SUR L'ORDRE DE CROISSANCE DES AMPLITUDES DE DISPERSION DANS LA THEORIE LOCALE DES CHAMPS QUANTIFIÉS (II)

On the Rate of Increase of the Dispersion Amplitudes in the Local Theory of Quantized Fields (II)

By Trân hữ'u Phát

Université de Hanoi*

(Reçu le 21 Avril 1970)

Dans cet article, nous démontrons qu'il est possible d'obtenir les théorèmes de Greenberg et Low, de Froissart, etc... dans une théorie des champs quantifiés, où le principe de causalité peut être modifié. Cela signifie que la vérifaction expérimentale de ces théorèmes peut ne nous donner au cune information sur la validité des principes fondamentaux à hautes énergies.

1

Nous avons su que la vérification expérimentale de la validité des principes fondamentaux de la théorie des champs quantifiés, en particulier, de la validité du principe de causalité joue un rôle important dans la physique à hautes énergies. La recherche des relations qui sont des critères pour vérifier ces principes est très intéressante. A l'heure actuelle, on considère comme des critères la relation de Pameranchuk [1, 2] et ses généralisations [3, 4, 5].

Sous une forme alternative, le principe de causalité signifie que l'amplitude de dispersion est une fonction analytique de la variable d'énergie complexe, elle a en outre l'ordre de croissance polinominal.

Il existe ainsi deux possibilités de modification du principe de causalité:

1) L'amplitude de dispersion est encore une fonction analytique mais elle a l'ordre de croissance qui est supérieur à l'ordre de croissance polinominale, c'est-à-dire:

$$|f(z)| > Ae^{\alpha|z|^\beta} \text{ quand } z \to \infty.$$

Ce cas a eté étudié par Logunov [6].

2) L'amplitude de dispersion n'est pas une fonction analytique, par conséquent sa partie réelle $u(x, y)$ et sa partie imaginaire $v(x, y)$ vérifient l'équation suivante encore plus compliquée que celle de Cauchy-Riemann:

$$u_x = g(v_y, v, u) \qquad u_y = h(v_x, u, v).$$

* Adresse: Université de Hanoi, Hanoi, Viet-Nam.

Si nous supposons que g et h sont deux fonctions linéaires de leurs arguments, le cas qui précède est la combinaison de deux cas:

A — $u(x, y)$ et $v(x, y)$ vérifient l'équation:

$$u_x = \frac{1}{p(\alpha, y)} v_y \qquad u_y = -\frac{1}{p(x, y)} v_x$$

B — $u(x, y)$ et $v(x, y)$ vérifient l'équation

$$\partial_{\bar{z}} f + A(z) f + B(z) \bar{f} = 0.$$

Dans le travail [7] nous avons étudié le cas A et nous avons démontré qu'il est possible d'obtenir les relations asymptotiques du type de Paméranchuk.

Nous étudions maintenant le cas B, pour simplifier, nous supposons que $B(z) \equiv 0$ et $A(z)$ est une fonction pour que l'intégral $\iint\limits_E \frac{A(\zeta)}{z-\zeta} d\xi d\eta$ soit convergent, où E est le demi-plan $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$. Nous avons alors la formule de Theororescu [8]:

$$f(z) = e^{\frac{1}{\pi}\iint \frac{A}{\zeta - z} d\xi d\eta} W(z) = e^{\omega(z)} W(z) \tag{1.1}$$

où $W(z)$ est une fonction analytique de z.

Utilisant (1.1) nous pouvons retrouver aisément les résultats du travail [7].

En se basant sur les principes fonamentaux de la théorie des champs quantifiés, Lehman [9] a démontré que l'amplitude de dispersion $T(s, t)$ est une fonction analytique de t dans l'ellipse Lehman.

Dans cet article, en supposant que $T(s, t)$ est une fonction analytique généralisée du type (1.1) de la variable t nous allons étudier l'ordre de croissance des amplitudes de dispersion et la forme des sections des processus de dispersion. Nous allons démontrer qu'il est possible d'obtenir les théorèmes importants de Greenberg et Low, de Froissart, etc...

2

En se basant sur l'analyticité des amplitudes de dispersion, Greenberg et Low [10] ont démontré le théorème suivant:

Supposant que l'on a

$$|T(s, t)| < Be^{\alpha s^N} \tag{2.1}$$

quant $s \to \infty$ sur l'axe réel et t appartient à l'ellipse de Lehman. On en déduit que

$$|T|s, 0)| \leqslant \text{const.}\, s^{N+2} \tag{2.2a}$$

et

$$|T(s, t)| \leqslant \text{const.}\, s^{N+2} \tag{2.2b}$$

avec $t < 0$.

Nous montrons qu'il est possible d'obtenir ce théorème en supposant que l'amplitude de dispersion est une fonction analytique généralisée du type (1.1) de la variable t dans l'ellipse de Lehman quand l'énergie est fixe. Alors $T(s, t)$ est une fonction analytique généralisée de deux variables s et t.

Nous étudions le processus de dispersion élastique des particules ayant les masses m et M respectivement.

Quand $s > (m+M)^2$, l'ellipse de Lehman a comme centre le point $t_0 = -2k^2$ et ses demi-axes sont x_0 et $\sqrt{x_0^2+k^2}$ où:

$$k^2 = \frac{[s^2-(M+m)^2]\,[s-(M-m)^2]}{4s}$$

est le carré de l'impulsion dans le système du centre des masses et

$$x_0 = 2k\left[k^2 + \frac{(m_1^2-m^2)\,(m_2^2-M^2)}{s-(m_1-m_2)^2}\right]^{1/2}$$

avec m_i $(i = 1, 2)$ étaient les masses des états multicorpusculaires avec ses énergies les plus basses.

La formule généralisée de Cauchy nous donne:

$$T(s, t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{T(s, t')}{(t', t)}\,dt'$$

où ∂D est l'ellipse avec le petit demi-axe

$$c = k\left[\frac{(m_1^2-m^2)\,(m_2^2-M^2)}{s^2-(m_1^2-m_2^2)^2}\right]^{1/2}$$

et le grand demi-axe $a = \sqrt{c^2+4k^2}$.

En utilisant

$$\frac{1}{(t', t)} = \frac{1}{e^{\omega(t)}\,(t'-t)} = e^{-\omega(t)}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,P_l(t)Q_l(t') \tag{2.3}$$

nous obtenons

$$T(s, t) = \frac{1}{\pi^2}\,\frac{s}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)a_l(s)P_l\left(1+\frac{t}{2k^2}\right)e^{\omega(t)}$$

où

$$a_l(s) = \frac{1}{2\pi^3 i}\int\limits_{\partial D} T(s, t')\,e^{-\omega(t')}Q_l\left(1+\frac{t'}{2k^2}\right)dt'. \tag{2.4}$$

Nous en déduisons que

$$|a_l(s)| \leqslant \frac{1}{\pi^{5/2}}\,\frac{A}{\sqrt{l}}\,\frac{e^{asN}}{[c+\sqrt{1+c^2}]}.$$

D'autre part, la condition unitaire nous donne

$$0 \leqslant |a_l(s)| \leqslant \operatorname{Im} a_l(s) \leqslant 1.$$

Fixant s, choisissons l_0 comme le nombre entier le plus grand, ne dépassant pas la grandeur

$$\frac{as^N}{\ln [c+\sqrt{1+c^2}]} \cdot$$

Nous avons alors l'inégalité suivante

$$|T(s, 0)| \leqslant \text{const.}\, s^{N+2}$$

et l'inégalité analogue pour $t < 0$.

Enfin, en se basant sur le résultat obtenu, l'inégalité (2.1) est déplacé par (2.2) et appliquant encore une fois ce théorème, nous avons

$$|T(s, 0)| \leqslant \text{const.}\, s^2 \ln^2 s \tag{2.5a}$$

$$|T(s, t)| \leqslant \text{const.}\, \frac{s^{7/4}(\ln s)^{3/2}}{|t|^{1/4}} \quad \text{pour } t < 0 \tag{2.5b}$$

et par conséquent

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leqslant \text{const.}\, s \ln^2 s \tag{2.6a}$$

$$\frac{d\sigma(s, t)}{dt} \leqslant \text{const.}\, \frac{s^{3/2} \ln^3 s}{|t|^{1/2}} \quad \text{pour } t < 0. \tag{2.6b}$$

Nous voyons que la méthode de démonstration est totalement analogue à celle du travail de Greenberg et Low, il n'existe qu'une petite modification dans les formules (2.3) et (2.4).

Le théorème généralisé de Phragmen-Lindelof nous donne l'inégalité (2.2) quand s est complexe.

3

En nous basant sur les résultats de Vékua [11] nous pouvons obtenir le théorème suivant de Froissart [12].

Supposant que les demi-axes de l'ellipse Lehman dans le plan t ne varient pas quand l'énergie croit, nous avons alors les inégalités suivantes:

$$|T(s, 0)| \leqslant \text{const.}\, s\, (\ln s)^2 \tag{3.1a}$$

$$|T(s, t)| \leqslant \text{const.}\, \frac{s\, (\ln s)^{3/2}}{|t|^{1/4}}\,;\, t < 0 \tag{3.1b}$$

et par conséquent

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leqslant \text{const.}\, (\ln s)^2 \tag{3.2a}$$

$$\frac{d\sigma(s, t)}{dt} \leqslant \text{const.}\, \frac{(\ln s)^2}{|t|^2} \quad \text{pour } t < 0. \tag{3.2b}$$

La méthode de démonstration de ce théorème est analogue à celle de Logunov [13].

A part de ce théorème, nous obtenons aussi aisément les résultats de Kinoshita, Loeffel et Martin [14]:

$$|T(s, t)| \leqslant \text{const.} \frac{s (\ln s)^{3/4}}{|t|} \quad \text{pour } t < 0 \tag{3.4}$$

d'où:

$$\frac{d\sigma(s, t)}{dt} \leqslant \text{const.} \frac{(\ln s)^3}{t^2} \quad \text{pour} < 0 \tag{3.5}$$

avec t étant fixe.

4

Nous pouvons trouver que la partie imaginaire Im $T(s, t)$ de l'amplitude $T(s, t)$ verifie aussi l'inegalité suivante:

$$|\text{Im } T(s, t)| \leqslant \text{const. } s^2 \quad \text{quand } s \to \infty \tag{4.1}$$

avec toute valeur de $\mathfrak{z} = 1 + \frac{t}{2k^2}$ appartenant à $\bar{D}$.

En effect, réalisant la transformation conforme

$$W = \mathfrak{z} + \sqrt{\mathfrak{z}^2 - 1}$$

l'ellipse D se transforme en 'anneau, ayant comme centre le point $W = 0$, le rayon interne $R = 1$ et le rayon externe

$$R = \mathfrak{z}_0 + \sqrt{\mathfrak{z}_0^2 - 1}.$$

Posant $g(s, w) = \text{Im } f(s, \mathfrak{z}) = \text{Im } T(s, t)$, nous pouvons trouver aisément que $g(s, w)$ est aussi une fonction analytique généralisée de W. D'autre part, nous avons aussi un théorème analogue au théorème d'Hadamard, nous l'appelons le théorème generalisé d'Hadamard.

Appliquant ce théorème et repetant totalement la démonstration de Logunov pour $g(s, w)$ nous obtenons l'inegalité:

$$|\text{Im } T(s, t)| \leqslant \text{const. } s^2$$

avec toutes valeurs complexes de $\mathfrak{z} = 1 + \frac{t}{2k^2}$ appartenant à l'éllipse D de Lehman.

Enfin, en utilisant les raisonnements analogues, il est possible d'obtenir aussi les résultats de [13] sur la forme de pic de diffraction des processus élastiques et sur la forme des sections de dispersion inélastique.

5. *Conclusion*

Les résultats qui précedent montrent que les relations sur l'ordre de croissance des amplitudes de même que les relations asymptotiques entre les sections ne sont pas dignes de foisi on les emploie comme critères pour vérifier la validité du principe de causalité à hautes énergies. Ces relations ne peuvent donner aucune information sur la validité de ce principe.

Enfin l'auteur remercie profondément le Professeur Tạ quang Bữu pour ses fructueuses observations, et le Dr Nguyễn hoàng Phu'o'ng pour ses utiles discussions.

APPENDICE

Théorème generalisé d'Hadamard

Supposant que la fonction $f(\mathfrak{z})$ est analytique generalisée dans l'anneau A:

$$A : r_1 \leqslant |\mathfrak{z}| \leqslant r_2.$$

Alors avec $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ nous avons l'inegalité suivante:

$$\log M(r) \leqslant \log M(r_1) \frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_1}{r_2}} + \log M(r_2) \frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}}$$

où $M(r) = \max\limits_{|\mathfrak{z}| = r} |f(\mathfrak{z})|$

Demonstration

Si le nombre α est different à un nombre entier, la fonction

$$\varphi(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^\alpha f(\mathfrak{z})$$

est multivalent à chaque point dans A. Cependant, chaque valeur determinée de $\varphi(\mathfrak{z})$ est analytique dans la voisinage d'un point arbitraire dans A. Par conséquent, $\varphi(\mathfrak{z})$ est continue dans A et en tenant compte du principe de module maximum de Vekua [11] elle gagne la valeur maximum sur l'un cercles $(\mathfrak{z}) = r_1$ et $|\mathfrak{z}| = r_2$.

Pour un nombre positif r: $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, nous avons

$$r^\alpha M(r) \leqslant \max\,[r_1^\alpha M(r_1), r_2^\alpha M(r_2)].$$

Choisissons maintenant α pour que l'on a

$$r_1^\alpha M(r_1) = r_2^\alpha M(r_2)$$

d'où

$$\alpha = \frac{\log \frac{M(r_2)}{M(r_1)}}{\log \frac{r_1}{r_2}}$$

et par conséquent

$$\log M(r) \leqslant \log M(r_1) \frac{\log \frac{r}{r_2}}{\log \frac{r_1}{r_2}} + \log M(r_2) \frac{\log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}}.$$

REFERENCES

[1] Ia. Pameranchuk, *JETP*, **34**, 725 (1958).
[2] N. N. Meiman, *JETP*, **43**, 2277 (1962).
[3] A. A. Logunov *et al.*, *Les résultats des Sciences physiques*. T. 88, Fasc. 1, 1966.
[4] R. M. Mouradian, *Proceedings of the International Seminar on Elementary Particle Theory*, Varna, Bulgaria 1968.
[5] Nguyễn ngọc Thuần, *Ukrayin Fiz. Zh.* (USSR), **11**, 1769 (1968).
[6] A. A. Logunov *et al.*, *Preprint P 2873*, Dubna.
[7] Trân hữu Phát, *Sur la valeur des théorèmes asymptotiques dans la théorie des champs quantifiés*, *Acta Phys. Polon.* **B1**, 331 (1970).
[8] N. Theororescu, *Ann. Roumains Math.* Cahier 3, Bucarest 1936.
[9] H. Lehman, *Nuovo Cimento*, **10**, 579 (1958).
[10] O. W. Greenberg F. E. Low, *Phys. Rev.*, **124**, 2047 (1961).
[11] I. N. Vekua, *Les fonctions analytiques généralisées*. Moscou 1959 (en russe).
[12] M. Froissart, *Phys. Rev.*, **123**, 1053 (1961).
[13] A. A. Logunov, *Proceedings of the International Seminar on Elementary Particle Theory*, Varna, Bulgaria 1968.
[14] T. Kinophita, J. J. Loeffel A. Martin, *Phys. Rev. Letters*, **10**, 460 (1963).