Vol. B17 (1986) ACTA PHYSICA POLONICA No 1

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ МЕТРИКИ КЕРРА-НЬЮМЕНА С КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ ПОСТОЯННОЙ

В. С. Гурин

Астрономическая секция Минского отделения Всесоюзного астрономо-геодезического общества, Минск, СССР*

ON ANALYTICAL CONTINUATION OF THE KERR-NEWMAN METRIC WITH COSMOLOGICAL CONSTANT

By V. S. Gurin

Astronomical Section of Minsk Department of Astronomical-Geodesical Society of the USSR, Minsk, USSR*

(Received November 24, 1983; revised version received June 11, 1985)

Analytically continued manifold for the Kerr-Newman metric with cosmological constant is considered by means of local Lorentz transformations. The correspondence between regions of the manifold and subluminal and superluminal characters of speed is indicated. A possibility of the interior structure stability for analytically continued Kerr-type manifolds is shown.

PACS numbers: 04.20.-q

1. *Введение*

В настоящее время в рамках общей теории относительности получено множество точных решений уравнений гравитационного поля Эйнштейна, также в комбинации с другими полями, многие из которых имеют определенную физическую интерпретацию [1]. Для описания сколлапсировавших астрофизических объектов используются метрики, входящие в класс аксиально-симметричных решений Плебаньского-Демьяньского для уравнений Эйнштейна-Максвелла [2]. Из этого класса решений мы в данной работе рассмотрим случай, когда отсутствует НУТ-параметр, $l = 0$, и параметр $\varepsilon = 1$. При этом получается метрика Керра-Ньюмена, содержащая как электрический так и магнитный заряды, с космологической по-

* Mailing address: USSR, 220047, Minsk, Gerasimenko street, 23, f. 41.

стоянной Λ (она может быть названа метрикой Керра-Ньюмена-Де-Ситтера). Именно такая метрика согласно теореме о единственности решений уравнений Эйнштейна для черных дыр [3, 4] будет отвечать наиболее полному решению для черной дыры на космологическом де-ситтеровском фоне.

В настоящей работе будет рассмотрена структура пространства-времени такого решения, методом локальных преобразований Лоренца будет получена его несингулярная на горизонтах форма, позволяющая рассмотреть его полное аналитически продолженное многообразие.

2. *Метрика Керра-Ньюмена-Де-Ситтера*

Метрика Керра-Ньюмена с космологической постоянной может быть получена из следующей формы указанного класса точных решений Плебаньского-Демьянского [5]

$$ds^2 = X^{-1}(p^2+q^2)dp^2 + Y^{-1}(p^2+q^2)dq^2 + X(p^2+q^2)^{-1}(d\tau + q^2 d\sigma)^2 - Y(p^2+q^2)^{-1}(d\tau - p^2 d\sigma)^2, \tag{1}$$

где

$$X = \gamma - g^2 + 21p - \varepsilon p^2 - \Lambda p^4/3,$$
$$Y = \gamma + e^2 - 2Mq + \varepsilon q^2 - \Lambda q^4/3. \tag{2}$$

Мы положим $l = 0$ и $\varepsilon = 1$ и преобразуем координаты [1]:

$$p = -a\cos\theta, \quad q = r, \quad \sigma = -\varphi/a, \quad \tau = t + a\varphi. \tag{3}$$

Тогда получим следующее выражение в сплюснутых квазисфероидальных координатах Бойера-Линквиста [6] ($G = c = 1$):

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & [\varepsilon - 2Mr + Q^2 + \lambda(r^2 + a^2\sin^2\theta)]\varepsilon^{-1}dt^2 + 2a\sin^2\theta\varepsilon^{-1}[2Mr - Q^2 - \lambda(r^2+a^2)]dtd\varphi \\ & - \varepsilon\{[\lambda(r^2+a^2)r^2 + r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2]^{-1}dr^2 + (1-\lambda a^2\cos^2\theta)^{-1}d\theta^2\} \\ & - \sin^2\theta[(2Mr - Q^2)\varepsilon^{-1}a^2\sin^2\theta + (r^2+a^2)(1-\lambda a^2)]d\varphi^2, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\varepsilon = r^2 + a^2\cos^2\theta,$$

где положено $\lambda = \Lambda/3$, a — момент вращения на единицу массы M, Q^2 — сумма квадратов электрического и магнитного зарядов, $e^2 + g^2$. Заметим, что данная метрика сводится к выражению Демьяньского [7] для метрики Керра с космологической постоянной при $Q = 0$.

Решение (4) обладает физической сингулярностью кривизны при $r = 0, \theta = \pi/2$ как и решение Керра-Ньюмена, а его псевдосингулярности (горизонты), определяемые метрическими коэффициэнтами при dt и dr описываются уравнениями

$$r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 + \lambda(r^2+a^2)r^2 = 0, \tag{5}$$

$$\varepsilon - 2Mr + Q^2 + \lambda\varepsilon(r^2 + a^2\sin^2\theta) = 0. \tag{6}$$

Оба уравнения переходят в известные выражения для горизонтов

$$r = r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2 - Q^2)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

и поверхностей бесконечного красного и синего смещений

$$r = R_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q^2)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

для черной дыры Керра-Ньюмена при $\lambda = 0$. В общем случае $\lambda \neq 0$ уравнения (5) и (6) представляют собой алгебраические уравнения четвертой степени относительно r, и аналитическое представление выражений для горизонтов по типу (7) и (8) затруднено. Однако можно утверждать, что в общем случае уравнения (5) и (6) имеют по четыре корня, некоторые из них при определенных соотношениях параметров M, a, Q, λ могут быть вырожденные и мнимые.

Таким образом, глобальная структура пространства-времени Керра-Ньюмена--Де-Ситтера определяется в общем случае восемью псевдосингулярными поверхностями, которые разделяют полное пространственно-временное многообразие на набор областей, соединяющихся на горизонтах, между которыми нет двусторонней причинной связи. Аналогичное разбиение пространства-времени с космологической постоянной известно в более простых случаях метрик Шварцшильда-Де-Ситтера и Рейсснера-Нордстрема-Де-Ситтера [8, 9], но на меньшее число областей с различным пространственно-временным характером.

3. Аналитическое продолжение

Сущность аналитического продолжения псевдосингулярных метрик для гравитационных полей состоит в их преобразовании к несингулярной форме с помощью перехода к новым пространственно-временным координатам [10—12]. Однако, получение аналитических выражений для новых координат оказывается возможным только лишь в сферически-симметричных геометриях либо в двумерных случаях для менее симметричных геометрий. Но, используя общие методы построения аналитически продолженных многообразий, можно выполнить построение и без нахождения точных аналитических выражений для координат [11, 12].

Мы в данном разделе исследуем двумерный случай метрики Керра-Ньюмена--Де-Ситтера (4) вдоль оси симметрии при $\theta = 0$, $\varphi = \text{const}$;

$$ds^2 = \varepsilon^{-1}(\varepsilon - 2Mr + Q^2 + \lambda r^2)dt^2 - \varepsilon(\varepsilon - 2Mr + Q^2 + \lambda r^2 \varepsilon)^{-1} dr^2, \tag{9}$$

где теперь $\varepsilon = r^2 + a^2$.

Новую несингулярную метрику мы будем искать в следующем виде:

$$ds^2 = F dv^2 - G du^2, \tag{10}$$

v и u суть новые пространственно-временные координаты, F и G — искомые функции, на которые наложим условия $F > 0$ и $G > 0$.

Выпишем локальные преобразования Лоренца, связывающие метрики (9) и (10) по методу работы [13]:

$$\left[\frac{\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2}{\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}} dt = \frac{F^{\frac{1}{2}}dv+VG^{\frac{1}{2}}du}{(1-V^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{11}$$

$$\left[\frac{\varepsilon}{\lambda r^2\varepsilon+Q^2-2Mr+\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}} dr = \frac{G^{\frac{1}{2}}du+VF^{\frac{1}{2}}dv}{(1-V^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{12}$$

где V — локальная скорость. Такой вид локальных преобразований Лоренца [14] станет понятным, если учесть, что метрику (9) можно представить в форме $ds^2 = d\tilde{t}^2 - d\tilde{r}^2$, где

$$\tilde{t}: d\tilde{t}^2 = \varepsilon^{-1}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2)dt^2; \quad \tilde{r}: d\tilde{r}^2 = \varepsilon(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon)^{-1}dr^2 \tag{13}$$

есть локальные времени- и пространственноподобные координаты. Аналогично для метрики (7) можно получить $ds^2 = d\tilde{v}^2 - d\tilde{u}^2$ когда

$$\tilde{v}: d\tilde{v}^2 = Fdv^2; \quad \tilde{u}: d\tilde{u}^2 = Gdu^2.$$

В пространстве-времени (9) для связи локальной скорости c координатной dr/dt можно получить выражение

$$V = \frac{\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2}{\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon}\,\varepsilon\,\frac{dr/dv}{dt/dv} = \frac{\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2}{\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon}\,\varepsilon\,\frac{dr/du}{dt/du}, \tag{14}$$

Тогда при совместном решении уравнений (11) и (12) можно найти для метрических коэффициэнтов в (10):

$$F = \varepsilon^{-1}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2)(1-V^2)t_v^2 = \varepsilon(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon)^{-1}(1-V^2)V^{-2}r_v^2, \tag{15}$$

$$G = \varepsilon(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon)^{-1}(1-V^2)V^{-2}r_u^2 = \varepsilon^{-1}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2)(1-V^2)t_u^2. \tag{16}$$

Отсюда можно получить условия несингулярности метрики (10) в виде

$$(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2)^{-1}(1-V^2) > 0, \tag{17}$$

$$\varepsilon(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon)^{-1}(1-V^2) > 0. \tag{18}$$

Появление в этих условиях множителей, определяющих положение псевдосингулярных поверхностей для метрики (10) и множителя $1-V^2$ говорит о непосредственной связи положения рассматриваемой пространственно-временной точки относительно горизонтов с положением скорости относительно светового барьера. Следовательно, переход через один из горизонтов будет соответствовать переходу от досветовых скоростей к сверхсветовым, т.е. суперлюминальному преобразованию [15]. Данные рассуждения, являясь обобщением выводов, выполненных в работах [15—18, 25], показывают возможность сверхсветовых скоростей в аналитически продолженных пространственно-временных многообразиях с горизонтами, в то время как представление о них в плоском 4-мерном пространстве вызывает некоторые затруднения [19].

Перейдем к получению общего вида соотношений между координатами (u, v) и (t, r), которые также будут определять функции F и G в метрике (10). Для этого из соотношений (14) можно получить

$$V(\partial v/\partial t)+\varepsilon^{-1}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2)^{\frac{1}{2}}(\partial v/\partial r)=0, \tag{19}$$

$$(\partial u/\partial t)+\varepsilon^{-1}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2)^{\frac{1}{2}}(\partial u/\partial r)V=0. \tag{20}$$

Выберем функции u, v и V в следующем виде

$$v=v(r)v(t), \qquad u=u(r)u(t), \qquad V=V(r)V(t).$$

Тогда в соотношениях (19) и (20) можно разделить переменные, приравняв обе их части константам K_1 и K_2,

$$V(t)\,[\partial v(t)/\partial t]v(t)^{-1}=K_1; \qquad V(t)^{-1}[\partial u(t)/\partial t]u(t)^{-1}=K_2; \tag{21}$$

$$V(r)^{-1}\varepsilon^{-1}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2)^{\frac{1}{2}}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}[\partial v(r)/\partial r]v(r)^{-1}=-K_1; \tag{22}$$

$$V(r)\varepsilon^{-1}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2)^{\frac{1}{2}}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}[\partial u(r)/\partial r]u(r)^{-1}=-K_2. \tag{23}$$

Окончательно для временных зависимостей v и u имеем

$$\ln v(t)=K_1\int V(t)^{-1}dt+\ln v_{0t}; \tag{24}$$

$$\ln u(t)=K_2\int V(t)dt+\ln u_{0t}; \tag{25}$$

а для радиальных

$$\ln v(r)=-K_1\int\varepsilon(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2)^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}V(r)dr+\ln v_{0r}, \tag{26}$$

$$\ln u(r)=-K_2\int\varepsilon(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2)^{-\frac{1}{2}}(\varepsilon-2Mr+Q^2+\lambda r^2\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}V(r)^{-1}dr+\ln u_{0r}, \tag{27}$$

где $\ln v_{0t}$, $\ln u_{0t}$, $\ln v_{0r}$ и $\ln u_{0r}$ — константы интегрирования.

Следует заметить, что крускало-подобная форма для временных зависимостей v и u, однако как можно видеть вовсе не обязательная для аналитического продолжения, может быть получена при выборе $V(t)=\operatorname{th}(kt)$, где $k=\text{const}$. Таким образом, полученные формулы (24—27) в общем виде задают переход к новым координатам, описывающим аналитическое продолжение рассматриваемого пространства-времени.

4. Возможности внутренней устойчивости аналитически продолженной структуры пространства-времени

Исследование устойчивости структуры пространства-времени относительно малых возмущений необходимо для рассмотрения его реализации в конкретных физических и астрофизических задачах. Различные возмущения, очевидно, всегда имеют место в сколько-нибудь реальном случае.

Что касается внешних возмущений, которые развиваются над внешним горизонтом (например, сколлапсировавших объектов), то этот вопрос в значительной мере исследован (см. обзор [20]). Исследованию внутренних возмущений в некоторой мере препятствуют технические трудности, связанные опять-таки со сложными соотношениями для координат аналитически продолженных многообразий, которые в ряде случаев не позволяют осуществить разделение переменных для решения соответствующих волновых уравнений для описания возмущений. Именно это и имеет место в случае метрик Керра, Керра-Ньюмена и более сложных. Однако можно установит некоторые качественные выводы, основываясь на общих закономерностях для аналитически продолженных многообразий.

Прежде всего вспомним аналогичную проблему для геометрии Рейсснера--Нордстрема (получается из (4) при $a = \lambda = 0$), где она исследована [21—23]. Эта метрика имеет только две псевдосингулярные поверхности $r = r_{\pm} = M_{\pm}(M^2 - Q^2)^{1/2}$ (при $M > Q$). На внутреннем горизонте в данном пространстве-времени за счет возмущений развивается сингулярность в результате бесконечного синего смещения, которое возникает при движении пробного тела через внутренний горизонт. Другими словами, здесь поверхность $r = r_-$ является одновременно и горизонтом событий и поверхностью бесконечного синего смещения.

Что же касается пространственно-временной структуры многообразия Керра или Керра-Ньюмена, а тем более и Керра-Ньюмена-Де-Ситтера, то ситуация принципиально меняется. Поверхность бесконечного синего смещения R_- не совпадает в общем случае с горизонтом r_-. Поэтому в результате действия возмущений, которые можно смоделирсвать как движение пробного тела через рассматриваемые поверхности, здесь сингулярность уже будет развиваться на R_-, а не на горизонте r_-. При этом можно видеть, что в отличие от случая геометрии Рейсснера-Нордстрема в указанных вращательных метриках сохраняется многосвязная топологическая структура аналитически продолженного многообразия, так как горизонты остаются несингулярными.

Заметим, что здесь мы имеем в виду возмущения, вызываемые не квантовыми эффектами, а возникающие на классическом уровне. В случае квантовых эффектов ситуация может быть принципиально иной [24].

Рассмотренная здесь возможность устойчивости топологической структуры керровского многообразия является дополнительным аргументом в пользу астрофизической интерпретации расширенных многообразий, как отонных миров в топологически неевклидовом пространстве-времени [25], которые могут иметь наблюдательные проявления в виде вспышек белых дыр [26, 27]. Для более простых случаев расширенных многообразий, например рейсснер-нордстремовского, это оказывается невозможным [28].

На основе проведенного в данной работе анализа, используя общие принципы построения диаграмм Пенроуза для аналитически продолженных многообразий [11, 12], можно обобщить известное построение для диаграммы в случае геометрий Керра либо Керра-Ньюмена на случай произвольного полярного угла, а не только для оси симметрии, как это выполнено в работах отмеченных выше (см. [10]).

Псевдосингулярные поверхности $R_\pm$ и $r_\pm$ при этом не совпадают, а разделяют все пространство-время на набор соединяющихся на них областей (см. рис. 1). Подробное исследование такого аналитически продолженного многообразия не является предметом настоящей работы и будет рассмотрено в дальнейшем.

Автор выражает благодарность Трофименко А. П. за чтение рукописи, интерес к работе и полезные замечания.

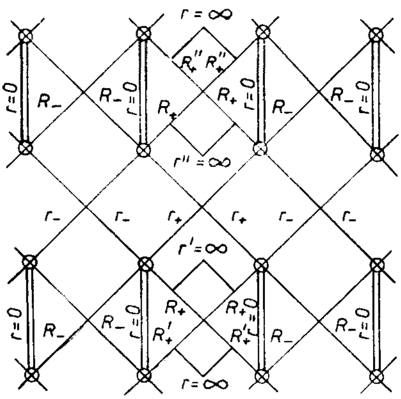

Рис. 1. Представление глобальной структуры пространства-времени Керра либо Керра-Ньюмена для произвольного полярного угла ($R_\pm \neq r_\pm$) в виде диаграммы Пенроуза. Область $r < 0$ не показана. Асимптотически плоские области, $r = \infty$, следует представлять, как лежащие вне плоскости рисунка. Штрихи над $R_\pm$, $r = \infty$ означают принадлежность их непоказанным (лежащим ниже и выше чертежа) областям

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum, E. Herlt, *Exact Solutions of the Einstein Field Equations*, Deutscher Verlag der Wiss., Ed. by E. Schmutzer, Berlin 1980.

[2] J. Plebanski, M. Demianski, *Ann. Phys.* (USA) **98**, 98 (1978).

[3] B. Carter, Proc. of the 1st Marcel Grossman GR Meeting, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1977, p. 243.

[4] P. O. Mazur, *J. Phys. A* **15**, 3173 (1982).

[5] J. Plebanski, *Ann. Phys.* (USA) **90**, 196 (1975).

[6] R. H. Boyer, R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.* **8**, 265 (1967).

[7] M. Demianski, *Acta Astron.* **23**, 197 (1973).

[8] H. Lake, M. Weiss, *Phys. Rev.* **D16**, 3376 (1977).

[9] H. Lake, R. C. Roeder, *Phys. Rev.* **D15**, 3513 (1977).

[10] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1973.

[11] M. Walker, *J. Math. Phys.* **11**, 2280 (1970).

[12] B. B. Godfrey, *J. Math. Phys.* **12**, 606 (1971).

[13] П. И. Фомин, *ЖЭТФ* **54**, 905 (1968).

[14] О. С. Иваницкая, *Обобщенные преобразования Лоренца и их применение*, Наука и техника, Минск 1969.

[15] E. Recami, R. Mignani, *Riv. Nuovo Cimento* **4**, 209 (1974).

[16] R. Goldoni, *Acta Phys. Austr.* **41**, 75, 133 (1975); *Lett. Nuovo Cimento* **21**, 333 (1978).

[17] V. DeSabbata, M. Pavšič, E. Recami, *Lett. Nuovo Cimento* **19**, 441 (1978).
[18] V. S. Gurin, *Fizika* **16**, 87 (1984).
[19] J. K. Kowalczynski, *Acta Phys. Pol.* **B15**, 101 (1984).
[20] S. Chandrasekhar, *The General Theory of the Mechanical, Electromagnetic and Thermodynamic Properties of Black Holes and Its Perturbations*. In book: *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, Ed. by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge 1979, p. 370.
[21] M. Simpson, R. Penrose, *Int. J. Theor. Phys.* **7**, 183 (1973).
[22] J. M. McNamara, *Proc. Roy. Soc. London* **A358**, 499 (1978); **A364**, 121 (1978).
[23] Y. Gursel, V. D. Sandberg, I. D. Novikov, A. A. Starobinsky, *Phys. Rev.* **D19**, 413 (1979); **D20**, 1256 (1979).
[24] W. A. Hiscock, *Phys. Rev.* **D21**, 2057 (1980).
[25] А. П. Трофименко, *Генезис и современные проблемы астрофизики отонов*. Депонировано в ИНИОН АН СССР, № 16810, 1984.
[26] А. П. Трофименко, *Принцип развития в астрофизике*. Депонировано в ИНИОН АН СССР, № 2027, 1978.
[27] J. V. Narlikar, K. M. V. Apparao, *Astrophys. Space Sci.* **35**, 321 (1975).
[28] M. Demianski, I. D. Novikov, *Gen. Relativ. Gravitation* **14**, 1115 (1982).