Vol. B19 (1988) ACTA PHYSICA POLONICA No 9

О СВЯЗИ СПИНА И СТАТИСТИКИ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

В. А. Плетюхов, В. И. Стражев

Брестский педагогический институт им. А. С. Пушкина*

ON THE CONNECTION BETWEEN SPIN AND STATISTICS IN THE FIELD THEORY

By V. A. Pletyukhov and V. I. Strazhev

A. S. Puschkin Pedagogical Institute, Brest

(*Received November 18, 1987*)

The connection between spin and statistics in the theory of Relativistic Wave Equations (RWE) is investigated. The well-known Pauli theorem appears as a particular case.

PACS numbers: 11.10.Qr

1. *Введение*

Как было замечено Дираком [1] и Паули [2], однозначная связь между спином и статистикой теряется при использовании индефинитной метрики. В работе [2] показана возможность квантового описания скалярного фермиона и бозона со спином $\frac{1}{2}$ без нарушения причинности. Но при этом возникают физически бессмысленные отрицательные вероятности. Если рассмотреть возможность такого квантования в присутствии изоспиновых степеней свободы, описываемых компактными группами, то последний вывод остается в силе. Положение, однако, радикально изменяется в теориях с некомпактными группами внутренней симметрии. Здесь оказывается возможным не только непротиворечивое с точки зрения причинности квантование целого и полуцелого спинов по „чужой" статистике, но и достижение при этом вероятностной интерпретации теории.

В настоящей работе данная проблема исследована в общем виде в рамках теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка. Определены условия, при которых может быть осуществлено корректное квантование целого и полуцелого

* Address: Pedagogical Institute, Cosmonavtov Av. 21, Brest, 224665, USSR.

спинов как по статистике Бозе-Эйнштейна, так и по Ферми-Дираку. Известная теорема Паули о связи спина и статистики и упомянутые выше результаты работы [2] содержатся в развитом подходе в качестве частных (предельных) случаев.

2. *РВУ с изоспиновыми степенями свободы и набором спиновых состояний*

Запишем РВУ первого порядка[1]

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0, \tag{1}$$

волновая функция $\psi(x)$ которого преобразуется по набору неприводимых представлений $\tau_{l_1 l_2}$ собственной группы Лоренца. В базисе Гельфанда-Яглома [3, 4] матрица γ_4, которая содержит в себе основную физическую информацию, относящуюся к данному уравнению, имеет в общем случае вид прямой суммы

$$\gamma_4 = \oplus \sum_l C^l \otimes I_{2l+1}, \tag{2}$$

где I_{2l+1} — единичная клетка размерности $(2l+1)\times(2l+1)$, C^l — блок, сопоставляемый спину l ($|l_1 - l_2| \leqslant l \leqslant l_1 + l_2$) в том смысле, что если C^l имеет ненулевые корни, то частица обладает данным спином. Корни спиновых блоков C^l определяют также спектр массовых состояний частицы.

Мы будем в дальнейшем рассматривать РВУ с одной массой и, вообще говоря, набором спиновых состояний. Блоки C^l, а значит и матрица γ_4 таких РВУ содержат только один (с точностью до знака) ненулевой корень ± 1, причем знак „+" отвечает положительно-частотным, а „−" — отрицательно-частотным решениям.

В данном формализме наличие у частицы помимо спиновых дополнительных внутренних (изоспиновых) степеней свободы выражается в том, что в характеристическом полиноме, по крайней мере, одного из блоков C^l ненулевой корень является кратным[2]. Этим степеням свободы можно сопоставить некоторый оператор $\hat{\Pi}$, коммутирующий с операторами 4-импульса $\hat{p} = ip_\mu\gamma_\mu$, квадрата спина $\hat{S}^2$ и проекции спина $\hat{S}_3$. Оператор $\hat{\Pi}$ содержится среди генераторов соответствующей группы внутренней симметрии или же является общим элементом алгебры Ли этой группы. В каждом конкретном случае его вид определяется физической интерпретацией полевой системы и присущих ей изоспиновых степеней свободы.

Чтобы не сужать общность рассмотрения вопроса, не будем накладывать каких-либо существенных ограничений на вид оператора $\hat{\Pi}$ за исключением естественного предположения о том, что он, как и операторы $\hat{S}^2$ и $\hat{S}_3$, приводит к диагональному виду и коммутирует с матрицей билинейной формы η. Собственные значения оператора $\hat{\Pi}$, которые будем называть Π-четностью, обозначим через λ_i (индекс i нумерует допустимые значения Π-четности). Поскольку кратность ненулевого

---

[1] По повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование.

[2] В этой связи напомним, что кратность ненулевых корней минимального полинома матрицы γ_4 и ее спиновых блоков не может превышать единицу [5].

корня в различных спиновых блоках может быть разной, это означает, что фиксированное значение Π-четности присуще, вообще говоря, не каждому спиновому состоянию, т.е. данному значению спина отвечает свой набор значений Π-четности. Можно трактовать такую ситуацию и иначе: считать, что состоянию с фиксированной Π-четностью соответствует определенный спектр спиновых состояний.

В дальнейшем мы будем широко использовать метод проективных операторов Федорова [6, 7]. Для возможности его применения к рассматриваемому классу РВУ необходимо помимо проективных операторов $\kappa_{\pm}(\hat{p})$ и β_k, выделяющих состояния с данным импульсом, знаком массы и проекцией спина, ввести в рассмотрение проективные операторы спина (в смысле абсолютной величины) S_l^2 и Π-четности π_i, выделяющие соответственно состояния с данным спином и данной Π-четностью.

Оператор S_l^2 определяется соотношениями

$$S_l^2 = Q_l(\hat{S}^2)/Q_l[l(l+1)], \quad [\hat{S}^2 - l(l+1)]Q_l(\hat{S}^2) \equiv Q(\hat{S}^2) = 0, \tag{3}$$

где l — квантовое число, характеризующее спин частицы, $Q(\hat{S}^2)$ — минимальный полином оператора спина $\hat{S}^2$, $Q_l(\hat{S}^2)$ — урезанный минимальный полином, отвечающий спину l. Аналогично определяется проективный оператор Π-четности:

$$\pi_i = P_i(\hat{\Pi})/P_i(\lambda_i), \quad (\hat{\Pi} - \lambda_i)P_i(\hat{\Pi}) \equiv P(\hat{\Pi}) = 0, \tag{4}$$

где $P(\hat{\Pi})$ — минимальный полином матрицы $\hat{\Pi}$, $P_i(\hat{\Pi})$ — урезанный минимальный полином. Проективные операторы S_l^2 и π_i, так же как и β_k, удовлетворяют соотношению

$$\sum_k \beta_k = \sum_l S_l^2 = \sum_i \pi_i = I. \tag{5}$$

(Заметим, что для выполнения условий (5) существенным моментом является приводимость операторов спина, проекции спина и Π-четности к диагональному виду).

Проективный оператор, выделяющий единственное состояние с фиксированными значениями импульса, знака массы, Π-четности, спина и проекции спина, будет иметь вид:

$$\tau_{ilk}^{(\pm)}(\hat{p}) = \kappa_{\pm}(\hat{p})\pi_i S_l^2 \beta_k. \tag{6}$$

Рассуждая аналогично [7], можно показать, что при условии коммутации матриц $\hat{\Pi}$ и η знак плотности энергии в данном состоянии определяется знаком выражения $\mathrm{Sp}(\tau_{ilk}^{(\pm)}\eta)$ в системе покоя частицы, а знак плотности заряда совпадает со знаком $\mathrm{Sp}(\gamma_4\tau_{ilk}^{(\pm)}\eta)$. Анализ этих выражений для уравнений с одним значением спина и без Π-четности показывает [7], что знаки плотности энергии (заряда), во-первых, не зависят от проекции спина и, во-вторых, указанные знаки в положительно-частотных и отрицательно-частотных состояниях одинаковы в случае целого (полуцелого) и противоположны в случае полуцелого (целого) спина. Иными словами, для целого спина энергия дефинитна, заряд индефинитен, а для полуцелого наоборот — энергия индефинитна, заряд дефинитен.

В случае уравнений с Π-четностью и набором спинов знаки энергии и заряда будут зависеть, вообще говоря, от квантовых чисел i и l. Чтобы учесть эту зависимость, введем нормировочную переменную $g_{is}^{(\pm)}$, значение которой соответствует знаку плотности энергии в состоянии $\psi_{is}^{(\pm)}$, т.е.

$$g_{is}^{(\pm)} = \mathrm{Sign}\,[\mathrm{Sp}\,(\tau_{is}^{(\pm)}\eta)]. \tag{7}$$

(Здесь и далее под индексом s для удобства будем понимать объединенный индекс $\{lk\}$, который характеризует спиновое состояние частицы как в смысле абсолютной величины спина, так и его проекции).

Немаловажным является также то обстоятельство, что для рассматриваемого класса РВУ теряется строго определенное соответствие между знаками плотности энергии (и заряда) в положительно- и отрицательно-частотных состояниях, с одной стороны, и целочисленным либо полуцелочисленным характером спина, с другой. Так, в зависимости от типа уравнения и способа задания оператора $\hat{\Pi}$ для плотности энергии в случае целого спина наряду с „обычным" соответствием, когда

$$g_{is}^{(+)} = g_{is}^{(-)}, \tag{8}$$

может выполняться и равенство

$$g_{is}^{(+)} = -g_{is}^{(-)}. \tag{9}$$

Аналогично для полуцелого спина возможно выполнение как условия (9), так и (8). Плотность заряда имеет (для любого спина) противоположные знаки в состояниях $\psi_{is}^{(+)}$ и $\psi_{is}^{(-)}$ в случае (8) и одинаковые в случае (9).

Рассмотрим подробно ситуацию, когда для целого спина выполняется условие (8), а для полуцелого — условие (9). Вводя обозначение $g_{is}^{(+)} = g_{is}$, для наглядности изобразим получающееся при этом соответствие знаков плотности энергии и заряда различным состояниям частицы с помощью таблицы.

Возвращаясь теперь к проективному оператору (6), перепишем его в виде (см. [7])

$$\tau_{is}^{(\pm)}(\hat{p}) = c\psi_{is}^{(\pm)}(p)\cdot\bar{\psi}_{is}^{(\pm)}(p), \tag{10}$$

где $\bar{\psi} = \psi^*\eta$, точка означает прямое (диадное) произведение, т.е. $\psi\cdot\varphi \equiv \psi_\alpha\varphi_\beta$. Пользуясь нормировкой по заряду, в соответствии с таблицей будем иметь

$$\bar{\psi}_{is}^{(\pm)}\gamma_4\psi_{is}^{(\pm)} = \pm g_{is}, \quad \bar{\psi}_{is}^{(\pm)}\psi_{is}^{(\pm)} = \pm\frac{m}{p_0}g_{is} = \frac{m}{|p_0|}g_{is} \tag{11}$$

ТАБЛИЦА

Состояние	Целый спин		Полуцелый спин	
	энергия	заряд	энергия	заряд
$\psi_{is}^{(+)}$	g_{is}	g_{is}	g_{is}	g_{is}
$\psi_{is}^{(-)}$	g_{is}	$-g_{is}$	$-g_{is}$	g_{is}

для целого спина и

$$\bar{\psi}_{is}^{(\pm)}\gamma_4\psi_{is}^{(\pm)} = g_{is}, \quad \bar{\psi}_{is}^{(\pm)}\psi_{is}^{(\pm)} = \frac{m}{p_0}\, g_{is} = \pm\frac{m}{|p_0|}\, g_{is} \tag{12}$$

для полуцелого. Отсюда, учитывая, что $\operatorname{Sp}\tau_{is}^{(\pm)} = 1$ и $(g_{is})^2 = 1$, найдем нормировочный множитель c, а значит и выражения для матриц-диад $\psi\cdot\bar{\psi}$ через проективный оператор τ, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\psi_{is}^{(\pm)}\cdot\bar{\psi}_{is}^{(\pm)} = \frac{m}{|p_0|}\, g_{is}\tau_{is}^{(\pm)} \qquad \text{(целый спин)}, \tag{13}$$

$$\psi_{is}^{(\pm)}\cdot\bar{\psi}_{is}^{(\pm)} = \pm\frac{m}{|p_0|}\, g_{is}\tau_{is}^{(\pm)} \qquad \text{(полуцелый спин)}. \tag{14}$$

3. Квантование

С учетом квантового числа i, отвечающего Π-четности, разложение операторных волновых функций $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, основанное на использовании операторов рождения и уничтожения вида $\overset{+}{a}_{is}(p)$, $\overset{+}{b}_{is}(p)$, $a_{is}(p)$, $b_{is}(p)$, при переходе ко вторично-квантованной теории запишется так:

$$\psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_i\sum_s\int\{a_{is}(p)\psi_{is}^{(+)}(p)e^{ipx} + \overset{+}{b}_{is}(p)\psi_{is}^{(-)}(-p)e^{-ipx}\}d^3p, \tag{15}$$

$$\bar{\psi}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\sum_i\sum_s\int\{\overset{+}{a}_{is}(p)\bar{\psi}_{is}^{(+)}(p)e^{-ipx} + b_{is}(p)\bar{\psi}_{is}^{(-)}(-p)e^{ipx}\}d^3p. \tag{16}$$

Подставляя разложения (15), (16) в выражения для заряда

$$Q = \int \varrho d^3x = e\int\bar{\psi}(x)\gamma_4\psi(x)d^3x \tag{17}$$

и энергии

$$E = \int \omega d^3x = \int\{(\partial_4\bar{\psi})\gamma_4\psi - \bar{\psi}\gamma_4\partial_4\psi\}d^3x, \tag{18}$$

получим

$$Q = e\{\sum_i\sum_s \overset{+}{a}_{is}a_{is}(\bar{\psi}_{is}^{(+)}\gamma_4\psi_{is}^{(+)}) + \sum_i\sum_s b_{is}\overset{+}{b}_{is}(\bar{\psi}_{is}^{(-)}\gamma_4\psi_{is}^{(-)})\}, \tag{19}$$

$$E = \sum_i\sum_s \overset{+}{a}_{is}a_{is}|p_0|\,(\bar{\psi}_{is}^{(+)}\gamma_4\psi_{is}^{(+)}) - \sum_i\sum_s b_{is}\overset{+}{b}_{is}|p_0|\,(\bar{\psi}_{is}^{(-)}\gamma_4\psi_{is}^{(-)})\}. \tag{20}$$

Отсюда, учитывая нормировочные соотношения (11), (12), придем к следующим выражениям для Q и E:

$$Q = e\{\sum_i\sum_s g_{is}\overset{+}{a}_{is}a_{is} \mp \sum_i\sum_s g_{is}b_{is}\overset{+}{b}_{is}\}, \tag{21}$$

$$E = \sum_i \sum_s g_{is} \overset{+}{a}_{is} a_{is} |p_0| \pm \sum_i \sum_s g_{is} b_{is} \overset{+}{b}_{is} |p_0|. \tag{22}$$

В (21), (22) верхние знаки соответствуют целому, а нижние — полуцелому спину.

Рассмотрим сначала квантование по „своей" статистике: целый спин — по Бозе-Эйнштейну, полуцелый — по Ферми-Дираку. Постулируем перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения:

$$[a_{is}(p), \overset{+}{a}_{i's'}(p')]_{\mp} = [b_{is}(p), \overset{+}{b}_{i's'}(p')]_{\mp} = g_{is}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta(p-p') \tag{23}$$

и все остальные коммутаторы (антикоммутаторы) равны нулю. В (23) коммутатор отвечает целому, антикоммутатор — полуцелому спину. Операторы числа частиц, соответствующие такому квантованию, определяются следующим образом:

$$n_{is}^{(+)} = g_{is} \overset{+}{a}_{is} a_{is}, \quad n_{is}^{(-)} = g_{is} \overset{+}{b}_{is} b_{is}. \tag{24}$$

Выражая из (23) произведение $b_{is}\overset{+}{b}_{is}$ через $\overset{+}{b}_{is} b_{is}$ и подставляя с учетом соответствия знаков в (21), (22), приведем величины Q и E к виду (с точностью до бесконечных слагаемых)

$$Q = e \{\sum_i \sum_s g_{is} \overset{+}{a}_{is} a_{is} - \sum_i \sum_s g_{is} \overset{+}{b}_{is} b_{is}\}, \tag{25}$$

$$E = \sum_i \sum_s g_{is} \overset{+}{a}_{is} a_{is} |p_0| + \sum_i \sum_s g_{is} \overset{+}{b}_{is} b_{is} |p_0|, \tag{26}$$

одинаковому для целого и полуцелого спинов. Отсюда, используя определения (24), получим

$$Q = e \sum_i \sum_s (n_{is}^{(+)} - n_{is}^{(-)}), \tag{27}$$

$$E = \sum_i \sum_s (n_{is}^{(+)} \varepsilon_{is}^{(+)} + n_{is}^{(-)} \varepsilon_{is}^{(-)}). \tag{28}$$

(В (28) $\varepsilon_{is}^{(\pm)} = |p_0|$, индексы у $\varepsilon_{is}^{(\pm)}$ указывают на принадлежность к соответствующему состоянию).

Вычислим выражения $[\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x'')]_{\mp}$ (α, β — индексы компонент ψ), где по-прежнему коммутаторы (антикоммутаторы) отвечают целому (полуцелому) спину:

$$[\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x'')]_{\mp} = (2\pi)^{-3} \sum_i \sum_s \int \{[a_{is}, \overset{+}{a}_{is}]_{\mp} (\psi_{is}^{(+)} \cdot \bar{\psi}_{is}^{(+)}) e^{ipx}$$

$$\mp [b_{is}, \overset{+}{b}_{is}]_{\mp} (\psi_{is}^{(-)} \cdot \bar{\psi}_{is}^{(-)}) e^{-ipx}\} d^3p, \quad (x = x' - x''). \tag{29}$$

Подставляя в (29) при верхнем знаке соотношения (13), а при нижнем — (14) и учитывая условия (23), придем в обоих случаях к правым частям одинакового вида:

$$[\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x'')]_{\mp} = (2\pi)^{-3} m \sum_i \sum_s \int (\tau_{is}^{(+)} e^{ipx} - \tau_{is}^{(-)} e^{-ipx}) \frac{d^3p}{|p_0|}. \tag{30}$$

Учтем выражение (6) для оператора $\tau_{is}^{(\pm)} \equiv \tau_{ilk}^{(\pm)}$ и то, что в соответствии с тождествами (5) $\sum_i \sum_s \tau_{is}^{(\pm)} = \sum_i \sum_l \sum_k \kappa_{\pm}(\hat{p}) \pi_i S_l^2 \beta_k = \kappa_{\pm}(\hat{p})$. В результате получим

$$[\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x'')]_{\mp} = (2\pi)^{-3} m \int \{\kappa_+(\hat{p}) e^{ipx} - \kappa_-(\hat{p}) e^{-ipx}\} \frac{d^3p}{|p_0|}. \tag{31}$$

Нетрудно убедиться в справедливости равенств (см. [7])

$$\kappa_{\pm}(\hat{p}) e^{\pm ipx} = \kappa_{\pm}(\pm\hat{\nabla}) e^{\pm ipx}, \quad \kappa_-(-\hat{\nabla}) = \kappa_+(\hat{\nabla}) \quad (\hat{\nabla} = \gamma_\mu \partial_\mu). \tag{32}$$

Поэтому $\kappa_-(\hat{p}) e^{-ipx} = \kappa_-(-\hat{\nabla}) e^{-ipx} = \kappa_+(\hat{\nabla}) e^{-ipx}$ и соотношение (31) принимает вид

$$[\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x'')]_{\mp} = (2\pi)^{-3} m \kappa_+(\hat{\nabla}) \int \frac{d^3p}{|p_0|} (e^{ipx} - e^{-ipx}) = 2im\kappa_+(\hat{\nabla}) \Delta_0(x), \tag{33}$$

где $\Delta_0(x) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{|p_0|} e^{ipx} \sin |p_0| x_0$ — инвариантная дельта-функция.

Формулы (27), (28) и (33) показывают, что перестановочные соотношения (23) приводят к правильной корпускулярной картине поля и носят причинный характер.

Теперь исследуем возможность квантования рассматриваемого класса РВУ по „чужой" статистике (целый спин — по Ферми-Дираку, полуцелый — по Бозе-Эйнштейну). Для этого постулируем перестановочные соотношения для величин $\overset{+}{a}$, $\overset{+}{b}$, a и b

$$[a_{is}(p), \overset{+}{a}_{i's'}(p')]_{\pm} = -[b_{is}(p), \overset{+}{b}_{i's'}(p')]_{\pm} = g_{is} \delta_{ii'} \delta_{ss'} \delta(p - p'), \tag{34}$$

в которых уже антикоммутатор соответствует целому, а коммутатор — полуцелому спину. При таком квантовании операторы числа частиц задаются следующим образом:

$$n_{is}^{(+)} = g_{is} \overset{+}{a}_{is} a_{is}, \quad n_{is}^{(-)} = -g_{is} \overset{+}{b}_{is} b_{is}. \tag{35}$$

Определяя из (34) $b_{is} \overset{+}{b}_{is}$ и подставляя в (21), (22), получим одинаковые для обоих типов спина выражения для заряда и энергии

$$Q = e \{\sum_i \sum_s g_{is} \overset{+}{a}_{is} a_{is} + \sum_i \sum_s g_{is} \overset{+}{b}_{is} b_{is}\}, \tag{36}$$

$$E = \sum_i \sum_s g_{is} \overset{+}{a}_{is} a_{is} |p_0| - \sum_i \sum_s g_{is} \overset{+}{b}_{is} b_{is} |p_0|, \tag{37}$$

которые с учетом (35) приводятся к виду (27), (28) соответственно.

Преобразуя с помощью условий квантования (34) формулу (29), где на этот раз коммутатор (антикоммутатор) отвечает полуцелому (целому) спину, получим:

$$[\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x'')]_{\mp} = (2\pi)^{-3} \sum_i \sum_s \int g_{is} \{(\psi_{is}^{(+)} \cdot \bar{\psi}_{is}^{(+)}) e^{ipx} \pm (\psi_{is}^{(-)} \cdot \bar{\psi}_{is}^{(-)}) e^{-ipx}\} d^3p. \tag{38}$$

Применим к (38) при верхнем знаке соотношение (14), а при нижнем — (13). В результате придем в обоих случаях к одинаковому выражению, совпадающему с (30).

Таким образом, при квантовании по „чужой" статистике способом (34) получаются правильные выражения для заряда Q и энергии E и перестановочные соотношения для операторных волновых функций имеют причинный характер.

Аналогично проводится анализ и тогда, когда для целого спина выполняется условие (9), а для полуцелого — (8). Корректные (в вышеуказанном смысле) перестановочные соотношения для операторов рождения и уничтожения в этом случае имеют вид

$$[a_{is}(p), \overset{+}{a}_{i's'}(p')]_{\mp} = -[b_{is}(p), \overset{+}{b}_{i's'}(p')]_{\mp} = g_{is}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta(p-p'), \tag{39}$$

$$[a_{is}(p), \overset{+}{a}_{i's'}(p')]_{\pm} = [b_{is}(p), \overset{+}{b}_{i's'}(p')]_{\pm} = g_{is}\delta_{ii'}\delta_{ss'}\delta(p-p') \tag{40}$$

при квантовании по „своей" и „чужой" статистикам соответственно.

4. *О вероятностной интерпретации теории. Примеры*

Квантование с помощью соотношений (23) и (34) приводит к разбиению гильбертова пространства состояний $\mathscr{H}$ на подпространства $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$, в которых квадраты норм векторов состояний являются соответственно положительно и отрицательно определенными (исключение составляет лишь случай, когда в (23) все числа g_{is} имеют одинаковый знак). Если в теории с индефинитной метрикой при включении взаимодействия амплитуда перехода $S_{fh} = \langle h|S|f\rangle$ между состояниями из подпространств $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$ отлична от нуля, то появляются отрицательные вероятности $P_{fh} = S_{fh}^2/||h||\,||f||$ ($||h||$, $||f||$ — квадраты норм векторов состояний из подпространств $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$). Однако такие переходы могут оказаться запрещенными, если в теории наряду со „стандартными" имеются дополнительные законы сохранения, совместно приводящие к необходимым правилам суперотбора (см., напр., [8, 9]).

Для существования дополнительного закона сохранения достаточно, чтобы лагранжиан был инвариантен относительно фазовых преобразований $\psi \to e^{i\hat{G}\theta}\,\psi = \Lambda\psi$, где θ — параметр, $\hat{G}$ — матричный оператор, удовлетворяющий условиям:

$$[\gamma_\mu, \hat{G}]_- = 0, \qquad \Lambda^+\eta\Lambda = \eta, \qquad \hat{G} \neq I. \tag{41}$$

Возможность устранения вышеуказанных отрицательных вероятностей предполагает, кроме того, что в структуре матрицы $\hat{G}$ непосредственно учитывается знаконеопределенный характер метрики: во-первых, эта матрица должна быть диагональной в каноническом базисе[3]; во-вторых, ее собственные значения, отвечающие состояниям $\psi_{is}^{(\pm)}$, должны совпадать со значениями нормировочной переменной g_{is}.

---

[3] Под каноническим понимается базис в пространстве представления волновой функции ψ, образуемый общей полной системой собственных векторов операторов полного набора.

Тогда дополнительный сохраняющийся „заряд" $G \sim \int \bar{\psi}(x)\gamma_4 \hat{G}\psi(x)d^3x$ приводится к виду

$$G \sim \sum_i \sum_s g_{is}(n_{is}^{(+)} - n_{is}^{(-)}), \tag{42}$$

одинаковому для целого и полуцелого спинов.

Оставляя пока в стороне вопрос (он будет выяснен на примерах) о принципиальной возможности реализации оператора $\hat{G}$, удовлетворяющего всем сформулированным требованиям, проследим механизм совместного действия законов сохранения зарядов Q (27) и G (42), обеспечивающий исключение отрицательных вероятностей. Для выяснения существа дела достаточно рассмотреть частный случай, когда кратность ненулевого корня в спиновых блоках матрицы γ_4 одинакова и равна двум ($i = 1, 2$). И пусть, например, выполняется условие $g_{1s} = -g_{2s} = 1$. Для „заряда" G (42) получается при этих условиях выражение

$$G \sim \sum_s (n_{1s}^{(+)} - n_{2s}^{(+)} - n_{1s}^{(-)} + n_{2s}^{(-)}). \tag{43}$$

Введем операцию зарядового сопряжения, устанавливающую, как известно, соответствие между состояниями частицы и античастицы. Относительно такой операции должны быть инвариантны перестановочные соотношения для величин $\overset{+}{a}, \overset{+}{b}, a, b$. Применительно к рассматриваемому случаю при квантовании по „своей" статистике перестановочные соотношения (23) инвариантны относительно преобразований $\overset{+}{a}_{1s} \leftrightarrow \overset{+}{b}_{1s}$, $\overset{+}{a}_{2s} \leftrightarrow \overset{+}{b}_{2s}$, $a_{1s} \leftrightarrow b_{1s}$, $a_{2s} \leftrightarrow b_{2s}$, тогда как при квантовании по „чужой" статистике (перестановочные соотношения (34)) операцию зарядового сопряжения необходимо задавать в виде $\overset{+}{a}_{1s} \leftrightarrow \overset{+}{b}_{2s}$, $\overset{+}{a}_{2s} \leftrightarrow \overset{+}{b}_{1s}$, $a_{1s} \leftrightarrow b_{2s}$ $a_{2s} \leftrightarrow b_{1s}$, т.е. связывать с ней изменение не только знака электрического заряда, но и значения Π-четности. Отсюда следует, что при первом способе квантования одночастичным состояниям, относящимся к подпространству $\mathscr{H}_+$, будут соответствовать заряды (e, g) и $(-e, -g)$, а состояниям из $\mathscr{H}_-$ — заряды $(e, -g)$ и $(-e, g)$. Очевидно, что для взаимодействий, не нарушающих эту симметрию, совместное выполнение законов сохранения для Q и G приводит к запрету физически бессмысленных переходов между состояниями из $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$. При квантовании вторым способом одночастичные состояния в подпространстве $\mathscr{H}_+$ характеризуются значениями зарядов (e, g) и $(-e, g)$, тогда как в $\mathscr{H}_-$ — $(e, -g)$ и $(-e, -g)$. Законы сохранения для Q и G с учетом в необходимых случаях условия сохранения зарядовой четности опять-таки не разрешают переходы, нарушающие вероятностную интерпретацию теории.

Рассмотрим некоторые конкретные типы РВУ, для которых реализуется данная ситуация.

Возьмем сначала случай теории частиц с одним значением спина. Простейший пример — уравнение Дирака с некомпактной группой внутренней симметрии SU(1, 1), описывающее полевую систему со спином $\frac{1}{2}$ и двукратным вырождением состояний по Π-четности. Его волновая функция преобразуется по фундаментальному представлению этой группы. Матрицы γ_μ и η могут быть записаны в виде $\gamma_\mu = I_2 \otimes \gamma_\mu^{\mathrm{D}}$, $\eta = \sigma_3 \otimes \gamma_4^{\mathrm{D}}$, где γ_μ^{D} — матрицы Дирака ($\gamma_4^{\mathrm{D}} = \mathrm{diag}(1, 1, -1, -1)$), σ_n — матрицы Паули. В качестве оператора Π-четности выберем диагональный оператор $\hat{\Pi} = \sigma_3 \otimes I_4$, коммутирующий с матрицами γ_μ и η. Его собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ ($i = 1, 2$). В полный набор наблюдаемых входят операторы 4-импульса, проекции спина и Π-четности; оператор квадрата спина по понятным причинам в этот набор не включается. Переменная $g_{is}^{(\pm)}$, вычисленная по формуле (7), принимает значения $g_{1s}^{(+)} = 1, g_{1s}^{(-)} = -1, g_{2s}^{(+)} = -1, g_{2s}^{(-)} = 1$ ($s = k = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$), т.е. имеет место выполнение условия (9). Квантование по „своей" (Ферми--Дирака) статистике осуществляется, следовательно, на основе перестановочных соотношений (23) с антикоммутаторами. В результате, учитывая значения переменной $g_{is} \equiv g_{is}^{(+)}$, получим:

$$[a_{1s}(p), \overset{+}{a}_{1s'}(p')]_+ = [b_{1s}(p), \overset{+}{b}_{1s'}(p')]_+ = \delta_{ss'}\delta(p-p');$$

$$[a_{2s}(p), \overset{+}{a}_{2s'}(p')]_+ = [b_{2s}(p), \overset{+}{b}_{2s'}(p')]_+ = -\delta_{ss'}\delta(p-p'). \tag{44}$$

При квантовании обсуждаемой полевой системы по „чужой" (Бозе-Эйнштейна) статистике будем согласно (34) иметь:

$$[a_{1s}(p), \overset{+}{a}_{1s'}(p')]_- = [b_{2s}(p), \overset{+}{b}_{2s'}(p')]_- = \delta_{ss'}\delta(p-p'),$$

$$[a_{2s}(p), \overset{+}{a}_{2s'}(p')]_- = [b_{1s}(p), \overset{+}{b}_{1s'}(p')]_- = -\delta_{ss'}\delta(p-p'). \tag{45}$$

Оператор $\hat{G}$, строящийся из чисел g_{is} вышеуказанным способом, принимает вид $\hat{G} = \sigma_3 \otimes I_4 = \hat{\Pi}$, совпадающий с видом оператора Π-четности и поэтому автоматически обеспечивающий выполнение условий (41). Отвечающий оператору $\hat{G}$ дополнительный сохраняющийся „заряд" G описывается выражением (43), поскольку в рассматриваемом случае $g_{1s} = -g_{2s} = 1$. Как следует из проведенного выше анализа, при обоих способах квантования с соответствующим заданием операции зарядового сопряжения совместное действие законов сохранения для Q и G приводит к запрету переходов, нарушающих вероятностную интерпретацию теории.

Аналогичным образом можно показать существование необходимых правил суперотбора для полевых систем с одним значением спина и произвольной некомпактной группой внутренней симметрии. Заметим, что при этом целесообразнее рассматривать закон сохранения, связанный с инвариантностью теории относительно дискретной операции типа $\psi \to \hat{G}\psi$. Тогда, по-существу, наличие подпространств $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$ эквивалентно введению в „обычном" (со знакоопределенной метрикой) гильбертовом пространстве строго сохраняющегося мультипликативного квантового числа и двух типов состояний, отвечающих его значениям ± 1.

Второй пример — уравнение Дирака-Кэлера (см. [10—17]), которое с точки зрения теории РВУ описывает частицу с набором спиновых состояний 0, 1, дополнительно вырожденных по внутренней четности. Группа внутренней симметрии его лагранжевой формулировки SU(2, 2) [16]. Это уравнение строится на основе набора представлений собственной группы Лоренца $[(0,0) \oplus (0,0)' \oplus (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2},\frac{1}{2})' \oplus (0,1) \oplus (1,0)]$, где $(0,0)$ и $(0,0)'$ — скалярное и псевдоскалярное, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})'$ — векторное и псевдовекторное представления соответственно. Спиновые блоки C^0 и C^1 матрицы γ_4, записанной в форме Гельфанда-Яглома (2), содержат ненулевые корни ± 1 с кратностью два [16]. Матрицы γ_μ приводимы к виду $\gamma_\mu = I_4 \otimes \gamma_\mu^{\mathrm{D}}$, при этом матрица билинейной формы имеет структуру $\eta = \gamma_4^{\mathrm{D}} \otimes \gamma_4^{\mathrm{D}}$. Оператор $\hat{\Pi}$ в системе покоя может быть выбран совпадающим с η, что соответствует релятивистски-инвариантному обобщению этого оператора $\hat{\Pi} = \left(\frac{p_\mu \gamma_\mu}{im}\right)\left(\frac{p_\mu \gamma'_\mu}{im}\right)$, где $\gamma'_\mu = \gamma_\mu^{\mathrm{D}} \otimes I_4$. Расчет чисел $g_{is}^{(\pm)}$ в данном случае дает $g_{1s}^{(+)} = g_{1s}^{(-)} = 1$, $g_{2s}^{(+)} = g_{2s}^{(-)} = -1$ ($s = 00,\ 10,\ 11,\ 1\text{-}1$), т.е. удовлетворяется условие (8). Квантование по Бозе-Эйнштейну осуществляется способом (23) с коммутаторами, по Ферми-Дираку — посредством соотношений (34) с антикоммутаторами. Отсутствие отрицательных вероятностей при обеих процедурах квантования обеспечивается сохранением (наряду с электрическим зарядом Q (27)) дополнительного „заряда" G вида (43).

Заметим, что при другом возможном выборе оператора $\hat{\Pi} = \gamma_4^{\mathrm{D}} \otimes I_4$ получается $g_{1s}^{(+)} = g_{2s}^{(-)} = 1$, $g_{1s}^{(-)} = g_{2s}^{(+)} = -1$, и квантование осуществляется по формулам (39), (40). Подробно этот случай, хотя и несколько с иных позиций, исследован в работе [18][4].

Возможность непротиворечивого квантования тензорного поля Дирака-Кэлера на основе статистики Ферми-Дирака является физическим обоснованием описания с его помощью дираковских частиц с группой внутренней симметрии SU(2, 2). Некомпактность группы SU(2, 2) позволяет при этом переопределить лоренцевские трансформационные свойства волновой функции ψ таким образом, что последняя может рассматриваться как волновая функция системы четырех дираковских полей (см. [13, 15, 17]).

Выбор матрицы билинейной формы для уравнения Дирака-Кэлера в виде $\eta = I_4 \otimes \gamma_4^{\mathrm{D}}$, приводящий к SU(4)-инвариантному лагранжиану теории, дает для чисел $g_{is} \equiv g_{is}^{(+)}$ значения $g_{1s} = g_{2s} = 1$. Отсюда следует, что дополнительный „заряд" G (42) совпадает в данном случае с зарядом Q, и поэтому запрета на переходы между состояниями из подпространств $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$ при квантовании по статистике Ферми-Дирака не возникает. Аналогично дираковскому полю с группой SU (2) внутренней симметрии соответствует выбор матрицы η в виде $\eta = I_2 \otimes \gamma_4^{\mathrm{D}}$, что опять дает $g_{1s} = g_{2s} = 1$ и приводит к теории с неустранимыми отрицательными вероятностями при квантовании по Бозе-Эйнштейну. Иными словами, устранение отрицательных вероятностей при квантовании по „чужой" статистике возможно только в теориях с некомпактными группами внутренней симметрии.

---

[4] В связи с этим укажем также, что процедура квантования поля Дирака-Кэлера, рассмотренная в работе [19], соответствует на самом деле квантованию четырех уравнений Дирака.

Легко видеть, наконец, что квантовое описание частиц с одним значением спина и без изоспиновых степеней свободы („стандартная" ситуация) является частным случаем развитого подхода. Операторы $\hat{\Pi}$ и $\hat{G}$ тогда — единичные операторы, числа $g_{is} = 1$, „заряд" G совпадает с электрическим зарядом Q, формула (23) воспроизводит известные перестановочные соотношения и теорему Паули о связи спина и статистики. Результаты Паули [2], о которых шла речь во введении (скалярные фермионы и бозоны со спином $\frac{1}{2}$, неустранимые отрицательные вероятности), следуют непосредственно из соотношений (34).

5. *Заключение*

В настоящей работе показано, что в теории РВУ с внутренними (изоспиновыми) степенями свободы допускается физически приемлемое квантование полуцелого спина по статистике Бозе-Эйнштейна и целого — по статистике Ферми-Дирака. Одним из важнейших следствий полученного результата является возможность геометризованного описания частиц с полуцелым спином, обладающих изоспиновыми степенями свободы, посредством набора тензорных полей, квантуемых по статистике Ферми-Дирака. Он вполне может найти применение в супергравитации, а также в теории суперструны, которая непосредственно связана с теорией высших спинов, описывающей набор спиновых состояний (см. [20]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy Soc.* **A180**, 1 (1942).
[2] W. Pauli, *Progr. Theor. Phys.* **5**, 526 (1950).
[3] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, *ЖЭТФ* **18**, 703 (1948).
[4] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца*, Физматгиз, Москва 1958.
[5] Ф. И. Федоров, *Доклады Академии наук СССР* **79**, 787 (1951).
[6] Ф. И. Федоров, *ЖЭТФ* **35**, 495 (1958).
[7] Ф. И. Федоров, *Группа Лоренца*, Наука, Москва 1979, гл. У.
[8] J. P. Crawford, A. O. Barut, *Phys. Rev.* **D27**, 2493 (1983).
[9] Y. K. Ha, *Nucl. Phys.* **B256**, 687 (1985).
[10] E. Kähler, *Rend. Mat.* **21**, 425 (1962).
[11] P. Becher, H. Joos, *Z. Phys.* **C15**, 343 (1982).
[12] W. Królikowski, *Acta Phys. Pol.* **B14**, 533 (1983).
[13] С. И. Круглов, В. И. Стражев, В Сборнике *Теоретико-групповые методы в физике*, Наука, Москва 1983, т. I.
[14] J. A. Bullinaria, *Ann. Phys. (N.Y.)* **168**, 301 (1986).
[15] В. И. Стражев, *Известия вузов СССР*, Физика № 9, 69 (1985).
[16] В. И. Стражев, В. А. Плетюхов, *Acta Phys. Pol.* **B12**, 651 (1981).
[17] В. И. Стражев, В Сборнике *Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля*, Институт физики высоких энергий, Протвино 1984, т. 2.
[18] И. А. Сатиков, В. И. Стражев, *Теоретич. математич. физика* **73**, № 1 (1987).
[19] I. M. Benn, R. W. Tucker, *Comm. Math. Phys.* **89**, 341 (1983).
[20] М. А. Васильев, Е. С. Фрадкин, *Доклады Академии наук СССР* **291**, 1100 (1986).