Vol. B19 (1988) ACTA PHYSICA POLONICA No 7

ГРАВИТАЦИЯ И ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Ю. Лёффельхольц, А. Пестов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

GRAVITATION AND POLARIZATION PROPERTIES OF ELECTROMAGNETIC FIELDS

BY J. LÖFFELHOLZ AND A. PESTOV

Joint Institute for Nuclear Research, Dubna*

(Received August 24, 1987)

It is shown that when an electromagnetic field is in a given gravitational field, the invariance of gravitational potentials under spatial reflections leads to electromagnetic field having two independent polarizations. A general comment is given on the energy of the gravitational field.

PACS numbers: 04.20.Cv

Известно, что операция отражения времени имеет большое значение в евклидовой квантовой теории поля [1—3]. В настоящем сообщении мы обращаемся к отражениям пространства и устанавливаем связь между свойствами симметрии гравитационного поля при пространственных отражениях и существованием двух состояний поляризации электромагнитного поля, находящегося в рассматриваемом гравитационном поле. Предварительно сделаем несколько необходимых для дальнейшего замечаний о свойствах симметрии уравнений гравитационного поля и законах сохранения энергии и импульса электромагнитного поля в общей теории относительности.

Пусть $G = \mathrm{Diff}\, M$ группа диффеоморфизмов пространственно-временного многообразия M и h: $(x^\mu) \Rightarrow (f^\mu(x))$ элемент этой группы, где $f^\mu(x)$ гладкие функции, задающие отображение M на себя. Уравнения гравитационного поля G-инвариант-

* Address: Joint Institute for Nuclear Research, Head Post Office, P.O. Box 79, 101000 Moscow, USSR.

ны и, следовательно, гравитационные потенциалы $g_{\mu\nu}(x)$ и $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ конгруэнтные в смысле группы G, описывают одно и то же гравитационное поле. Свойства электромагнитного поля зависят от $g_{\mu\nu}(x)$. Так при переходе от $g_{\mu\nu}(x)$ к другим потенциалам $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ мы, вообще говоря, получим уравнения Максвелла, не эквивалентные уравнениям, соответствующим $g_{\mu\nu}(x)$. Эквивалентность будет иметь место, если $g_{\mu\nu}(x)$ и $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ будут конгруэнтны. В этом случае каждому решению $F_{\mu\nu}(x)$ уравнений Максвелла задаваемых $g_{\mu\nu}(x)$ будет соответствовать решение уравнений Максвелла, задаваемых $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$, причем

$$\bar{F}_{\mu\nu}(x) = F_{\alpha\beta}(f(x))\frac{\partial f^{\alpha}(x)}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial f^{\beta}(x)}{\partial x^{\nu}}. \tag{1}$$

Из (1) следует, что если $F_{\mu\nu}(x)$ тензорное поле, то $\bar{F}_{\mu\nu}(x)$ также тензорное поле. Поля $F_{\mu\nu}(x)$ и $\bar{F}_{\mu\nu}(x)$ будут описывать одно и то же электромагнитное поле, если

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\alpha\beta}(f(x))\,\frac{\partial f^{\alpha}(x)}{\partial x^{\mu}}\,\frac{\partial f^{\beta}(x)}{\partial x^{\nu}} = g_{\mu\nu}(x). \tag{2}$$

Говорят, что преобразования группы G, удовлетворяющие (2), задают изометрические движения в римановом пространства-времени с квадратичной формой $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$. Векторное поле $u^{\mu}(x)$, задающее бесконечно малое изометрическое движение, есть векторное поле Киллинга. Если $u^{\mu}(x)$ векторное поле Киллинга метрического поля $g_{\mu\nu}(x)$, то интеграл по поверхности $P(u) = \int\limits_{\Sigma} u^{\mu}T_{\mu\nu}d\sigma^{\nu}$ не зависит от Σ, где $T_{\mu\nu}$ тензор энергии-импульса электромагнитного поля, находящегося в гравитационном поле $g_{\mu\nu}(x)$. Пусть $L_a = u^{\mu}_a\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$, $L_{ab} = -L_{ba} = u^{\mu}_{ab}\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ генераторы группы Пуанкаре, $a, b = 0, 1, 2, 3$. Так как векторные поля u^{μ}_a, u^{μ}_{ab}, вообще говоря, не являются векторными полями Киллинга метрики $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^{\mu}dx^{\nu}$, то энергия-импульс $P_a = \int\limits_{\Sigma} u^{\mu}_a T_{\mu\nu}d\sigma^{\nu}$ и момент количества движения $M_{ab} = \int\limits_{\Sigma} u^{\mu}_{ab}T_{\mu\nu}d\sigma^{\nu}$ не сохраняются.

Имея перед собой связь между законами сохранения и свойствами симметрии гравитационных полей по отношению к непрерывным симметриям, естественно поставить вопрос о значении дискретных операций в теории электромагнитного поля, находящегося во внешнем гравитационном поле. Пусть электромагнитное поле находится в каком-либо гравитационном поле. Среди гравитационных потенциалов, соответствующих этому полю, найдутся такие, для которых $g_{00} = I$, $g_{0i} = 0$, $ds^2 = (dx^0)^2 + g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)dx^i dx^k$, $i, k = 1, 2, 3$. Запишем уравнения Максвелла, приуроченные к этим потенциалам, в трехмерной векторной форме. Согласно [4], имеем

$$\frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\,\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\boldsymbol{H}) + \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$$

$$-\frac{1}{c\sqrt{\gamma}}\,\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\,\boldsymbol{E}) + \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0. \tag{3}$$

где γ определитель трехмерного метрического поля $\gamma_{ik} = -g_{ik}$, $i, k = 1, 2, 3$. Поставим вопрос о регулярном определении двух независимых поляризаций электромагнитного поля. Сначала рассмотрим случай, когда гравитационного поля нет и уравнения Максвелла Пуанкаре инвариантны. Если P^a, M^{ab} операторы 4-импульса и 4-момента количества движения, то временная компонента псевдовектора Паули—Любаньского—Баргмана [5] $\omega_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}P^bM^{cd}$ равна, $\omega_0 = L_1L_{23}+L_2L_{31}+L_3L_{12}$. С помощью формулы

$$\delta F_{\mu\nu} = u^\sigma\partial_\sigma F_{\mu\nu}+F_{\sigma\nu}\partial_\mu u^\sigma+F_{\mu\sigma}\partial_\nu u^\sigma,$$

выражающей изменение бивектора при бесконечно малом преобразовании группы G, можно вычислить результат применения оператора ω_0 к $F_{\mu\nu}$. Записывая его в трехмерной форме, имеем

$$\omega_0\boldsymbol{E} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}, \qquad \omega_0\boldsymbol{H} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}. \tag{4}$$

Возвращаясь теперь к нашей задаче и учитывая (3), (4) а также тот смысл, который придается оператору ω_0 в теории безмассовых полей и, в частности, в проблеме локализации фотонов [6], можно дать следующее общее определение. Если векторы электрической и магнитной напряженности удовлетворяют уравнению

$$\mathrm{rot}\,\Psi = \mu\Psi,$$

то состояния с $\mu > 0$ естественно назвать правополяризованными, а состояния с $\mu < 0$ левополяризованными. Отметим некоторые свойства оператора rot и его собственных векторов. Предполагая, что интеграл $\int \boldsymbol{\Psi}\cdot\boldsymbol{\Phi}\sqrt{\gamma}d^3x$ сходится, где $\boldsymbol{\Psi}\cdot\boldsymbol{\Phi} = \Psi_i\Phi_k\gamma^{ik}$, мы определим скалярное произведение $(\boldsymbol{\Psi}\,|\,\boldsymbol{\Phi})$ относительно которого оператор rot самосопряжен [7]. Следовательно, его собственные векторы образуют полную систему, по которой может быть разложен вектор $\boldsymbol{\Psi}$, удовлетворяющий условию конечности $(\boldsymbol{\Psi}\,|\,\boldsymbol{\Psi})$ и уравнению $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Psi} = 0$, так как всякий собственный вектор rot удовлетворяет этому уравнению. При рассмотрении уравнения (5) время t можно рассматривать как параметр, а γ_{ik} как метрический тензор однопараметрического семейства римановых пространств $V_3(t)$. В общем случае μ зависит от t. Важно также подчеркнуть, что оператор rot нечетный и его собственные значения суть скаляры нечетного рода (псевдоскаляры) [8].

Предположим теперь, что все $V_3(t)$ ориентируемые, то есть, что все системы координат в каждом $V_3(t)$ распадаются на два класса [9]. К одному из классов относятся те системы координат в которых ориентация (то есть псевдоскаляр ε, такой, что $\varepsilon^2 = 1$) равняется единице; они называются правыми. К другому классу относятся левые системы координат в которых $\varepsilon = -1$. Если обе системы координат правые (левые) то якобиан $J = \dfrac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)}$ в пересечении их областей определения больше нуля. Якобиан меньше нуля в том случае, когда одна система координат правая (левая), а другая — левая (правая). Если $\boldsymbol{\Psi}_\mu$ собственный вектор rot с собственным значением μ, то его координаты в некоторой правой системе координат являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\tfrac{1}{2}\, e_{ijk}(x)\left(\frac{\partial\psi_n(x)}{\partial x^m} - \frac{\partial\psi_m(x)}{\partial x^n}\right)\gamma^{mj}(x)\gamma^{nk}(x) = \mu\psi_i(x), \tag{6}$$

где $e_{123} = \sqrt{\gamma}$. Координаты $\bar{\psi}_i(\bar{x})$ того же самого вектора в левой системе координат $\bar{x}^i$ являются решениями системы дифференциальных уравнений

$$\tfrac{1}{2}\, \bar{e}_{ijk}(\bar{x})\left(\frac{\partial\bar{\psi}_n(x)}{\partial\bar{x}^m} - \frac{\partial\bar{\psi}_m(\bar{x})}{\partial\bar{x}^n}\right)\bar{\gamma}^{mj}(\bar{x})\bar{\gamma}^{nk}(\bar{x}) = -\mu\bar{\psi}_i(\bar{x}), \tag{7}$$

где $\bar{e}_{123} = e_{123}|J|$, $\bar{\gamma}^{ij}(\bar{x}) = \gamma^{kn}\,\dfrac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\,\dfrac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^n}$.

Сравнивая (6) и (7), замечаем, что при условии

$$\bar{e}_{ijk}(\bar{x})\bar{\gamma}^{mj}(\bar{x})\bar{\gamma}^{nk}(\bar{x}) = e_{ijk}(\bar{x})\gamma^{mj}(\bar{x})\gamma^{nk}(\bar{x}) \tag{8}$$

функции $\bar{\psi}_i(x)$ будут решениями системы дифференциальных уравнений

$$\tfrac{1}{2}\, e_{ijk}(x)\left(\frac{\partial\bar{\psi}_n(x)}{\partial x^m} - \frac{\partial\bar{\psi}_m(x)}{\partial x^n}\right)\gamma^{mj}(x)\gamma^{nk}(x) = -\mu\bar{\psi}_i(x)$$

и, следовательно, наряду с собственным вектором $\boldsymbol{\Psi}_\mu$, в таком случае существует собственный вектор $\boldsymbol{\Psi}_{-\mu}$ с собственным значением $-\mu$. Нетрудно убедиться, что если

$$\bar{\gamma}^{ij}(\bar{x}) = \gamma^{ij}(\bar{x}), \tag{9}$$

то (8) будет следствием (9). В этом случае точечное преобразование $(x^i) \Rightarrow (\varphi^i(x))$, где $\varphi^i(x) = \bar{x}^i$, будет изометрическим отражением пространства на себя. Таким образом, если гравитационное поле допускает изометрические отражения, то обеспечено существование двух независимых поляризаций у электромагнитного поля, находящегося в таком гравитационном поле. В связи с этим экспериментальное изучение поляризационных свойств электромагнитного излучения, особенно приходящего из космоса, видимо, представляет интерес.

Проведенное рассмотрение позволяет высказать также следующее суждение об энергии гравитационного поля. Мы знаем, что электромагнитное поле передает взаимодействие между носителями электрического заряда. При этом само электромагнитное поле заряда не имеет. С другой стороны, гравитационное поле передает взаимодействие между носителями энергии-импульса. Спрашивается, имеет ли само гравитационное поле энергию и импульс? На наш взгляд, в пользу отрицательного ответа на постпвленный вопрос свидетельствует тот факт, что из гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}(x)$ нельзя построить локальной величины, инвариантной относительно преобразований группы G. Имея такое свойство гравитационное поле могло бы проявлять себя как физическая реальность через влияние на внутренние характеристики элементарных частиц. Не исключено, конечно, и другое [10]. Гравитационное поле, видимо, можно наделить энергией путем спонтанного нарушения присущей ему симметрии, выражаемой группой $G = \mathrm{Diff}\, M$. В любом случае вопрос упирается в выяснение физического смысла группы G.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. C. Hegerfeldt, *Comm. Math. Phys.* **35**, 155 (1974).
[2] A. Uhlmann, *Czech. J. Phys.* **B29**, 117 (1979).
[3] J. Löffelholz, Proceedings of the 1979 Estergom conference on random fields, 701-714, KMU QFT 4 (1979).
[4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва 1967.
[5] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, *Основы аксиматического подхода в квантовой теории поля*, Наука, Москва 1969.
[6] A. Z. Jadczyk, B. Jancewicz, *Bull. Acad. Pol.* **21**, 477 (1973).
[7] Р. Д. Рихтмайер, *Принципы современной математической физики*, Мир, Москва 1982, т. I, с. 145.
[8] Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, Издательство иностранной литературы, Москва 1957.
[9] А. Лихнерович, *Теория связностей в целом и группы голономии*, Издательство иностранной литературы, Москва 1960.
[10] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, *Фейнмановские лекции по физике*, Мир, Москва 1966, т. 6, гл. 27.