AXIALSYMMETRISCHE STATIONÄRE LÖSUNGEN DER PROJEKTIVEN FELDTHEORIE

Axialsymmetric Stationary Solutions of the Projective Field Theory

VON D. KRAMER

Friedrich-Schiller-Universität Jena*

(*Eingegangen am 1. Februar 1971*)

Ausgehend von einer axialsymmetrischen stationären Lösung der Einsteinschen Vakuumgleichungen $R_{\mu\nu}=0$, die das Außenfeld einer isolierten Quelle beschreibt, wird eine Klasse entsprechender Lösungen der projektiven Feldtheorie konstruiert. Dabei sind außerhalb eines endlichen Gebietes die Regularitätsbedingungen auf der Symmetrieachse erfüllt. Die Methode wird insbesondere auf die Kerr-Metrik angewandt.

Starting with an arbitrary axialsymmetric stationary solution of Einstein equations describing the exterior field of an isolated uncharged source we construct a corresponding class of such solutions of the projective field theory. Outside a finite region the regularity conditions on the axis of symmetry are satisfied. The method is applied to Kerr metric. In this paper electromagnetic fields are not investigated.

1. *Feldgleichungen*

Die Feldgleichungen der projektiven Feldtheorie (ohne elektromagnetisches Feld)

$$R_{\mu\nu} = -\frac{S_{,\mu;\nu}}{S}, \qquad S_{,\mu}{}^{;\mu} = 0 \tag{1}$$

entstehen durch Projektion aus einem fünfdimensionalen Riemannschen Raum, in dem der Ricci-Tensor verschwindet [1]. In der Raum-Zeit ist S eine skalare Feldfunktion. Die Konformtransformation

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\Phi} g_{\mu\nu}, \ S \equiv e^{2\Phi} \tag{2}$$

bewirkt eine Änderung des Ricci-Tensors

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{S^{,\mu;\nu}}{S} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{S_{,\lambda}{}^{;\lambda}}{S} - 6\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu}, \tag{3}$$

wobei $\bar{R}_{\mu\nu}$ mit der Metrik $\bar{g}_{\mu\nu}$ gebildet ist und die Operationen auf der rechten Seite mit $g_{\mu\nu}$ auszuführen sind. Das Problem (1) ist damit vollständig auf die Feldgleichungen

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -6\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu} \tag{4}$$

zurückgeführt, die in der Einsteinschen Theorie gerade die Ankopplung eines reellen, skalaren, masselosen Feldes beschreiben, wenn man $\bar{g}_{\mu\nu}$ als Raum-Zeit-Metrik auffaßt.

* Adresse des Ferfassers: Friedrich-Schiller-Universität Jena, Sektion Physik, DDR-69 Jena, Max-Wien-Platz 1.

2. *Axialsymmetrie und Stationarität*

Wir setzen die Existenz einer Abelschen Bewegungsgruppe G_2 mit den beiden Killingvektoren ξ^μ (zeitartig, Stationarität) und η^μ (raumartig, Axialsymmetrie) voraus,

$$\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}=0=\eta_{\mu;\nu}+\eta_{\nu;\mu}, \qquad \xi^\mu\eta^\nu_{;\mu}-\eta^\mu\xi^\nu_{;\mu}=0. \tag{5}$$

Auch die Lie-Ableitung des skalaren Feldes S in Richtung von ξ^μ und η^μ soll verschwinden,

$$S_{,\mu}\xi^\mu=0=S_{,\mu}\eta^\mu. \tag{6}$$

Die anschauliche Vorstellung von der Axialsymmetrie führt ferner zu der Aussage, daß die Feldlinien an η^μ geschlossene Kurven (Kreise) um die Symmetrieachse sind.

Unter diesen Voraussetzungen und auf Grund der Feldgleichungen (1) ist das Linienelement zerlegbar [2]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{AB}(x^C)dx^A dx^B+g_{\alpha\beta}(x^C)dx^\alpha dx^\beta \\ \xi^\mu &= \delta^\mu_4,\ \eta^\mu=\delta^\mu_3 \qquad A, B, \ldots = 1, 2 \\ & \qquad\qquad\qquad\quad \alpha, \beta, \ldots = 3, 4. \end{aligned} \tag{7}$$

Wenn außerhalb eines endlichen Gebietes überall — insbesondere auch auf der Symmetrieachse — die Feldgleichungen (1) erfüllt sind, kann also stets diese vereinfachte Form der Metrik erreicht werden: Die Außenfelder isolierter Quellen sind durch (7) darstellbar. Wegen (6) überträgt sich die Zerlegbarkeit auf die gemäß (2) konform transformierte Metrik $\bar{g}_{\mu\nu}$, auf die sich die folgenden Betrachtungen beziehen. Wir legen deshalb das Linienelement[1]

$$d\bar{s}^2=e^{-2U}(\gamma_{AB}dx^A dx^B+W^2 dx^{3^2})-e^{2U}(dx^4+a\,dx^3)^2 \tag{8}$$

zugrunde, das (bis auf Umbenennungen) mit (7) identisch ist. Die Feldgleichungen reduzieren sich auf Beziehungen im Riemannschen Raum V_2 mit der Metrik γ_{AB}. Nach Einführung einer komplexen skalaren Funktion f, die in kovarianter Weise durch

$$f_{,\nu}=-(\xi_\mu\xi^\mu)_{,\nu}+i\varepsilon_{\nu\mu\varrho\sigma}\xi^\mu\xi^{\varrho;\sigma} \tag{9}$$

definiert ist [3], erhalten wir aus (4) das Gleichungssystem[2]

$$W_{,A}{}^{;A}=0 \tag{10}$$

$$-\Gamma\gamma_{AB}+\frac{W_{,A;B}}{W}=-\frac{f_{,A}f^*_{,B}+f_{,B}f^*_{,A}}{(f+f^*)^2}-6\Phi_{,A}\Phi_{,B} \tag{11}$$

$$\frac{1}{W}(Wf_{,A})^{;A}=\frac{2f_{,A}f^{,A}}{f+f^*} \tag{12}$$

$$\frac{1}{W}(W\Phi_{,A})^{;A}=0. \tag{13}$$

---

[1] γ_{AB}, e^{2U}, W, a hängen nur von x^A ab.

[2] Γ ist die Krümmung von V_2. *Bildung des Konjugiertkomplexen.

Wagen (10) kann man mit einer Koordinatentransformation in V_2 immer gleichzeitig

$$\gamma_{AB} = e^{2k}\delta_{AB}, \qquad W = x^1 \tag{14}$$

erreichen. Da der Konformfaktor e^{2k} in (12) und (13) nicht eingeht, ist damit eine Entkopplung dieser Gleichungen von (11) bewirkt. Zu jeder Lösung des Systems[3]

$$\Delta f = \frac{2f_{,A}f_{,A}}{f+f^*}, \qquad \Delta\Phi = 0 \tag{15}$$

sind dann das zugehörige k durch ein Linienintegral aus

$$k_{,z} = x^1 \left[\frac{f_{,z}f^*_{,z}}{(f+f^*)^2} + 3(\Phi_{,z})^2\right], \qquad z = x^1 + ix^2 \tag{16}$$

und die Funktion a im Linienelement (8) aus

$$a_{,z} = -2x^1 \cdot \frac{f_{,z} - f^*_{,z}}{(f+f^*)^2} \tag{17}$$

bestimmbar, wobei die Integrabilitätsbedingungen wegen (15) automatisch erfüllt sind. Durch f und Φ ist die gesamte Lösung bereits eindeutig festgelegt. Wir brauchen uns nur auf das System (15) zu konzentrieren. Zu den Gleichungen für das analoge Problem bei verschwindendem Φ-Feld [4] kommt noch die Potentialgleichung $\Delta\Phi = 0$ hinzu, die aber vollständig entkoppelt ist und deren Lösung deshalb unabhängig von f beliebig gewählt werden kann. Natürlich beeinflußt Φ den Konformfaktor e^{2k}; darin äußert sich die Nichtlinearität der Gleichungen.

Zu jeder stationären axialsymmetrischen Vakuummetrik kann man auf diese Weise eine große Klasse von Lösungen der projektiven Feldtheorie konstruieren. Man braucht nur mit einer *beliebigen* Lösung von $\Delta\Phi = 0$ den additiven Zusatz zu k gegenüber der entsprechenden Vakuummetrik ($\Phi = 0$, Index 0) aus (16) zu berechnen,

$$k = k_0 + \chi$$
$$\chi_{,z} = 3x^1(\Phi_{,z})^2, \tag{18}$$

und anschließend die Konformtransformation (2) wieder rückgängig zu machen.

3. *Regularitätsbedingung auf der Symmetrieachse*

An jedem Punkt der Symmetrieachse außerhalb eines endlichen Bereiches soll die Metrik (8) regulär sein; es existiert also ein Minkowskischer Tangentialraum. Wenn lokal euklidische Verhältnisse vorliegen, muß der Quotient aus Umfang und Radius eines Kreises (x^1, x^2, x^4 = const) um die Symmetrieachse im Limes $x^1 \to 0$ den Wert 2π haben.[4] So

---

[3] $\Delta f \equiv \frac{1}{x^1}(x^1 f_{,A})_{,A}$.

[4] Die Koordinate x^1 ist dem Abstand von der Achse zugeordnet.

ergibt sich die Regularitätsbedingung auf der Achse [5]:

$$\lim_{x^1 \to 0} \left[\frac{1}{x^1} e^{U-k} (e^{-2U} W^2 - e^{2U} a^2)^{\frac{1}{2}} \right] = 1. \tag{19}$$

Für statische Metriken ($a = 0$) vereinfacht sich dieses Kriterium zu

$$\lim_{x^1 \to 0} k = 0. \tag{20}$$

Wir können aus (19) zwei Folgerungen ablesen:

1. Wenn sich eine Lösung auf der Achse regulär verhält, so gilt dies auch noch nach einer Konformtransformation (2).

2. Wenn die Grundmetrik ($\Phi = 0$) auf der Achse regulär ist, so erfüllt auch jede gemäß (18) daraus gewonnene Lösung die Bedingung (19), sofern

$$\lim_{x^1 \to 0} \chi = 0 \tag{21}$$

gilt. Das entspricht der Forderung (20) in der Weylschen Klasse und ist daher in vielfältiger Weise realisierbar.

Zu einer bestimmten Lösung der Einsteinschen Vakuumfeldgleichungen (etwa der Kerr-Lössung) läßt sich eine Klasse von Lösungen der projektiven Feldtheorie explizit angeben, die asymptotisch flach und auf der Achse regulär sind und für $\Phi = 0$ in die betreffende Vakuumlösung der Einsteinschen Theorie übergehen. Für eine eindeutige Zuordnung ergeben sich aus der alleinigen Betrachtung der Feldgleichungen für den Außenraum einer Quelle keine Hinweise. Die große Mannigfaltigkeit von Lösungen kann natürlich durch die zusätzliche Forderung der Kugelsymmetrie eingeschränkt werden.

4. *Kugelsymmetrische Lösung*

Aus der Schwarzschild-Lösung erhalten wir die statische kugelsymmetrische Lösung in der projektiven Feldtheorie in einer sehr übersichtlichen Form [3]

$$\begin{aligned} ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-A-B} dr^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1-A-B} r^2 d\Omega^2 - \\ - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{A-B} dt^2 \end{aligned} \tag{22}$$

$$2\Phi = B \log \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \qquad A^2 + 3B^2 = 1, \qquad A, B = \mathrm{const},$$

die einen besseren Vergleich mit der Schwarzschild-Metrik ($B = 0$) gestattet als die implizite Form, in der man dieses Linienelement in der Literatur [1], [6] findet.

5. *Verallgemeinerte Kerr-Lösung*

Die Kerr-Lösung beschreibt das Außenfeld einer stationär rotierenden inselförmigen Massenverteilung. Wir geben diese Metrik in einer besonders einfachen Form an, wobei wir (7) zugrunde legen:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + l^2\cos^2\vartheta}\right)^{-1}\left[(r^2 + l^2\cos^2\vartheta - 2mr)\left(d\vartheta^3 + \frac{dr^2}{r^2 + l^2 - 2mr}\right) + \right.$$
$$\left. + (r^2 + l^2 - 2mr)\sin^2\vartheta d\varphi^2\right] - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + l^2\cos^2\vartheta}\right)\left(dt + \frac{2mlr\sin^2\vartheta}{r^2 - 2mr + l^2\cos^2\vartheta}d\varphi\right)^2. \tag{23}$$

Für $l = 0$ geht (23) in die Schwarzschild-Lösung über. Der Übergang zu (14) wird durch

$$x^1 = \sqrt{r^2 + l^2 - 2mr}\sin\vartheta \tag{24}$$
$$x^2 = (r - m)\cos\vartheta$$

bewirkt; denn damit ergibt sich

$$dx^{1^2} + dx^{2^2} = [(l^2 - m^2)\cos^2\vartheta + (r - m)^2]\left(d\vartheta^2 + \frac{dr^2}{r^2 + l^2 - 2mr}\right), \tag{25}$$

woraus der Konformfaktor e^{2k} zu entnehmen ist. Wir geben zwei Beispiele für eine mögliche Erweiterung der Kerr-Metrik an, wobei wir die hinzukommenden Funktionen Φ und χ durch die Koordinaten x^1, x^2 ausdrücken:

1. $$\Phi = \frac{C}{\sqrt{x^{1^2} + x^{2^2}}}, \quad \chi = -\frac{3}{2}\frac{C^2 x^{1^2}}{(x^{1^2} + x^{2^2})^2}; \tag{26}$$

2. $$\Phi = C\log\frac{r_1 + r_2 - 2m}{r_1 + r_2 + 2m}, \quad \chi = 6C^2\log\frac{(r_1 + r_2)^2 - 4m^2}{4r_1 r_2},$$
$$r_1 = \sqrt{x^{1^2} + (x^2 - m)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^{1^2} + (x^2 + m)^2}. \tag{27}$$

Die Bedingung (21) ist in beiden Fällen erfüllt. Daß man aus den Lösungen der Weylschen Klasse axialsymmetrische *statische* Lösungen mit skalarem, masselosem Feld gewinnen kann, ist in [7], [8] gezeigt worden. Ebenfalls für statische, aber nicht notwendig auch axialsymmetrische Metriken findet Buchdahl [9] die spezielle Zuordnungsvorschrift $\Phi = CU$. Wir haben eine Methode zur Konstruktion von Lösungen angegeben, die auch auf *stationäre* Lösungen anwendbar ist.

LITERATUR

[1] E. Schmutzer, *Relativistische Physik (klassische Theorie)*, Leipzig 1968.
[2] W. Kundt, M. Trümper, *Z. Phys.*, **192**, 419 (1966).
[3] D. Kramer, *Habilitationsschrift*, Jena 1969.
[4] D. Kramer, G. Neugebauer, *Commun. Math. Phys.*, **10**, 132 (1968).
[5] M. Trümper, *Z. Naturforsch.*, **22a**, 1347 (1967).
[6] P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig 1955.
[7] R. Penney, *Phys. Rev.*, **174**, 5 (1968).
[8] R. Gautreau, *Nuovo Cimento*, **62B**, 360 (1969).
[9] H. A. Buchdahl, *Phys. Rev.*, **115**, 1325 (1959).