмотренных вопросов и постоянную дружескую поддержку.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Примем обычные обозначения для компонент спиноров кривизны в собирательных индексах

$$\Psi_0 = \Psi_{ABCD}o^A o^B o^C o^D; \quad \Psi_1 = \Psi_{ABCD}o^A o^B o^C \iota^D; \ldots; \quad \Psi_4 = \Psi_{ABCD}\iota^A \iota^B \iota^C \iota^D$$

$$\Phi_{00} = \Phi_{ABA'B'}o^A o^B \bar{o}^{A'} \bar{o}^{B'} \quad \Phi_{01} = \Phi_{ABA'B'}o^A o^B \bar{o}^{A'} \bar{\iota}^{B'}; \ldots; \quad \Phi_{22} = \Phi_{ABA'B'}\iota^A \iota^B \bar{\iota}^{A'} \bar{\iota}^{B'} \tag{П.1}$$

Аналогичные обозначения примем для компонент спиноров $V_{ABCD}$ и $\varrho_{ABA'B'} = \underset{[1]}{r}_{(AB)(A'B')} = r_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\underset{[1]}{r}\, g_{\alpha\beta}$.

В комплексных световых нормальных координатах (18) имеем:

$$r^\sigma{}_\sigma = \underset{[1]}{r} = 6\Lambda\Omega - 2[v^2\Phi_{00} + 4\,\mathrm{Re}\,(vz\Phi_{01} + uz\Phi_{12})$$

$$+ 2(uv + z\bar{z})\Phi_{11} + 2\,\mathrm{Re}\,(z^2\Phi_{02}) + u^2\Phi_{22}];$$

$$\begin{aligned}
\varrho_{00} &= 2\,\mathrm{Re}\,[z^2\Psi_0 + z\bar{z}\Phi_{00} + 2zu(\Psi_1+\Phi_{01}) + u^2(\Psi_2+\Phi_{11}-\Lambda)];\\
\varrho_{01} &= -v(z\Psi_0+\bar{z}\Phi_{00}) - (uv+z\bar{z})\Psi_1 - \tfrac{1}{2}\,\Omega\Phi_{01} + \bar{z}^2(\overline{\Psi}_1 - \Phi_{10})\\
&\quad + u^2(\overline{\Psi}_3+\Phi_{12}) + u\bar{z}(2\overline{\Psi}_2 - \Psi_2 + 2\Lambda) + uz\Phi_{12};\\
\varrho_{02} &= v^2\Psi_0 + 2v\bar{z}(\Psi_1-\Phi_{01}) + 2\bar{z}^2\,(\mathrm{Re}\,\Psi_2 - \Phi_{11} - \Lambda)\\
&\quad + 2u\bar{z}(\Psi_3-\Phi_{12}) + u^2\overline{\Psi}_4 - 2uv\Phi_{02}\\
\varrho_{11} &= -2\,\mathrm{Re}\,[vz\Psi_1 + (uv+z\bar{z})\Psi_2 + u\bar{z}\Psi_3] + \tfrac{1}{2}\,[v^2\Phi_{00} - \Omega\Phi_{11} + u^2\Phi_{22}\\
&\quad - 2\,\mathrm{Re}\,(z^2\Phi_{02})] - \Lambda(uv+z\bar{z});\\
\varrho_{12} &= -u(z\overline{\Psi}_4 + \bar{z}\Phi_{22}) - (uv+z\bar{z})\overline{\Psi}_3 - \tfrac{1}{2}\,\Omega\Phi_{12} + \bar{z}^2(\Psi_3-\Phi_{21}) + v^2(\Psi_1+\Phi_{01})\\
&\quad + v\bar{z}(2\Psi_2 - \overline{\Psi}_2 + 2\Lambda) + vz\Phi_{02};\\
\varrho_{22} &= 2\,\mathrm{Re}\,[\bar{z}^2\Psi_4 + \Phi_{22}z\bar{z} + 2vz(\Psi_3+\Phi_{21}) + v^2(\Psi_2+\Phi_{11}-\Lambda)],
\end{aligned} \tag{П.2}$$

где

$$\Omega = y_\alpha y^\alpha = 2(uv - z\bar{z}).$$

Матрица $\|r_{ik} - \lambda g_{ik}\|$ в базисе $z_i^\alpha$ (17) имеет вид:

$$\|r_{ik} - \lambda g_{ik}\| = \begin{Vmatrix} \varrho_{00} & \varrho_{11} + \frac{1}{4}\underset{[1]}{r} - \lambda & \varrho_{01} & \varrho_{10} \\ * & \varrho_{22} & \varrho_{12} & \varrho_{21} \\ * & * & \varrho_{02} & \varrho_{11} - \frac{1}{4}\underset{[1]}{r} + \lambda \\ * & * & * & \varrho_{20} \end{Vmatrix} \tag{П.3}$$

Тот же тензор в репере $\delta_i^\alpha$ (20) имеет матрицу

$$\begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(\varrho_{00}+\varrho_{22}+2\varrho_{11}) + \frac{1}{4}\underset{[1]}{r} - \lambda & \frac{1}{4}(\varrho_{00}-\varrho_{22}) & \mathrm{Re}\,(\varrho_{01}+\varrho_{12}) & -\mathrm{Im}\,(\varrho_{01}+\varrho_{12}) \\ * & \frac{1}{2}(\varrho_{00}+\varrho_{22}-2\varrho_{11}) - \frac{1}{4}\underset{[1]}{r} + \lambda & \mathrm{Re}\,(\varrho_{01}-\varrho_{12}) & -\mathrm{Im}\,(\varrho_{01}-\varrho_{12}) \\ * & * & \mathrm{Re}\,\varrho_{02} + \varrho_{11} - \frac{1}{4}\underset{[1]}{r} + \lambda & -\mathrm{Im}\,\varrho_{02} \\ * & * & * & -\mathrm{Re}\,\varrho_{02} + \varrho_{11} - \frac{1}{4}\underset{[1]}{r} + \lambda \end{Vmatrix} \tag{П.4}$$

и в базисе $b_i^\alpha$

$$\left\|\begin{matrix} \varrho_{00} & \varrho_{11}+\frac{1}{4}\underset{[1]}{r}-\lambda & \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\varrho_{01} & -\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\varrho_{01} \\ * & \varrho_{22} & \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\varrho_{12} & -\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\varrho_{12} \\ * & * & \mathrm{Re}\,\varrho_{22}+\varrho_{11}-\frac{1}{4}\underset{[1]}{r}+\lambda & -\mathrm{Im}\,\varrho_{02} \\ * & * & * & -\mathrm{Re}\,\varrho_{02}+\varrho_{11}-\frac{1}{4}\underset{[1]}{r}+\lambda \end{matrix}\right\| \tag{П.5}$$

Компоненты спин-тензора $V_{ABCD}$ (28) в собирательных индексах:

$$V_0 = 2(\varrho_{00}\varrho_{02}-\varrho_{01}^2); \qquad V_1 = \varrho_{10}\varrho_{02}+\varrho_{12}\varrho_{00}-2\varrho_{11}\varrho_{01};$$

$$V_2 = \tfrac{1}{3}(\varrho_{00}\varrho_{22}+\varrho_{02}\varrho_{20}-4\varrho_{11}^2-2\varrho_{21}\varrho_{01}+4\varrho_{10}\varrho_{12});$$

$$V_3 = \varrho_{10}\varrho_{22}+\varrho_{12}\varrho_{20}-2\varrho_{11}\varrho_{22}; \qquad V_4 = 2(\varrho_{22}\varrho_{20}-\varrho_{21}^2). \tag{П.6}$$

Инварианты $\underset{[k]}{r}$ оператора Якоби можно представить в следующей форме:

$$\underset{[1]}{r} = -2\Phi_{ABA'B'}y^{ABA'B'},$$

$$\underset{[2]}{r} = (\Phi_{ABA'B'}\Phi_{CBC'D'}-\Psi_{ABCD}\Psi_{A'B'C'D'})y^{ABCDA'B'C'D'}+\Omega\,\mathrm{Re}\,(\tfrac{3}{2}\,\Phi^{(2)}_{ABA'B'}$$

$$+2\Psi_{ABMN}\Phi^{MN}{}_{A'B'})y^{ABA'B'}-\tfrac{1}{6}\,\Omega^2(\Phi_2+3\,\mathrm{Re}\,I) \tag{П.7}$$

$$\underset{[3]}{r} = \Omega\,\mathrm{Re}\,(I_{ABCD}\overline{\Psi}_{A'B'C'D'}+2\Psi_{ABC}{}^{M}\Phi_{DMM'A'}\overline{\Psi}_{B'C'D'}{}^{M'}-2\Psi_{ABMN}\Phi^{M}{}_{CA'B'}\Phi^{N}{}_{DCD'}$$

$$-\Phi_{ABA'B'}\Phi^{(2)}{}_{CDC'D'})y^{ABCDA'B'C'D'}+\Omega^2\,\mathrm{Re}\,[(\tfrac{1}{3}\,I-\tfrac{1}{8}\,\Phi_2)\Phi_{ABA'B'}$$

$$-\tfrac{1}{4}\,\Psi_{ABMN}\overline{\Psi}_{A'B'M'N'}\Phi^{MNM'N'}-I_{ABMN}\Phi^{MN}{}_{A'B'}+\tfrac{1}{2}\,\Phi^{(3)}{}_{ABA'B'}+2\Psi_{AB}{}^{MN}\Phi^{(2)}{}_{MNA'B'}]y^{ABA'B'}$$

$$+\Omega^3[\mathrm{Re}\,(J+\tfrac{1}{6}\,\Psi_{MNPQ}W^{MNPQ})-\tfrac{1}{6}\,\Phi_3].$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$I_{ABCD} = \Psi^{MN}{}_{(AB}\Psi_{CD)MN}; \qquad I = \tfrac{1}{2}\,\Psi_{MNPQ}\Psi^{MNPQ},$$

$$J = \tfrac{1}{6}\,I_{MNPQ}\Psi^{MNPQ}; \qquad \Phi_2 = \Phi^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu}; \qquad \Phi_3 = \Phi^{\mu\nu}\Phi^{\sigma}{}_{\mu}\Phi_{\sigma\nu};$$

$$\Phi^{(2)}{}_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\mu}\Phi^{\mu}{}_{\beta}-\tfrac{1}{4}\,\Phi_2 g_{\alpha\beta}; \qquad \Phi^{(3)}{}_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\mu}\Phi^{\mu}{}_{\nu}\Phi^{\nu}{}_{\beta}-\tfrac{1}{4}\,\Phi_3 g_{\alpha\beta}; \tag{П.8}$$

$$W_{ABCD} = \Phi_{(AB}{}^{M'N'}\Phi_{CD)M'N'}; \qquad y^{A\ldots L}{}_{A'\ldots L'} = y^{(A}{}_{(A'}\ldots y^{L)}{}_{L')}.$$

В формулах (П.7) мы положили $\Lambda = 0$. При $\Lambda \neq 0$ имеем:

$$\underset{[1]}{r} = \underset{[1]}{\overset{\circ}{r}}+6\Lambda\Omega; \qquad \underset{[2]}{r} = \underset{[2]}{\overset{\circ}{r}}+4\Lambda\Omega\underset{[1]}{\overset{\circ}{r}}+12\Lambda^2\Omega^2;$$

$$\underset{[3]}{r} = \underset{[3]}{\overset{\circ}{r}}+2\Lambda\Omega\underset{[2]}{\overset{\circ}{r}}+4\Lambda^2\Omega^2\underset{[1]}{\overset{\circ}{r}}+8\Lambda^3\Omega^3. \tag{П.9}$$

Для случая $\Omega = 0$, принимая $y^{AA'} = o^A o^{A'}$, из формул (П.7), получаем

$$\underset{[1]}{r} = -2\Phi_{00}; \qquad \underset{[2]}{r} = \Phi_{00}^2 - \Psi_0\overline{\Psi}_0;$$

$$\Gamma = -2(\mathrm{Re}\,\Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda)\underset{[2]}{r} - |\Psi_1 + \Phi_{01}|^2 \underset{[1]}{r} - 2\,\mathrm{Re}\left[\overline{\Psi}_0(\Psi_1 + \Phi_{01})^2\right]. \qquad (\text{П}.10)$$

Через компоненты $\varrho_{ik}$ инварианты $\underset{[2]}{r}$ и $\underset{[3]}{r}$ выражаются следующим образом:

$$\underset{[2]}{r} = \tfrac{3}{8}\underset{[1]}{r}^2 + \varrho_2; \qquad \underset{[3]}{r} = \tfrac{1}{16}\underset{[1]}{r}^3 + \tfrac{1}{2}\underset{[1]}{r}\varrho_2 + \varrho_3;$$

$$\varrho_2 = -(2\varrho_{11}^2 + \varrho_{02}\varrho_{20} + \varrho_{00}\varrho_{22} - 2\varrho_{10}\varrho_{12} - 2\varrho_{01}\varrho_{21});$$

$$\varrho_3 = 2[\varrho_{11}(\varrho_{00}\varrho_{22} - \varrho_{02}\varrho_{20}) - \varrho_{00}\varrho_{12}\varrho_{21} - \varrho_{22}\varrho_{01}\varrho_{10} + \varrho_{01}\varrho_{20}\varrho_{12} + \varrho_{02}\varrho_{10}\varrho_{21}].$$

**Editorial note.** This article was proofread by the editors only, not by the authors.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] А. Н. Александров, К. А. Пирагас, *Теор. мат. физ.* **38**, 71 (1979).
[2] А. Н. Александров, *Acta Phys. Pol.* **B12**, 523 (1981).
[3] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, Мир, Москва 1977.
[4] С. Хокинг, Дж. Эллис, *Крупномасштабная структура пространства-времени*, Мир, Москва 1977.
[5] Л. Е. Пирагас, *Изв. вузов СССР, Физика* № 11, 74 (1978); № 12, 21 (1978).
[6] J. Plebański, *Acta Phys. Pol.* **26**, 963 (1964).
[7] J. Plebański, *Acta Phys. Pol.* **28**, 141 (1965).
[8] Т. Брёкер, Л. Ландер, *Дифференцируемые ростки и катастрофы*, Мир, Москва 1977.
[9] R. Geroch, *Commun. Math. Phys.* **13**, 180 (1969); в сб. *Квантовая гравитация и топология*, Мир, Москва 1973.
[10] Э. Картан, *Риманова геометрия в ортогональном репере*, Издательство Московского университета, Москва 1960.
[11] А. Н. Александров, К. А. Пирагас, Препринт ИТФ-74-70Р, Киев 1974; *Tensor, N. S.* **29**, 187 (1975).
[12] А. З. Петров, *Новые методы в общей теории относительности*, Наука, Москва 1966.
[13] В. И. Арнольд, *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва 1978.
[14] Д. М. Галин, *Успехи мат. наук* **27**, 241 (1972).
[15] Р. Пенроуз, *Структура пространства-времени*, Мир, Москва 1972.
[16] Ф. И. Фёдоров, *Группа Лоренца*, Наука, Москва 1979.
[17] R. Penrose, в сб. *Гравитация*, Наукова думка, Киев 1972.
[18] W. J. Cormack, G. S. Hall, *J. Phys. A: Math. Gen.* **12**, 55 (1979).
[19] В. Д. Захаров, *Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна*, Наука, Москва 1972.
[20] Р. Ф. Полищук, в сб. *Гравитация и теория относительности*, № 16, Издательство Казанского университета, Казань 1980.
[21] G. S. Hall, *Z. Naturforsch.* **33a**, 559 (1978).
[22] В. П. Фролов, в сб. *Проблемы общей теории относительности и теория представлений групп*, Т. 96, Наука, Москва 1977.
[23] O. P. Krivenko, K. A. Pyragas, I. T. Zhuk, *Astrophys. Space Sci.* **40**, 39 (1976).
[24] L. Bel, *Compt. Rend. Acad. Sci. Colon.* **247**, 1094 (1958).
[25] F. Pirani, *Phys. Rev.* **105**, 1089 (1957).
[26] Л. И. Седов, *Докл. АН СССР* **240**, 568 (1978).
[27] А. В. Жуков, *Докл. АН СССР* **246**, 55 (1979).