СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

М. Н. Тентюков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна*

CONSERVED INTEGRAL CHARACTERISTICS OF THE GRAVITATIONAL FIELD

By M. N. Tentyukov

(Received January 5, 1989)

The dynamics of the gravitational field is considered in the affinely connected space. It is shown that the presence of the r- parameter group of motions of the background connection leads to r integral conservation laws.

PACS numbers: 04.20 Me

1. *Введение*

Как показано в работах [1, 2], определение импульсно-энергетических характеристик гравитационного поля требует введения фоновой связности. Для определения энергии гравитационного поля был предложен ряд псевдотензорных объектов. С помощью фоновой связности удается найти их тензорные представления. Для псевдотензора Папапетру это было сделано в работе [1], для псевдотензора Эйнштейна — в работах [2, 3], а для псевдотензора Ландау - Лифшица — в работах [4, 5].

Интуитивно ясно, что вопрос об интегральных законах сохранения при наличии локально сохраняющихся величин должен быть тесно связан с подвижностью фонового объекта. В случае, если фоновая связность метрическая, то есть когда введена фоновая метрика, а фоновая связность кристоффелева для фоновой метрики, решение этого вопроса осуществляется обычным образом: подвижность фоновой метрики означает существование вектора Киллинга η^m; метрический тензор энергии-

* Address: Joint Institute for Nuclear Research, Laboratory of Theoretical Physics, 141980 Dubna, USSR.

-импульса Θ^{mn}, являющийся обобщением тензора Папапетру, локально сохраняется, то есть $\check{\nabla}_m \Theta^{mn} = 0$, где $\check{\nabla}_m$ — ковариантная относительно фоновой связности производная. Это означает сохранение величины $B = \int H^j dS_j$, где $H^j = \Theta^{ij}\eta_i$; интегрирование идет по гиперповерхности, охватывающей все 3-пространство.

Хуже обстоит дело, если фоновая метрика отсутствует, то есть фоновая связность не является кристоффелевой. Тогда невозможно определить метрический тензор энергии-импульса, а канонический тензор энергии-импульса t_a^k, обобщающий псевдотензор Эйнштейна, не удовлетворяет локальному закону сохранения (см. формулу (11)). Более того, локально сохраняющиеся токи, следующие из теоремы Нетер, оказываются комбинациями практически произвольных функций. А сохраняются они лишь вследствие своей тензорной симметрии. Тем не менее, если фоновый объект обладает подвижностью, ток Нетер становится нетривиальным, и некоторая интегральная величина A слабо сохраняется.

Подвижность фонового объекта будет означать существование векторного поля ξ^m, производная Ли вдоль которого от фоновой связности равна нулю. Сохраняющаяся интегральная величина строится из ξ^m и обобщенного суперпотенциала Эйнштейна σ_a^{jk} по формуле

$$A = \int J^j dS_j, \quad \text{где} \quad J^j = 2\sigma_a^{(jk)} \check{\nabla}_k L^a - \check{\nabla}_k(\sigma_a^{kj}\xi^a).$$

В случае, если фоновая связность метрическая, величины H^j и J^j связаны соотношением $J^j = H^j + \check{\nabla}_k S^{jk}$, где $S^{jk} = -S^{kj}$ — антисимметричная тензорная плотность веса $+1$. Можно проверить, что для любой дважды контравариантной тензорной плотности веса $+1$ справедливо соотношение $\check{\nabla}_j \check{\nabla}_k S^{[jk]} = 0$, то есть H^i и J^i различаются несущественно.

2. *Сохраняющиеся гравитационные токи*

Пусть $\check{\Gamma}^k_{mn}$ — коэффициенты фоновой связности, $\Gamma^k_{mn} = (1/2)g^{ka}(\partial_m g_{an} + \partial_n g_{am} - \partial_a g_{mn})$ — символы Кристоффеля для g_{mn}, $P^k_{mn} = \check{\Gamma}^k_{mn} - \Gamma^k_{mn}$ — тензор аффинной деформации.

Как показано в [2], уравнения Эйнштейна в вакууме

$$G_{mn} \equiv R_{mn} - (1/2)Rg_{mn} = 0, \tag{1}$$

где R_{mn} — тензор Риччи для g_{mn}, могут быть получены иа лагранжиана

$$L_g = \sqrt{-g}\, g^{mn}(P^a_{mb}P^b_{an} - P^a_{ba}P^b_{mn}) \tag{2}$$

при условии $\check{\Gamma}^m_{ik} = \check{\Gamma}^m_{ki}$, если $\check{R}_{ik} = 0$, где тензор Риччи фоновой связности равен $\check{R}_{ik} = \check{R}^p_{pik}$, а $\check{R}^p_{aik} = \partial_a \check{\Gamma}^p_{ik} - \partial_i \check{\Gamma}^p_{ak} + \check{\Gamma}^p_{as}\check{\Gamma}^s_{ik} - \check{\Gamma}^p_{is}\check{\Gamma}^s_{ak}$ — тензор Римана-Кристоффеля фоновой связности.

Рассмотрим лагранжиан общего вида

$$L = L(g_{ik}; \partial_m g_{ik}; \check{\Gamma}^k_{mn}). \tag{3}$$

Считаем, что $\check{\Gamma}^k_{mn} = \check{\Gamma}^k_{nm}$, то есть кручение отсутствует. Величина L представляет собой скалярную плотность веса $+1$. Можно показать [3], что инвариантность действия

$$S = \int L d^4 x \tag{4}$$

приводит к тому, что лагранжиан (3) имеет вид

$$L = L(g_{ik};\, P^k_{mn}). \tag{5}$$

Обозначим через ∇_k ковариантную производную относительно Γ^k_{mn}. Определим следующие величины:

$$t^k_a = \frac{\partial L}{\partial g_{mn,k}} \check{\nabla}_a g_{mn} - L\delta^k_a, \tag{6}$$

$$\sigma^{jk}_a = \frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}} (g_{ma}\delta^k_n + g_{an}\delta^k_m), \tag{7}$$

$$\Psi^{mn} = 2\,\frac{\delta S}{\delta g_{mn}}, \tag{8}$$

$$\Theta^{mn}_k = \frac{\delta S}{\delta \check{\Gamma}^k_{mn}}, \tag{9}$$

где

$$\frac{\delta S}{\delta g_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial g_{mn}} - \partial_j \frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}}; \qquad \frac{\delta S}{\delta \check{\Gamma}^k_{mn}} = \frac{\partial L}{\partial \check{\Gamma}^k_{mn}}$$

обычные эйлеровы производные, запятая перед индексом означает частную производную. Все введенные величины представляют собой тензорные плотности веса $+1$, $(1/\sqrt{-g})t^k_a$ имеет смысл канонического тензора энергии-импульса; величина $(1/\sqrt{-g})\Theta^k_{mn}$ впервые была введена в работе [1] и названа там тензором праэнергии гравитационного поля. При помощи вариационного метода можно доказать ряд тождеств [3]. В частности,

$$t^k_a + \check{\nabla}_j \sigma^{jk}_a + \Psi^{km} g_{ma} = 0; \tag{10}$$

$$-\check{\nabla}_k t^k_a = \Theta^{mn}_k \check{R}^k_{amn} + (1/2)\sigma^{mn}_k \check{R}^k_{mna} + (1/2)\Psi^{mn}\check{\nabla}_a g_{mn}; \tag{11}$$

$$\sigma^{(jk)}_a = -\Theta^{jk}_a; \tag{12}$$

$$\check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \Theta^{mn}_a + \Theta^{mn}_k \check{R}^k_{amn} = \nabla_k(\Psi^{mk} g_{ma}). \tag{13}$$

Запишем вариацию действия общего вида [3]:

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial L}{\partial \check{\Gamma}^k_{mn}} \delta \check{\Gamma}^k_{mn} + \frac{\delta S}{\delta g_{mn}} \delta g_{mn} + \partial_j \left(\frac{\partial L}{\partial g_{mn,j}} \delta g_{mn} + L\delta x^j \right) \right] d^4 x. \tag{14}$$

Имея в виду инвариантность действия, потребуем обращения δS в нуль при вариациях Ли:

$$\delta x^j = \xi^j; \tag{15}$$

$$\delta \check{\Gamma}^k_{mn} = -(\check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \xi^k + \check{R}^k_{amn} \xi^a); \tag{16}$$

$$\delta g_{mn} = -(g_{ms} \check{\nabla}_n \xi^s + g_{ns} \check{\nabla}_m \xi^s + \xi^s \check{\nabla}_s g_{mn}), \tag{17}$$

где ξ^a — произвольное инфинитезимальное векторное поле. Используя определение (6)—(9), подставляем (15)—(17) в (14). Получаем

$$-\delta S = \int [\Theta^{mn}_k \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \xi^k + \Theta^{mn}_k \check{R}^k_{amn} \xi^a + (1/2)\Psi^{mn} \check{\nabla}_a g_{mn} \cdot \xi^a$$
$$+ \Psi^{mn} g_{ma} \check{\nabla}_n \xi^a + \partial_j(\sigma^{jk}_a \check{\nabla}_k \xi^a + t^j_a \xi^a)] d^4x. \tag{18}$$

Член $\Theta^{mn}_k \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \xi^k$ легко привести к виду

$$\Theta^{mn}_k \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \xi^k = \xi^k \check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \Theta^{mn}_k + \check{\nabla}_m (\Theta^{mn}_k \check{\nabla}_n \xi^k - \xi^k \check{\nabla}_n \Theta^{nm}_k), \tag{19}$$

а

$$\Psi^{mn} g_{ma} \check{\nabla}_n \xi^a + (1/2)\Psi^{mn} \check{\nabla}_a g_{mn} \cdot \xi^a = \check{\nabla}_m (\Psi^{nm} g_{na} \xi^a) - \xi^a \nabla_n (\Psi^{mn} g_{ma}), \tag{20}$$

в чем нетрудно убедиться, расписав ковариантные производные и помня о том, что Ψ^{mn} — тензорная плотность веса $+1$.

Выражение (18), учитывая (19) и (20), преобразуем к вигу

$$-\delta S = \int [\xi^a (\check{\nabla}_m \check{\nabla}_n \Theta^{mn}_a + \Theta^{mn}_k \check{R}^k_{amn} - \nabla_n (\Psi^{mn} g_{ma}))$$
$$+ \check{\nabla}_j (\sigma^{jk}_a \check{\nabla}_k \xi^a + t^j_a \xi^a + \Psi^{nj} g_{na} \xi^a + \Theta^{jn}_a \check{\nabla}_n \xi^a - \xi^a \check{\nabla}_n \Theta^{nj}_a)] d^4x. \tag{21}$$

При выводе этого соотношения было учтено, что для любой векторной плотности веса $+1$ справедливо соотношение $\partial_i A^i = \check{\nabla}_i A^i = \nabla_i A^i$.

Из (21) с учетом (10), (12) и (13) получаем

$$-\delta S = \int \check{\nabla}_j [\check{\nabla}_k (\sigma^{[jk]}_a \xi^a)] d^4x. \tag{22}$$

Отсюда в силу произвольности области интегрирования и условия $\delta S = 0$ следует локальный закон сохранения

$$\check{\nabla}_j T^j = 0, \tag{23}$$

где

$$T^j = \check{\nabla}_k (\sigma^{[jk]}_a \xi^a). \tag{24}$$

Но соотношение (23) является тривиальным, так как оно выполняется тождественно в силу тензорных свойств T^j (см. конец Введения).

До сих пор поле ξ^a было произвольным. Далее будем считать, что фоновая связность такова, что допускает некоторую группу движений, а ξ^a генерирует однопараметрическую подгруппу этой группы, следовательно, производная Ли вдоль ξ^a от фоновой связности равна нулю: $\underset{\xi}{\pounds}\check{\Gamma}^k_{mn} = 0$. Это означает, что вектор ξ^a удовлетворяет уравнению

$$\check{\nabla}_m\check{\nabla}_n\xi^a + \check{R}^a_{kmn}\xi^k = 0. \tag{25}$$

Тогда (18) можно преобразовать к виду

$$-\delta S = \int\left[-\xi^a\nabla_n(\Psi^{nm}g_{ma}) + \check{\nabla}_j(\sigma^{jk}_a\check{\nabla}_k\xi^a + \tau^j_a\xi^a)\right]d^4x, \tag{26}$$

где

$$\tau^j_a = t^j_a + \Psi^{jp}g_{pa}. \tag{27}$$

В силу произвольности области интегрирования из (26) следует, что если $\delta S = 0$, то

$$\check{\nabla}_j(\sigma^{jk}_a\check{\nabla}_k\xi^a + \tau^j_a\xi^a) = \xi^a\nabla_n(\Psi^{nm}g_{ma}). \tag{28}$$

Если гравитационное поле описывается уравнениями Эйнштейна, лагранжиан имеет вид (2), а фоновая связность должна удовлетворять условию $\check{R}_{ik} = 0$. Величина Ψ^{mn} для лагранжиана (2) найдена в [2] и имеет вид

$$\Psi^{mn} = \sqrt{-g}\, g^{ma}g^{nb}(\check{R}_{ab} + \check{R}_{ba} - \check{R}_{ij}g^{ij}g_{ab} - 2G_{ab}). \tag{29}$$

Поскольку $\nabla_n(g^{na}G_{ab}) \equiv 0$, при $\check{R}_{ab} = 0$ формула (28) приобретает вид

$$\check{\nabla}_j(\sigma^{jk}_a\check{\nabla}_k\xi^a + \tau^j_a\xi^a) = 0. \tag{30}$$

Это означает существование сохраняющегося тока [7]:

$$J^j = \sigma^{jk}_a\check{\nabla}_k\xi^a + \tau^j_a\xi^a. \tag{31}$$

То есть сохраняется величина

$$A = \int J^j dS_j, \tag{32}$$

где интегрирование идет по любой бесконечной гиперповерхности, охватывающей все 3-пространство.

Вводя фоновую метрику $\check{g}_{ik}$ и полагая коэффициенты фоновой связности равными кристоффелям для $\check{g}_{ik}$, определим следующие величины:

$$\Theta^{mn} = -2\,\frac{\delta S}{\delta\check{g}_{mn}}, \tag{33}$$

$$v^{jt}_a = \frac{\partial L}{\partial\check{g}_{mn,j}}(\check{g}_{ma}\delta^t_n + \check{g}_{na}\delta^t_m), \tag{34}$$

$$S^{jk}_a = v^{jk}_a + \sigma^{jk}_a. \tag{35}$$

Можно показать [3], что

$$\Theta^{\cdot s}_p = t^s_p + \check{\nabla}_k S^{ks}_p + \Psi^{ks}g_{kp}, \tag{36}$$

$$\check{\nabla}_s \Theta_p^{\cdot s} = \nabla_s(\Psi^{ks} g_{kp}), \tag{37}$$

$$S_p^{ks} = -S_p^{sk}; \tag{38}$$

где

$$\Theta_p^{\cdot s} = g_{ap}\Theta^{as}.$$

Тензор $(1/\sqrt{-\check{g}})\Theta^{mn}$ — метрический тензор энергии-импульса. Для лагранжиана (2) он найден в работе [1] и в случае $\check{R}^a_{klm} = 0$ совпадает с тензором Папапетру. Как видно из (37) и (29), при $\check{R}_{ik} = 0$ имеет место тождество

$$\check{\nabla}_k \Theta_a^{\cdot k} = 0. \tag{39}$$

Поэтому при наличии векторного поля η^a, удовлетворяющего уравнениям Киллинга

$$\check{\nabla}_m \eta_n + \check{\nabla}_n \eta_m = 0, \tag{40}$$

будет существовать сохраняющийся ток

$$H^j = \Theta_a^{\cdot j} \eta^a.$$

Это означает аналогично (32) сохранение интегральной величины

$$B = \int H^j dS_j.$$

Но векторное поле η^a, удовлетворяющее (40), автоматически удовлетворяет (25) [8]. Поэтому величина A, определенная формулами (31) и (32), где $\xi^a = \eta^a$, так же будет сохраняться. Используя (35) и (36), можно показать, что

$$J^j = H^j + \check{\nabla}_k S^{[jk]},$$

где

$$S^{[jk]} = -S^{[kj]} = S_a^{jk} \zeta^a.$$

Простой проверкой можно убедиться, что для любой дважды контравариантной антисимметричной тензорной плотности веса $+1$ выполняется соотношение $\check{\nabla}_m \check{\nabla}_k S^{mk} = 0$. То есть J^j и H^j определены как раз с точностью до слагаемого типа $\check{\nabla}_k S^{[jk]}$.

3. *Заключение*

Приведенный выше анализ показывает, что в случае, если фоновая связность не метрическая, локальные законы сохранения приобретают несколько специфический вид. При наличии группы движений фоновой связности возможно построение интегральной сохраняющейся величины A. Если же введена фоновая метрика, то стандартным приемом может быть построена сохраняющаяся величина B, и окажется, что $B = A$. То есть необходимости во введении фоновой метрики для построения интегральных сохраняющихся величин нет.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Н. А. Черникову за постоянное внимание и большую помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Черников, Сообщение ОИЯИ, Р2-87-683, Дубна 1987.
[2] Н. А. Черников, Препринт ОИЯИ, Р2-88-27, Дубна 1988.
[3] М. Н. Тентюков, Сообщение ОИЯИ, Р2-88-182, Дубна 1988.
[4] М. Н. Тентюков, Сообщение ОИЯИ, Р2-88-483, Дубна 1988.
[5] Н. А. Черников, *Физика элементарных частиц и атомного ядра*, 1987, т. 18, вып. 5, с. 1000.
[6] Н. А. Черников, в кн.: *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц*, вып. 17, Энергоатомиздат, Москва 1986, с. 24.
[7] Ю. С. Владимиров, *Системы отсчета в теории гравитации*, Энергоиздат, Москва 1982, с. 156.
[8] А. З. Петров, *Новые методы в общей теории относительности*, Наука, Москва 1966, с. 71.