МОДЕЛЬ ПОЛЯ СОСТАВНЫХ ФЕРМИОНОВ

М. А. Иванов

Научно-исследовательский институт прикладных физических проблем, Белорусский государственный университет, 220064, Минск, Курчатова 7, СССР*

MODEL OF FIELD OF COMPOSITE FERMIONS

M. A. Ivanov

(Received April 24, 1989)

A model of two-component fermion field is constructed, solutions of the version of which set up 4 generations with $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ as the symmetry group. An internal space is not the Minkovski one. A permissible multiplet of the model may contain two $SU(2)_R$--singlets in the lepton sector.

PACS numbers: 11.10.Kk

1. Введение

Повторяемость свойств лептонов и кварков в разных поколениях, вероятно, могла бы быть следствием составной природы этих фундаментальных фермионов. Но вряд ли найдется сегодня физик, который легко согласится с утверждением, что некоторые хорошо известные факты можно интерпретировать как косвенные свидетельства составной природы электрона, например. Принимаемый из феноменологических соображений постулат стандартной модели сильных и электрослабых взаимодействий — группой симметрии в поколении лептонов и кварков является $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ — можно привести в качестве примера подобного косвенного свидетельства. Естественная реакция читателя, что это явная бессмыслица, показывает трудность стоящей перед автором этой статьи задачи — подвести читателя к мысли, что подобные утверждения в рамках рассмотренной в статье модели поля составных фермионов вполне логичны.

Модели составных частиц [1—3] и следствия подобных моделей [4], как и следствия возможного существования четвертого поколения [5—6] уже обсуждались в литературе. Если масса нейтрино конечна [7], то в стандартной модели нужно будет ввести ещё один $SU(2)_R$-синглет в лептонном секторе. Высказывалась гипо-

* Address: Research Institute of Applied Physical Problems, Belorussian State University, Kurchatov Street 7, 220064 Minsk, USSR.

теза о связи числа нейтрино с размерностью пространства [8]. В настоящей работе показано, что все эти на первый взгляд разрозненные предположения — составная природа фундаментальных фермионов, существование четвертого поколения, возможность введения ещё одного $SU(2)_R$-синглета в лептонном секторе, связь типа мультиплетов и числа поколений со свойствами и размерностью пространства — оказываются логически связанными в модели поля двухкомпонентных фермионов.

В этой статье построена модель поля составных фермионов, исследованы её глобальные симметрии, показана близость основных следствий модели к принимаемым в стандартной модели начальным постулатам.

Предыдущая работа автора [9] малодоступна, и здесь изложение ведется независимо от неё.

2. *Основные постулаты*

Модель строится на основе следующих постулатов:

а) фермион — составная двухкомпонентная система;

в) пространство координат восьмимерно и действительно, координаты центра инерции x^μ образуют пространство Минковского $R^4_{1,3}$;

с) внутренние координаты (относительного положения компонентов) y^μ преобразуются независимо от x^μ (ср. [10]).

Ниже мы убедимся, что следствием с) в данной модели будет: пространство внутренних координат не является пространством Минковского.

3. *Уравнения поля двухкомпонентных фермионов*

Обозначим x_1 и x_2 координаты компонентов составной системы, $p_\mu = i\partial/\partial x^\mu$, $\pi_\mu = i\partial/\partial y^\mu$, $p_{i\mu} = i\partial/\partial x_i^\mu$, $i = 1, 2$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, (соответствующие пространства упоминаются как X, Y, X_1, X_2). Тогда основные уравнения для 16-компонентной волновой функции Ψ безмассовых, незаряженных, свободных фермионов можно записать в виде четырех уравнений Дирака-Кэлера (см. [11]; принято $c = \hbar = 1$):

$$\Gamma_1^\mu p_\mu \Psi(x, y) = 0, \tag{1}$$

$$\Gamma_1^\mu \pi_\mu \Psi(x, y) = 0, \tag{2}$$

$$\Gamma_2^\mu p_{1\mu} \Psi(x_1, x_2) = 0, \tag{3}$$

$$\Gamma_3^\mu p_{2\mu} \Psi(x_1, x_2) = 0, \tag{4}$$

идентичных уравнениям модели [9] при нулевых массах компонентов. 16×16 матрицы Γ_a^μ, $a = 1, 2, 3$, подчиняются соотношениям:

$$\begin{gathered} \{\Gamma_1^\mu, \Gamma_1^\nu\}_+ = \{\Gamma_2^\mu, \Gamma_2^\nu\} = \{\Gamma_3'^\mu, \Gamma_3'^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \\ [\Gamma_2^\mu, \Gamma_3'^\nu]_- = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$, $\Gamma_3'^\mu \equiv K\Gamma_3^\mu$, $K \equiv \sigma^3 \times I^8$, σ^k, $k = 1, 2, 3$ — матрицы Паули.

В Приложении I приведено конкретное представление для Γ^μ_a.

Уравнения (1)—(4) являются по существу сложными постулатами модели. Каковы мотивы введения именно таких уравнений с соотношениями (5) между матрицами? В классическом случае для двухкомпонентной системы без взаимодействия энергия $E = E_1 + E_2$, где $E_i = \sqrt{m_i^2 + p_i^2}$; линеаризация этого уравнения с учетом принципа соответствия позволяет получить уравнения типа уравнения Солпитера [12] с указанной алгеброй матриц Γ^μ_2, Γ^μ_3; переход к уравнению (1) осуществляется принятием дополнительного ограничения на p_μ, $p_{1\mu}$, $p_{2\mu}$. Это ограничение таково, что из полученных линеаризацией выражений для E_i уравнений (3), (4) следует также (2). Описанная процедура приведена в [9]; к ней следует относиться не иначе как к вспомогательным рассуждениям, помогающим выбрать вид уравнений модели, рассматриваемых далее как её постулаты.

С учетом в) и структуры матриц Γ^μ_1 уравнение (1) распадается на 4 уравнения Дирака для некоторых четверок компонент Ψ. Если провести усреднение по координатам y : $\tilde{\Psi}(x) = \langle \Psi(x, y) \rangle_y$, то можно говорить об описании с помощью функции $\tilde{\Psi}(x)$ четырех поколений фермионов. Хотя уравнения (3), (4) имеют такую же структуру, нельзя сказать, что двухкомпонентная система составлена из двух фермионов — такое утверждение предполагает тип пространства Минковского для X_1, X_2, но ниже будет показано, что Y не является пространством Минковского; поэтому и допустимые преобразования координат X_1, X_2 не принадлежат группе Лоренца или Пуанкаре.

4. *Связь между координатами и вид их допустимых преобразований*

В уравнениях (1)—(4) мы имеем дело с двумя восьмимерными пространствами. Если обозначить $z \equiv (x, y)$, $z_{12} \equiv (x_1, x_2)$ (а соответствующие координатные пространства как Z и Z_{12}), то координаты из этих двух пространств связаны между собой линейным преобразованием с матрицей λ (ср. [1]):

$$z^\alpha = \lambda^\alpha_\beta z^\beta_{12}, \qquad \alpha, \beta = 1, \dots, 8, \tag{6}$$

где $\lambda = (\sigma^1 + \sigma^3) \times I^4/2$, $\lambda^{-1} = 2\lambda$, $|\lambda| = -2^{-4}$. Соответственно для дифференцирований $\partial_\alpha \equiv i\partial/\partial z^\alpha$, $\mathcal{D}_\alpha \equiv i\partial/\partial z^\alpha_{12}$ (т.е. $\partial = (p, \pi)$, $\mathcal{D} = (p_1, p_2)$) имеем $\mathcal{D}_\alpha = \lambda^\beta_\alpha \partial_\beta$.

Обе системы координат используются потому, что уравнения (1)—(2) не эквивалентны паре (3)—(4) и в разных координатах эти уравнения имеют простейший вид. Фактически уравнения (3)—(4) используются ниже для установления ограничений на решения модели. Предполагается, что физическое пространство-время совпадает с X.

В соответствии с постулатом с) примем, что матрицы допустимых преобразований координат пространства Z имеют блочно-диагональный вид:

$$\Lambda = \mathrm{diag}\,(\Lambda_x, \Lambda_y), \tag{7}$$

где Λ_x и Λ_y — матрицы преобразований координат x и y. Если $z \to \Lambda z$, то $z_{12} \to L z_{12}$, где

$$L = \lambda^{-1}\Lambda\lambda = \tfrac{1}{2}\left[I^2 \times (\Lambda_x + \Lambda_y) + \sigma^1 \times (\Lambda_x - \Lambda_y)\right]. \quad (8)$$

Естественно интерпретировать преобразования восьмимерного пространства вида $\Lambda' = \mathrm{diag}\,(\Lambda_x, I^4)$, где Λ_x — преобразование из группы Лоренца, как „координатные" преобразования физического пространства — времени, а вида $\Lambda'' = \mathrm{diag}\,(I^4, \Lambda_y)$ — как преобразования „внутренни симметрии". При этом всякое $\Lambda = \Lambda'\Lambda''$. Λ_y не обязательно является преобразованием Лоренца, и именно такая возможность использована ниже.

5. *Группа глобальной симметрии модели*

Если модель поля: 1) допускает n различных решений Ψ_A, Ψ_B, ...; 2) возможен прямой переход от любого Ψ_A к любому Ψ_B; 3) любая линейная комбинация этих решений также является решением модели; 4) при $\varphi^{\mathrm{T}} \equiv (\Psi_A, \Psi_B, \ldots)$ сохраняется норма $\varphi^+\varphi$ — то группой симметрии модели является $\mathrm{SU}(n)$.

Из перечисленных четырех признаков наличия определенной группы $\mathrm{SU}(n)$ в качестве группы симметрии модели три первых могут быть установлены в данной модели, а четвертый может быть введен как постулат. Вероятно, такой постулат (если такой признак нельзя установить как следствие модели) гораздо проще, чем постулирование определенной группы, имеющее место в стандартной модели.

Покажем, что модель (1)—(4) допускает 8 различных решений, которым можно сопоставить дискретные преобразования пространства Y. Эти решения разбиваются по критерию 2) на множества из 1, 2 и 3 элементов так, что если принять условие 4) сохранения нормы $\varphi^+\varphi$ для этих множеств в качестве постулата, то группой глобальной симметрии модели оказывается группа $\mathrm{SU}(3)_{\mathrm{c}} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{L}} \times \mathrm{U}(1)$.

Для уравнения (1) справедливо утверждение: если $\Psi(x, y)$ — решение (1), то $\exists G_A$, $A = 1, \ldots, 8$, $[G_A, \Gamma_1^\mu] = 0$, где матрицы G_A образуют представление группы диэдра D_4, причем все $\Psi(x, y) = G_A\Psi(x, y)$ также являются решениями уравнения (1). Подобные утверждения справедливы для любого из уравнений (2)—(4). Матрицы G_A выписаны в приложении 2; легко проверить, что $[G_A, \Gamma_1^\mu] = 0$.

Таким образом, можно выделить 8 решений уравнений (1, 2) $\Psi_A(x, y)$. Одна из идей этой работы состоит в том, что эти решения индуцируются преобразованиями Λ_{yA} пространства Y, также образующими представление группы D_4. Если $\Lambda_A = \mathrm{diag}\,(I^4, \Lambda_{yA})$, то преобразование $z \to \Lambda_A z$ должно сопровождаться преобразованием $\Psi(z) \to \Psi_A(z)$. Условием ковариантности уравнения (2) при этом будет

$$\Gamma_{1\pm}^\mu = M_A \Gamma_{1\pm}^\nu \Lambda_{yA}{}_\nu^\mu G_A \quad (9)$$

где $\Gamma_{a\pm}^\mu \equiv \Gamma_a^\mu(1 \pm \Gamma^5)$, M_A — произвольная матрица. Преобразования уравнений для левых и правых компонент Ψ

$$\Psi_{\mathrm{L}} \equiv (1 - \Gamma^5)\Psi/2, \qquad \Psi_{\mathrm{R}} \equiv (1 + \Gamma^5)\Psi/2,$$

оказываются различными, поэтому введены матрицы $\Gamma^{\mu}_{a\pm}$. Матрицы Λ_{yA}, удовлетворяющие (9), построены в приложении 3. Представления группы D_4 образуют, например, матрицы ($B_k^2 = I^4$):

$$\{\Lambda_{yA+}\} = \{I^4, -iB_1, -B_2, B_3; -I^4, iB_1, B_2, -B_3\},$$
$$\Lambda_{yA-} = \Lambda^*_{yA+}. \tag{10}$$

Матрицы внутренних координатных преобразований Λ_{yA+} и Λ_{yA-} не только различны, но и заданы над полем C, а не R. По постулату в) пространство Y действительно, поэтому для непротиворечивости модели необходимо ограничить для каждого A возможные значения y^{μ}, что ведет к заданию для каждого A своей топологии в Y. Для представления (10) тройки решений с $A = 2, 3, 4$ и $A = 6, 7, 8$ выделяются при этом фиксирующими топологию условиями: $y^0 = y^1 = 0$, $A = 2, 6$; $y^1 = y^3 = 0$, $A = 3, 7$; $y^1 = y^2 = 0$, $A = 4, 8$, т.е. внутреннее пространство для этих решений состоит из отдельных двумерных плоскостей. Для всех таких решений (состояний поля) $y^1 = 0$, т.е. имеет место редукция к трехмерному псевдоевклидову пространству, в котором задана топология $y^0 = 0 \vee y^2 = 0 \vee y^3 = 0$.

Рассмотрим преобразования уравнений (3)—(4), которыми сопровождаются преобразования Λ в Z. Обозначим $\{\Gamma^{\mu}_2; 0\}^{\alpha} \equiv \Gamma^{\alpha}_2$, $\{0; \Gamma^{\mu}_3\}^{\alpha} \equiv \Gamma^{\alpha}_3$, $\alpha = 1, \ldots, 8$. Преобразование $\Lambda'\Lambda_A$ индуцирует преобразование $z_{12} \to \lambda^{-1}\Lambda'\Lambda_A\lambda z_{12} = L_A z_{12}$, при этом уравнения (3), (4) переходят в

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_a \mathcal{D}'_{\alpha}\Psi'(z'_{12}) = 0, \quad a = 2, 3, \tag{11}$$

где $\mathcal{D}'_{\alpha} = L^{\beta}_{A\alpha}\mathcal{D}_{\beta}$, $\Psi'(z'_{12}) = \vartheta_A\Psi(z_{12})$, ϑ_A — матрицы, образующие представление D_4 (приложение 4); условием ковариантности (3, 4) будет (при некоторых M_A)

$$M_A\tilde{\Gamma}^{\alpha}_a L^{\beta}_{A\alpha}\vartheta_A = \Gamma^{\beta}_a, \quad a = 2, 3. \tag{12}$$

Но из (8) следует, что если $\Lambda_x \neq \pm\Lambda_{yA}$, то $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_a$ может содержать более 4 ненулевых матриц. Для некоторых M_A, ϑ_A (11) может быть эквивалентно (3), (4), если мы сохраняем с), при условии

$$p_{1\mu}\Psi(z_{12}) = p_{2\mu}\Psi(z_{12}). \tag{13}$$

Условие (13) означает, что $\pi_{\mu}\Psi(z) = 0$, т.е. $\Psi(x, y) = \Psi(x, y^{\mu}_A)$, где y^{μ}_A — постоянные величины, возможно отличающиеся для разных A. Из указанных выше ограничений на y^{μ} для состояний поля с $A = 2, 3, 4$; $6, 7, 8$, если возможны переходы между всеми $\Psi_A(z)$, следовало бы $y^{\mu}_A = 0\ \forall A, \mu$. В этом случае теория была бы локальной и группой симметрии была бы SU(8).

Чтобы сохранить нелокальный характер теории — что ведет к группе симметрии $SU(3)_c \times SU(2)_L$ — необходимо изолировать состояния поля с $A = 1, 5$ от всех остальных. Тогда состояния с $A \neq 1, 5$ можно интерпретировать как цветные состояния поля, т.к. группой их симметрии будет SU(3). Указанная изоляция достигается, если преобразования T_b координат цветового пространства y^{μ}_A, $A = 2, 3, 4$; $6, 7, 8$, образуют дискретную группу, изоморфную группе диэдра D_3 : $\{T_b | b = 1, \ldots, 6\}$,

$T_1 = I^4$, $T_2 = T_3^{-1}$, $T_2^3 = T_4^2 = T_5^2 = T_6^2 = I^4$. Но при этом новых значений y_A^μ не возникает только при условии:

$$y_A^\mu = 0 \quad \vee\, y_A^\mu = l, \quad A = 2, 3, 4; 6, 7, 8, \tag{14}$$

где l — постоянная с размерностью длины. Значений y_A^μ для $A = 1, 5$ условие (14) не затрагивает, так что в модели имеется 5 постоянных с размерностью длины ($y_1^\mu = -y_5^\mu$).

Действие преобразований T_b индуцирует преобразования $\Psi_A(z_{12}) \to \Psi_{A'}(z_{12})$, причем оказывается, что представление группы D_3, действующее на $\Psi_A(z_{12})$, образуют матрицы S_b, $b = 1, 6$, переставляющие компоненты триплетов (Ψ_A, $\Psi_{A'}$, $\Psi_{A''}$), где $(A, A', A'') = (2, 3, 4)$ или $(6, 7, 8)$. Вид этих матриц легко установить по действию T_b на набор y_A^μ, $A = 2, 3, 4$. При дополнительном требовании сохранения нормы $\varphi^+\varphi$ группой симметрии этих состояний будет $SU(3)_c$.

Симметрия $SU(2)_L$ связана с преобразованием $(x, y) \to (x, -y)$. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Замена $y \to -y$ приводит к преобразованию $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$, при этом уравнения (3) и (4) должны переходить друг в друга. Но конструкция Γ_2^μ и Γ_3^μ такова, что преобразование $\Psi(z_{12}) \to \vartheta\Psi(z_{12})$ с некоторой матрицей ϑ приводит к переходу (3) $\leftrightarrow$ (4) только для Ψ_L или Ψ_R. Так, существует матрица ϑ (см. приложение 4) со свойством

$$\Gamma_{3-}^\mu \vartheta = \vartheta \Gamma_{2-}^\mu, \tag{15}$$

но при этом

$$\Gamma_{3+}^\mu \vartheta \neq \vartheta \Gamma_{2+}^\mu. \tag{16}$$

Поэтому Ψ_L и Ψ_R должны преобразовываться различно при $y \to -y$. С учетом (15)—(16) уравнения (3)—(4) будут ковариантны, если

$$\Psi_R(z_{12}) \to \Psi_R(z_{12}), \qquad \Psi_L(z_{12}) \to \vartheta\Psi_L(z_{12}), \tag{17}$$

а для ковариантности (1)—(2), учитывая, что G_5 в представлении D_4 соответствует $\vartheta_5 = \vartheta$, достаточно

$$\Psi_R(z) \to \Psi_R(z), \qquad \Psi_L(z) \to G_5\Psi_L(z). \tag{18}$$

Таким образом, при $(x, y) \to (x, -y)$ решения $\Psi_R(z)$ и $G_5\Psi_R(z)$ являются синглетами, а $\Psi_L(z)$ и $G_5\Psi_L(z)$ — компонентами дублета группы $SU(2)_L$.

Это утверждение справедливо и для цветных состояний с $A = 2, 3, 4; 6, 7, 8$. Инвариантны (1)—(4) и по отношению к глобальной $U(1)$. Поэтому группой глобальной симметрии модели будет $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$. Структура допустимого мультиплета группы отличается от принимаемой в стандартной модели возможным появлением второго $SU(2)_R$-синглета для состояний с $A = 1, 5$, т.е. в „лептонном секторе".

6. *Ковариантность модели по отношению к глобальным преобразованиям Лоренца*

Пусть Λ_x — преобразование из собственной группы Лоренца, $x \to \Lambda_x x$, $G_x \equiv \exp(-i\sigma^{\mu\nu}\theta_{\mu\nu}/4)$, где $\theta_{\mu\nu}$ — параметры преобразования, а $\sigma^{\mu\nu} = [\Gamma_1^\mu, \Gamma_1^\nu]$. Тогда преобразование

$$\Psi(z) \to G_x \Psi(z) \tag{19}$$

оставляет (1) ковариантным (ср. [14]); при этом $[G_x, G_\Lambda] = 0$. Уравнения (3)—(4) при условии (13) будут ковариантны, если

$$\Psi(z_{12}) \to S_x \Psi(z_{12}), \tag{20}$$

где

$$S_x \equiv \exp(-i(\sigma_2^{\mu\nu} + \sigma_3^{\mu\nu})\theta_{\mu\nu}/4),$$

$$\sigma_a^{\mu\nu} = [\Gamma_a'^\mu, \Gamma_a'^\nu], \qquad a = 2, 3, \Gamma_2'^\mu = \Gamma_2^\mu.$$

В четырехмерном случае преобразование (20) отвечало бы состояниям поля со спином 0,1 или 1/2 [11], но в восьмимерном случае такая интерпретация не имеет смысла. В четырехмерном физическом простр інстве — времени наблюдаемыми будут состояния поля $\breve{\Psi}(x)$, описывающего 4 поколения фермионов.

7. *Заключение*

Принятая автором интерпретация данной модели существенно опирается на то, что в стандартной модели сильных и электрослабых взаимодействий с той же группой глобальной симметрии и почти совпадающими допустимыми мультиплетами уже проведены исследов^ния локальных симметрий и калибровочных взаимодействий. Понятно, что нелокальность модели остается при этом фактором, неучтенным явным образом (хотя такие следствия нелокальности, как тип группы симметрии, учтены).

Отметим, что тип группы внутренней симметрии является следствием принятой модели и зависит от значений y_A^μ — только для нелокальной модели с $y_A^\mu \not\equiv 0$ группой симметрии будет $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$.

Перечислим основные следствия рассмотренной модели, точно совпадающие или несущественно отличающиеся от принимаемых в стандартной модели начальных постулатов: фундаментальные фермионы образуют ряд поколений (в модели их 4); группой глобальной симметрии в поколении является $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$; мультиплеты в разных поколениях преобразуются по переплетенным представлениям группы; допустимый мультиплет модели может содержать второй $SU(2)_R$-синглет в лептонном секторе, в остальном совпадает с мультиплетом стандартной модели.

Приложение 1

Представление для матриц Γ^μ_a

$$\Gamma^0_1 = \Gamma^0_2 = \Gamma^0_3 \equiv \Gamma^0,$$
$$\Gamma^0 = I^2 \times \sigma^3 \times I^2 \times I^2,$$
$$\Gamma^k_1 = I^2 \times i\sigma^2 \times \sigma^k \times I^2,$$
$$\Gamma^k_2 = \sigma^1 \times i\sigma^2 \times I^2 \times \sigma^k,$$
$$\Gamma^k_3 = -\sigma^1 \times \sigma^3 \times \sigma^k \times I^2.$$

Матрица $\Gamma^5 = \Gamma^0_1\Gamma^1_1\Gamma^2_1\Gamma^3_1 = I^2 \times \sigma^1 \times I^4$; явный вид матриц $\Gamma^\mu_{a\pm}$:

$$\Gamma^0_\pm = I^2 \times \sigma_\pm \times I^2 \times I^2,$$
$$\Gamma^k_{1\pm} = \pm I^2 \times \sigma_\pm \times \sigma^k \times I^2,$$
$$\Gamma^k_{2\pm} = \pm \sigma^1 \times \sigma_\pm \times I^2 \times \sigma^k,$$
$$\Gamma^k_{3\pm} = -\sigma^1 \times \sigma_\pm \times \sigma^k \times I^2,$$

где $\sigma_\pm \equiv \sigma^3 \pm i\sigma^2$.

Приложение 2

Представление для матриц G_A

$$G_1 = I^{16}, \quad G_2 = G_5G_6, \quad G_3 = G_5G_7, \quad G_4 = G_5G_8,$$
$$G_5 = \sigma^1 \times I^8, \quad G_8 = I^8 \times \sigma^1,$$
$$G_6 = I^8 \times r^2 + \sigma^1 \times I^4 \times r^4,$$
$$G_7 = I^8 \times r^1 + \sigma^1 \times I^4 \times r^3,$$

где кроме матриц Паули $\sigma'^\mu \equiv (I^2, \sigma^1, i\sigma^2, \sigma^3)$ использован ещё один базис для 2×2 матриц над полем $R: (r^a) = (r^1, r^2, r^3, r^4)$, причем $r^1 + r^3 = I^2$, $r^2 + r^4 = \sigma^1$, $r^1 - r^3 = \sigma^3$, $r^2 - r^4 = i\sigma^2$, т.е.

$$r^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что восемь матриц $(\sigma'^\mu, -\sigma'^\mu)$ образуют представление D_4, тогда как множество $\{0, r^a\}$ является относительно умножения инверсной полугруппой с идемпотентами r^1, r^3 [13].

Приложение 3

Построение матриц Λ_{yA}

Чтобы упростить (9), примем $M_A = N_A G_A^{-1}$, где N_A — некоторая новая матрица. Т.к. $[G_A, \Gamma^\mu_1] = 0$, получим из (9)

$$N_A^{-1}\Gamma^\mu_{1\pm} = \Gamma^\nu_{1\pm}\Lambda_{yA\nu}{}^\mu,$$

или в явном виде, обозначая $(\sigma^{\mu}_{\pm}) \equiv (I^2, \pm\sigma^k)$:

$$N_A^{-1}(I^2 \times \sigma_{\pm} \times \sigma^{\mu}_{\pm} \times I^2) = I^2 \times \sigma_{\pm} \times \sigma^{\nu}_{\pm} \Lambda_{yA}{}^{\mu}_{\nu} \times I^2.$$

Это равенство будет выполняться, если $N_A^{-1} = I^4 \times n_A \times I^2$, при условии

$$n_A \sigma^{\mu}_{\pm} = \sigma^{\nu}_{\pm} \Lambda_{yA}{}^{\mu}_{\nu}.$$

Для $\mu = 0$, когда $\sigma^0_{\pm} = I^2$, получим

$$n_A = \sigma^{\nu}_{\pm} \Lambda_{yA}{}^{0}_{\nu};$$

анализ последнего уравнения при других μ дает ограничения на $\Lambda_{yA}^{-}{}^{\mu}_{\nu}$. Эти ограничения таковы, что если Λ_{yA+} преобразует координаты в уравнении для Ψ_R, Λ_{yA-} — для Ψ_L, и $\Lambda_{yA+} = \Lambda_{yA-} = \Lambda_{yA}$, то $\Lambda_{yA} = aI^4$, где a — число. Если же допустить, что $\Lambda_{yA+} \neq \Lambda_{yA-}$, то всякая $\Lambda_{yA\pm}$ должна иметь структуру:

$$\Lambda_{yA+} = aI^4 + bB_1 + cB_2 + dB_3,$$

$$\Lambda_{yA-} = a'I^4 + b'B_1^* + c'B_2^* + d'B_3^*,$$

где a, b, c, d и a', b', c', d' — некоторые числа, $*$ — комплексное сопряжение, B_k, $k = 1, \ldots, 3$ — матрицы вида

$$B_1 \equiv r^1 \times \sigma^1 - r^3 \times \sigma^2,$$

$$B_2 \equiv \sigma^1 \times r^1 + \sigma^2 \times r^3,$$

$$B_3 \equiv r^2 \times r^2 + r^4 \times r^4 + ir^2 \times r^4 - ir^4 \times r^2.$$

Приложение 4

Представление для матриц ϑ_A

Представление группы D_4 образуют матрицы $\vartheta_1 = I_{16}$, $\vartheta_5 = \vartheta$ (см. (15)), ϑ_{A+4}, $= \vartheta_5 \vartheta_A$, $A = 1, \ldots, 4$, с

$$\vartheta_2 = r^2 \times I^2 \times I^4 + r^4 \times I^2 \times R,$$

$$\vartheta_3 = \sigma^1 \times I^2 \times R,$$

$$\vartheta_4 = r^1 \times I^2 \times I^4 + r^3 \times I^2 \times R,$$

где $R = r^1 \times r^1 + r^3 \times r^3 + r^2 \times r^4 + r^4 \times r^2$, $\vartheta = I^4 \times R$.

В уравнении (12) для $M_A = \vartheta_A^{-1}$ и $\Lambda_x = I^4$

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_a = \vartheta_A \Gamma^{\mu}_a \vartheta_A^{-1}.$$

REFERENCES

[1] T. Takabayasi, *Prog. Theor. Phys.* **48**, 1718 (1972).
[2] H. Harari, N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B98**, 269 (1980).
[3] H. Terazava, *Phys. Lett.* **133B**, 57 (1983).
[4] G. Girardi, S. Narison, M. Perrottet, *Phys. Lett.* **133B**, 234 (1983).
[5] R. Arnowitt, Pran Nath, *Phys. Rev.* **D36**, 3423 (1987).

[6] K. S. Babu, X.-G. He, Xue-Qian Li, Sandip Pakvasa, *Phys. Lett.* **205B**, 540 (1988).
[7] V. A. Lubimov, E. G. Novikov, V. Z. Nozik et al., *Phys. Lett.* **94B**, 266 (1980).
[8] V. I. Man'ko, M. A. Markov, *Pis'ma v Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **43**, 453 (1986).
[9] M. A. Ivanov, A manuscript deposited in the Institute of Scientific and Technical Information (Moscow) 19.12.88, No 8842-B88.
[10] L. O'Raifeartaigh, *Phys. Rev.* **D139**, 1052 (1965).
[11] E. Durand, *Phys. Rev.* **D11**, 3405 (1978).
[12] E. E. Salpeter, *Phys. Rev.* **87**, 328 (1952).
[13] A. G. Kurosh, *General Algebra*, Nauka, Moskow 1974, p. 20 (in Russian).
[14] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Company 1964.