Vol. B2 (1971) ACTA PHYSICA POLONICA Fasc. 6

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ УНИТАРНЫХ ВЕСОВ В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ

The Method of Calculating Unitary Weights in the Theory of Multiple Particle Production

В. С. Барашенков, Х. М. Бештоев**

Объединенный институт ядерных исследований, Лаборатория ядерных реакций, Дубна*

(Поступила в редакцию 19 мая 1971)

Предложен метод расчета унитарных весов в статистической теории множественного образования частиц, более простой, чем обсуждавшиеся в литературе.

A method is given of calculating unitary weights in the statistical theory of multiple particle production. This method is considerably simpler than those given in literature.

В статистической SU_3-симметричной теории рождения элементарных частиц [1] для определения вероятностей отдельных каналов реакции необходимо знать так называемые „унитарные веса". Расчет этих весов связан с серьезными техническими трудностями. Для того, чтобы обойти эти трудности, недавно в развитие работы [2] выполнена параметризация SU_3-группы и получены интегральные выражения для вычисления унитарных весов [3]. Однако ввиду громоздкости эти выражения мало эффективны при практических вычислениях.

Ниже показано, что 8-параметрическое представление в действительности можно заменить простым 2-х параметрическим представлением для характеров неприводимого представления, что существенно упрощает расчет унитарных весов.

Метод расчета мы иллюстрируем простыми примерами, что позволяет использовать его и тем физикам, которые плохо знакомы с теорией групп.

Поскольку в группе SU_3 класс определяется двумя параметрами, то характер является лишь функцией этих вдух параметров. Для триплета характер имеет вид

$$\chi_0^1(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \chi = e^{i\alpha_1} + e^{i\alpha_2} + e^{-i(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

* Адрес: Объединенный институт ядерных исследаваний, Москва, главпочтамт, п/я 79, СССР.
** Адрес: Московский государственный университет, Москва, СССР.

Для других часто используемых в статистической теории неприводимых представлений характеры можно выразить через характер триплета:

$$\chi_0^1 \colon \chi_0^0 = 1;\ \chi_1^0 = \chi^*;$$

$$\chi_1^1 = \chi \cdot \chi^* - 1;\ \chi_0^3 = (\chi)^3 - 2\chi\chi^* + 1;$$

$$\chi_3^0 = \chi_0^{3*};\ \chi_2^2 = (\chi)^2(\chi)^{*2} - (\chi)^3 - (\chi^*)^3;$$

и т.д.

Используя далее методы, предложенные в монографии [4], определим элемент объема группы SU_3

$$dV = \frac{8}{3\pi^2} \sin^2((\alpha_1 - \alpha_2(/2) \sin^2 ((\alpha_1 + 2\alpha_2)/2) \sin^2 ((2\alpha_1 + \alpha_2)/2) d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{1}$$

Пределы интегрирования здесь следует выбирать так, чтобы

$$-\pi < \alpha_1 \leqslant \pi,\quad -\pi < \alpha_2 \leqslant \pi.$$

Проекция произведений N неприводимых представлений на представление $[p, q]$ (унитарный вес) приобретает при этом вид простого двухкратного интеграла:

$$U[p, q; p_1, q_1, \ldots, p_N, q_N] = \int \chi_q^{p*} \prod_{i=1}^{N} \chi_{qi}^{pi} dV. \tag{2}$$

Полный унитарный вес, определяющий вероятность N-частичного канала неупругой реакции,

$$[p', q'] \otimes [p'', q''] \to [p_1, q_1] \otimes [p_2, q_2] \otimes \ldots \otimes [p_N, q_N]$$

запишется теперь как

$$U \equiv U[p', q', p'', q''; p_1, q_1, \ldots, p_N, q_N]$$

$$= \sum_{p,q} \int \chi_q^{p*} \chi_{q'}^{p'} \chi_{q''}^{p''} dV \int \chi_q^{p*} \prod_{i=1}^{N} \chi_{qi}^{pi} dV \tag{3}$$

где суммирование выполняется по всем неприводимым SU_3-представлениям, на которые разлагается произведение „начальны" представлений $[p', q'] \otimes [p'', q'']$[1].

Например, в случае реакции $B_1 + B_2 \to B_1^* + B_2^* + M_1 + M_2$, когда при столкновении двух октетных барионов рождаются два барионных резонона и два октетных мезона ($8+8 \to 10+10+8+8$), первый интеграл в правой части выражения (3) имеет вид

$$U[0, 0; \ldots] = \int \chi_0^{0*} (\chi_1^1)^2 dV = 1;$$

---

[3] Формулу (3) нетрудно обобщить на реакции любого числа начальных частиц $M > 2$, надо только произведение $\chi_{q'}^{p'} \cdot \chi_{q''}^{p''}$ заменить на произведение M соответствующих характеров $\prod_{j}^{M} \chi_{q'_j}^{p'_j}$. Точно такое же соотношение имеет место для любой SU_n-группы, интегрирование в этом случае будет выполняться по $n - 1$ параметру.

аналогично вычисляются

$$U[1, 1; \ldots] = 2,\ U[3, 0; \ldots] = U[0, 3; \ldots] = 1,\ U[2, 2; \ldots] = 1.$$

Таким же образом вычисляется и второй интеграл выражения (3), представляющий собой унитарный вес в разложении конечного состояния рассматриваемой нами реакции на неприводимые представления в разложении начального состояния 8+8:

$$U_1[0, 0; \ldots] = \int \chi_0^{0*}(\chi_1^1)^2(\chi_0^3)^2 dV = 2;\ U_1[2, 2; \ldots] = 22;$$

$$U_1[1, 1; \ldots] = 12;\ U_1[3, 0; \ldots] = 12;\ U_1[0, 3; \ldots] = 10.$$

Полный унитарный вес

$$U = \sum_{p,q} U[p, q; \ldots] U_1[p, q; \ldots] = 70. \tag{4}$$

Вычисление унитарного веса U еще более упрощается, если заметить, что правую часть соотношения (3) можно заменить выражением

$$\int \chi_{q'}^{p'*} \chi_{q''}^{p''*} \prod_{i=1}^{N} \chi_{q_i}^{p_i} dV. \tag{5}$$

Это позволяет значительно сократить число интегрирований. Так в рассмотренном примере нам пришлось вычислить десять отдельных интегралов, в то же время выражение (4) позволяет обойтись всего лишь одним интегрированием:

$$\int (\chi_1^{1*}\chi_1^1\chi_0^3)^2 dV = 70.$$

Очень просто унитарный вес вычисляется также и в том случае, когда начальное состояние реакции полностью конкретизировано (например, $p+n \to 8+8+10+10$). При этом

$$U = \sum_{p,q} (k_q^p)^2 U_1[p, q; \ldots]$$

где k_q^p — табулированные коэффициенты Клебша-Гордана, выражающие начальное состояние реакции через неприводимые SU_3-ссостояния (в случае реакции $p+n \to \ldots$ это проекции состояния $p+n$ на неприводимые представления разложения 8+8); величины U_1 имеют тот же смысл, что и в формуле (4).

Если вместо (3) воспользовать выражением (5), то можно опять обойтись лишь одним интегрированием:

$$U = \int \sum_{p,q} \chi_q^{p*} (k_q^p)^2 \prod_{i=1}^{N} \chi_{q_i}^{p_i} dV. \tag{6}$$

Наиболее сложным является случай, когда полностью конкретизированы состояния частиц как в начальном, так и в конечном состояниях (например, $p+n \to 2N^* + K^+ + K^-$). Выражение для унитарного веса в этом случае получается заменой характеров в формуле (3) на диагональной функции $D_{q_i}^{p_i}$ соответствующих представлений:

$$\prod_{i=1}^{N} \chi_{q_i}^{p_i} \to n_q^p \prod_{i=1}^{N} D_{q_i}^{p_i}; \; U = \int \sum_{p,q} \chi_q^{p*} C_q^p \prod_{i=1}^{N} D_{q_i}^{p_i} d\omega. \tag{7}$$

Здесь обозначено

$$C_q^p = (n_q^p)^2 \int \chi_q^{p*} D_{q'}^{p'} D_{q''}^{p''} d\omega,$$

$$d\omega = dV \sin 2\theta \cos^2 \theta \sin 2 \varphi_1 \sin 2 \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2 d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3$$

$$0 < (\theta, \varphi_1, \varphi_2) \leqslant \pi/2; \; -\pi > (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leqslant \pi;$$

n_q^p — размерность представления $[p, q]$;
$D_{q'}^{p'}$ и $D_{q''}^{p''}$ — диагональные функции частиц в начальном состоянии (явный вид этих функций приведен, например, в работах [3]).

Величины C_q^p просто связаны с табулированными коэффициентами Клебша-Гордана:

$$C_q^p = n_q^p (k_q^p)^2.$$

Использование для расчета унитарных весов формул (5), (6) и (7) значительно упрощает вычисления.

Мы благодарны И. Т. Тодорову за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] V. S. Barashenkov, G. M. Zinovyev, *Fortschr. Phys.*, **16**, 719 (1968).
[2] F. Cerulus, *Nuovo Cimento*, **19**, 528 (1961).
[3] В. М. Мальцев и др., *Сообщения ОИЯИ* Р2-4845, Р2-4367, Р5-4352, Дубна 1969.
[4] F. D. Murnahan, *The Unitary and Rotation Groups*, Spartan Books, Washington 1962.