Vol. B20 (1989) ACTA PHYSICA POLONICA No 8

ОБЩЕКОВАРИАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПСЕВДОТЕНЗОРА ЕНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

М. Н. Тентюков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна*

THE GENERALLY COVARIANT REPRESENTATION OF ENERGY-MOMENTUM PSEUDOTENSOR OF THE GRAVITATIONAL FIELD

By M. N. Tentyukov

(Received January 2, 1989)

Some known energy-momentum pseudotensors of the gravitational field are considered. On the manifold with the background affine connection these pseudotensors are tensor functionals of the background connection. Some properties of these functionals are analysed.

PACS numbers: 04.02.Fy

Как показано в работах [1, 2], определение импульсно-энергетических локальных характеристик гравитационного поля требует введения фоновой связности. Для определения энергии гравитационного поля был предложен ряд псевдотензорных объектов. С помощью фоновой связности удается найти их тензорные представления. Для псевдотензора Папапетру это было сделано в работе [1], для псевдотензора Эйнштейна — в работах [2, 3], а для псевдотензора Ландау - Лифшица — в работах [4, 5].

Рассмотрим лагранжиан общего вида

$$L = L(g_{mn}; \partial_k g_{mn}; \check{\Gamma}^k_{mn}), \tag{1}$$

где g_{mn} — гравитационное поле; $\check{\Gamma}^k_{mn}$ — фоновая связность. Считаем, что кручение отсутствует, то есть $\check{\Gamma}^k_{mn} = \check{\Gamma}^k_{nm}$. Величина L представляет собой скалярную плотность веса $+1$.

Для действия

$$S = \int L d^4 x \tag{2}$$

* Address: Joint Institute for Nuclear Research, Laboratory of Theoretical Physics, 141980 Dubna, USSR.

при помощи вариационного метода можно показать [3], что лагранжиан (1) имеет вид

$$L = L(g_{mn};\, P^k_{mn}), \tag{3}$$

где $P^k_{mn} = \check{\Gamma}^k_{mn} - \Gamma^k_{mn}$ — тензор аффинной деформации, Γ^k_{mn} — кристоффели для g_{mn}. Обозначим через $\check{\nabla}_k$ ковариантную производную по отношению к $\check{\Gamma}^k_{mn}$, а через ∇_k — ковариантную производную относительно Γ^k_{mn}.

Определим следующие величины:

$$t^k_a = \frac{\partial L}{\partial g_{mn,k}} \check{\nabla}_a g_{mn} - L\delta^k_a; \tag{4}$$

$$\sigma^{jk}_a = \frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}} (g_{ma}\delta^k_n + g_{an}\delta^k_m); \tag{5}$$

$$\Psi^{mn} = 2\,\frac{\delta S}{\delta g_{mn}}\,; \tag{6}$$

$$\Theta^{mn}_k = \frac{\delta S}{\delta \check{\Gamma}^k_{mn}}\,; \tag{7}$$

где

$$\frac{\delta S}{\delta g_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial g_{mn}} - \partial_j \frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}}; \qquad \frac{\delta S}{\delta \check{\Gamma}^k_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial \check{\Gamma}^k_{mn}}$$

обычные эйлеровы производные, запятая перед индексом означает частную производную. Все введенные величины представляют собой тензорные плотности веса +1. $(1/\sqrt{-g})t^k_a$ имеет смысл канонического тензора энергии-импульса; величина $(1/\sqrt{-g})\Theta^{mn}_k$ впервые была введена в работе [1] и названа там тензором праэнергии гравитационного поля. При помощи вариационного метода можно доказать ряд тождеств [3]. В частности,

$$t^k_a + \check{\nabla}_j \sigma^{jk}_a + \Psi^{km} g_{ma} = 0, \tag{8}$$

$$-\check{\nabla}_k t^k_a = \Theta^{mn}_k \check{R}^k_{amn} + (1/2)\sigma^{mn}_k \check{R}^k_{mna} + (1/2)\Psi^{mn}\check{\nabla}_a g_{mn}, \tag{9}$$

где

$$\check{R}^k_{amn} = \partial_a \check{\Gamma}^k_{mn} - \partial_m \check{\Gamma}^k_{an} + \check{\Gamma}^k_{as}\check{\Gamma}^s_{mn} - \check{\Gamma}^k_{ms}\check{\Gamma}^s_{an}$$

— тензор кривизны фоновой связности.

Выбирая лагранжиан в виде

$$L = \sqrt{-g}\, g^{mn}(P^a_{mb}P^b_{an} - P^a_{sa}P^s_{mn}), \tag{10}$$

находим

$$\Theta^{pk}_m = \check{\nabla}_s[\sqrt{-g}\,(g^{k[p}\delta^{s]}_m + g^{p[k}\delta^{s]}_m)],\qquad (11)$$

$$\Psi^{mk} = \sqrt{-g}\;g^{ma}g^{kb}(\check{R}_{ab}+\check{R}_{ba}-\check{R}_{ij}g^{ij}g_{ab}-2G_{ab}),\qquad (12)$$

где $\check{R}_{ab} = \check{R}^p_{pab}$ — тензор Риччи фоновой связности, $G_{ab} = R_{ab}-(1/2)Rg_{ab}$ — тензор Эйнштейна.

Можно показать [4], что

$$\sigma^{pk}_m = (g_{am}/\sqrt{-g})\check{\nabla}_s U^{sapk} - 2\check{\nabla}_s(\sqrt{-g}\;g^{k[p}\delta^{s]}_m).\qquad (13)$$

Здесь

$$U^{sapk} = (-g)(g^{sp}g^{ak}-g^{sk}g^{ap}).\qquad (14)$$

Подставляя (13) в (8), получаем

$$-(t^k_m+\Psi^{ka}g_{am}) = \check{\nabla}_p\left(\frac{g_{am}}{\sqrt{-g}}\check{\nabla}_s U^{sapk}\right) - 2\check{\nabla}_p\check{\nabla}_s(\sqrt{-g}\;g^{k[p}\delta^{s]}_m).\qquad (15)$$

Если $\check{R}_{mn} = 0$, то, согласно (12),

$$\Psi^{mk} = -2\sqrt{-g}\;G^{mk},\qquad (16)$$

т.е. уравнения для гравитационного поля совпадают с уравнениями Эйнштейна.

Пусть $\check{R}^a_{kln} = 0$. Тогда (15) примет вид

$$-\sqrt{-g}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}t^k_m - 2G^k_m\right) = \check{\nabla}_p\left(\frac{g_{am}}{\sqrt{-g}}\check{\nabla}_s U^{sapk}\right).$$

Следовательно, если фоновая связность примитивна [6], то есть $\check{R}^a_{kpn} = 0$, то в координатной карте, для которой $\check{\Gamma}^k_{mn} = 0$, имеем

$$\sqrt{-g}\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}t^k_m - 2G^k_m\right) = \partial_p\left\{\frac{g_{am}}{\sqrt{-g}}\partial_s[(-g)\,(g^{pa}g^{ks}-g^{sp}g^{ka})]\right\}.$$

Справа стоит производная известного суперпотенциала Эйнштейна. Таким образом, (15) является ковариантным обобщением разбиения тензора G^k_m, обычно используемого в псевдотензорном подходе для определения псевдотензора Эйнштейна.

Поднимая нижний индекс в (8) с помощью $\sqrt{-g}\,g^{am}$, получаем

$$\sqrt{-g}\;t^{km}_{\cdot}+\sqrt{-g}\;\Psi^{km}+\check{\nabla}_j(\sigma^{jk}_a\sqrt{-g}\;g^{ma})-\sigma^{jk}_a\check{\nabla}_j(\sqrt{-g}\;g^{ma}) = 0.\qquad (17)$$

Выражение (17) с учетом (13) после ряда тождественных преобразований приводится к виду

$$\sqrt{-g}\;\Psi^{mk}+U^{mk}-K^{mk}+\tau^{mk} = 0,\qquad (18)$$

где

$$U^{mk} = \check{\nabla}_a \check{\nabla}_b U^{mbka},$$

$$\tau^{mk} = \sqrt{-g}\, t^m_a g^{ak} - (g_{at}/\sqrt{-g})\,(\check{\nabla}_s U^{stpm})\check{\nabla}_p(\sqrt{-g}\, g^{ka}), \tag{19}$$

$$K^{mk} = \sqrt{-g}\, g^{am}\check{\nabla}_p\check{\nabla}_s(2\sqrt{-g}\, g^{k[p}\delta^{s]}_a). \tag{20}$$

τ^{mk} симметричен по верхним индексам и является ковариантным обобщением псевдотензора Ландау - Лифшица [4].

Вводя фоновую метрику $\check{g}_{ik}$ и полагая коэффициенты фоновой связности равными кристоффелям для $\check{g}_{ik}$, определим следующие величины:

$$\Theta^{mn} = \sqrt{-\check{g}}\,\theta^{mn} = -2\,\frac{\delta S}{\delta \check{g}_{mn}}; \tag{21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \check{g}_{mn,j}}(\check{g}_{ma}\delta^t_n + \check{g}_{na}\delta^t_m) = v^{jt}_a; \tag{22}$$

$$S^{jk}_a = v^{jk}_a + \sigma^{jk}_a. \tag{23}$$

Можно показать [3], что

$$\Theta^{\cdot s}_p = t^s_p + \check{\nabla}_k S^{ks}_p + \Psi^{ks} g_{kp}, \tag{24}$$

$$\check{\nabla}_s \Theta^{\cdot s}_p = \nabla_s(\Psi^{as} g_{ap}), \tag{25}$$

$$S^{ks}_p = -S^{sk}_p, \tag{26}$$

где $\Theta^{\cdot s}_p = \check{g}_{kp}\Theta^{ks}$.

Тензор θ^{mn} — метрический тензор энергии-импульса. Для лагранжиана (10) он найден в работе [1] и в случае $\check{R}^a_{kln} = 0$, совпадает с тензором Папапетру. Как видно из (25) и (12), при $\check{R}_{ab} = 0$ имеет место тождество

$$\check{\nabla}_s \Theta^{\cdot s}_p = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Черников, Сообщение ОИЯИ, Р2-87-683, Дубна 1987.
[2] Н. А. Черников, Препринт ОИЯИ, Р2-88-27, Дубна 1988.
[3] М. Н. Тентюков, Сообщение ОИЯИ, Р2-88-182, Дубна 1988.
[4] М. Н. Тентюков, Сообщение ОИЯИ, Р2-88-483, Дубна 1988.
[5] Н. А. Черников, ЭЧАЯ 1987, т. 18, вып. 5, с. 1000.
[6] Н. А. Черников, в кн.: *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц*, вып. 17, Энергоатомиздат, Москва 1986, с. 24.