

$N = 2$ СУПЕРРИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И КОНФОРМНЫЕ СУПЕРПОЛЯ

С. А. Дуплий

Харьковский государственный университет

SEMIGROUP OF $N = 1, 2$ SUPERCONFORMAL TRANSFORMATIONS AND CONFORMAL SUPERFIELDS

S. DUPLIJ

(Received February 9, 1990)

All possible $N = 1$ and $N = 2$ superconformal transformations are presented and classified into two (for $N = 1$) and three (for $N = 2$) types. Only the first one corresponds to the superconformal group, all others are elements of a semigroup. They are noninvertible and do not admit an infinitesimal form. The set of them is the ideal of the full superconformal semigroup. The permanent is used when classifying $N = 2$ superconformal transformations and finding the $N = 2$ Berezinian. Also the transformations from $N = 1$ to $N = 2$ and from $N = 2$ to $N = 1$ are found. The structure of the superfields which are conformal outside super Riemann surface is obtained.

PACS numbers: 11.17.+y; 11.30.Pb; 02.20.Mp

1. Введение

Суперконформная инвариантность является основополагающим принципом в построении суперструнных теорий [1], претендующих на единое и последовательное описание всех взаимодействий. С одной стороны, классическому вакууму суперструнной теории отвечает некоторая двумерная суперконформная теория поля [2]. С геометрической точки зрения [3] мировой лист суперструны представляет собой аналог римановой поверхности с внедренными антикоммутирующими переменными — суперриманову поверхность [4] или суперконформное многообразие [5] — суперплоскость, профакторизованную суперконформными преобразованиями локальных координат. При ковариантном квантовании фермионной струны методом функционального интеграла [6] вычисление амплитуд сводится к интегрированию по пространству супермодулей [7] — множеству неэквивалентных классов дву-

* Address: Theoretical Physics, Kharkov State University, Kharkov-77, 310077, USSR.

мерных суперконформных многообразий. Расширение $N = 1$ суперконформной симметрии до $N = 2$, впервые рассмотренное в $U(1)$ -струне Невью-Шварца [8], играет важную роль при построении реалистичных суперструнных моделей с $N = 1$ пространственно-временной суперсимметрией [9], где в качестве теории на мировом листе используется $N = 2$ суперконформная теория поля [10]. Во-вторых, $N = 2$ суперконформная симметрия возникает при исследовании критических явлений в двумерных статистических моделях [11]. При анализе большинства из этих проблем ключевым является конкретный вид суперконформных преобразований. В данной работе детально проанализирована структура $N = 1$ и $N = 2$ суперконформных преобразований, последние из них проклассифицированы в терминах перманента нечетно-нечетной части суперматрицы перехода, а также, кроме того, показано, что специфичным для суперсимметричного случая является существование возможных экзотических преобразований с вырожденной числовой частью, которые могут соответствовать только суперконформной полугруппе. Найдена также структура суперполей, которые обладают суперконформной инвариантностью при супераналитических, а не суперконформных, преобразованиях. Изложение ведется на языке локальных координат и физическом уровне строгости. Рассмотрение введенных конструкций в рамках бескоординатного подхода может быть проведено с помощью [12].

2. $N = 1$ суперконформная инвариантность

Комплексное $(1|1)$ -мерное суперпространство $C^{1,1}$ определяется в подходе [13] как внешнее произведение четной и нечетной частей (бесконечномерной [14]) алгебры Банаха-Грассмана над полем C с естественной Z_2 -градуировкой и локально описывается набором $Z = (z, \theta)$, где z — четная, θ — нечетная координаты. Супераналитическое отображение области в после разложения в ряд по θ имеет вид

$$\tilde{z} = f(z) + \theta\chi(z), \quad \tilde{\theta} = \psi(z) + \theta g(z). \quad (1)$$

Здесь и далее латинскими буквами обозначены четные гладкие функции $C^{1,0} \rightarrow C^{1,0}$, греческими — нечетные $C^{1,0} \rightarrow C^{1,0}$. Березиниан [15] отображения (1) равен

$$J = \text{Ber}(\tilde{z}, \tilde{\theta}/z, \theta) = \frac{f'(z)}{g(z)} + \frac{\chi(z)\psi'(z)}{g^2(z)} + \theta \left[\frac{\chi(z)}{g(z)} \right]' \quad (2)$$

и определен при $m[g(z)] \neq 0$, где $m[x]$ обозначает числовую часть x . Для обратимости (1) необходимо $m[J] \neq 0$.

В каждой точке $C^{1,1}$ можно выделить $(0|1)$ -мерное подпространство касательного пространства, которому отвечает дифференциальный оператор D (суперпроизводная), имеющий для канонической локальной координатной системы [16] вид

$$D = \partial_\theta + \theta\partial_z, \quad D^2 = \partial_z(\partial_\theta \equiv \partial/\partial\theta), \quad \partial_z \equiv \partial/\partial z.$$

Под действием преобразований (1) оператор D переходит в

$$D = (D\tilde{\theta})\tilde{D} + (D\tilde{z} - \tilde{\theta}D\tilde{\theta})\tilde{D}^2. \quad (3)$$

Чтобы (0|1)-мерное подпространство касательного пространства $C^{1,1}$ не зависело от выбора локальной системы координат [17], необходима однородность преобразования оператора D в (3). Реализацию этого анзаца можно назвать суперконформной инвариантностью для дифференциального оператора D . Добиться этого можно тремя способами. Во-первых, обращение в нуль выражения в скобках в (3) приводит к дальнейшему ограничению на преобразования координат, которые называются суперконформными преобразованиями [17]. Во-вторых, равенство нулю второго сомножителя в неоднородном слагаемом в (3) позволяет выделить класс конформных суперполей, суперпроизводные которых преобразуются однородно при супераналитических (1) преобразованиях. В-третьих, как промежуточный, можно рассмотреть случай, когда оба сомножителя в неоднородном слагаемом в (3) отличны от нуля, но их произведение равно нулю, например, если они пропорциональны одной и той же нильпотентной величине, степень нильпотентности которой равна двум.

3. $N = 1$ суперконформные преобразования

Первая возможность зануления неоднородного слагаемого в (3) приводит к уравнению

$$D\tilde{z} = \tilde{\theta}D\tilde{\theta} \quad (4)$$

или

$$\partial_z \tilde{z} + \tilde{\theta} \partial_z \tilde{\theta} = (D\tilde{\theta})^2 \quad (5)$$

что и определяет суперконформные преобразования координат. Такие гладкие и обратимые преобразования могут служить функциями перехода на пересечении (1|1)-мерных областей (карт), из которых склеены суперконформные многообразия [5, 17] или $N = 1$ суперримановы поверхности [4, 18]. Из (4) следует, что только при суперконформных преобразованиях конформный множитель для оператора D в (3) равен березиниану [19]

$$J^{\text{scf}} = D\tilde{\theta} = \text{Ber}(\tilde{z}, \tilde{\theta}/z, \theta). \quad (6)$$

Разрешая уравнения (4) для компонент

$$\begin{aligned} \chi(z) &= g(z)\psi(z), \\ f'(z) &= g^2(z) - \psi(z)\psi'(z), \end{aligned} \quad (7)$$

получаем $N = 1$ суперконформные преобразования [17, 18]

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= f(z) + \theta\psi(z)\sqrt{f'(z)}, \\ \tilde{\theta} &= \psi(z) + \theta\sqrt{f'(z) + \psi(z)\psi'(z)}, \end{aligned} \quad (8)$$

для которых

$$J_1^{\text{scf}} = \sqrt{f'(z) + \psi(z)\psi'(z)} + \theta\psi'(z). \quad (9)$$

Будем называть (8) преобразованиями типа I. Они соответствуют бесконечномерной $N = 1$ суперконформной группе, генерируемой $g = [f, \psi]$ с единицей $e = [z, 0]$, законом умножения

$$[f_1, \psi_1] \otimes [f_2, \psi_2] = [f_1(f_2) + \psi_2\psi_1(f_2)\sqrt{f'_1(f_2)} \\ \psi_1(f_2) + \psi_2\sqrt{f'_1(f_2) + \psi_1(f_2)\psi'_1(f_2)}] \quad (10)$$

и обратным элементом

$$[f, \psi]^{-1} = \left[f^{(-1)}, -\frac{\psi(f^{(-1)})}{\sqrt{f'(f^{(-1)})}} \right]. \quad (11)$$

(здесь $f^{(-1)}$ — обратная функция).

Среди суперконформных преобразований, определяемых уравнениями (4), с отличным от нуля березинианом (6), можно выделить топологически неприводимый к (8) класс преобразований (назовем их преобразованиями типа II), у которых суперякобиан чисто нильпотентный $m[J_{\Pi}^{\text{scf}}] = 0$. Такие преобразования необратимы и соответствуют переходам в четном секторе между чисто числовыми и чисто нильпотентными величинами. Их можно трактовать как уравнения суперкривых [20], но имеющих нетривиальную (нецилиндрическую [21]) топологию и самопересечения в нильпотентных направлениях [22], а также вырожденную числовую часть. Для таких преобразований $m[g(z)] = 0$ и, используя, например, анзац $g(z) = \alpha(z)\beta(z)$, получаем

$$\tilde{z} = f_N(z) + \theta\alpha(z)\beta(z)\psi(z), \\ \tilde{\theta} = \psi(z) + \theta\alpha(z)\beta(z), \\ f'_N(z) = \psi'(z)\psi(z). \quad (12)$$

Непосредственное интегрирование последнего уравнения невозможно из-за нильпотентности $\psi(z)$, поэтому в общем виде его решение можно представить только в виде бесконечного ряда

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\partial_z)^n \left[\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \psi'(z)\psi(z) \right]. \quad (13)$$

Такое решение удобно, если $\psi(z)$ — полиномиальная функция, тогда, начиная с некоторого n_0 , $\partial_z^n \psi(z) = 0$, и ряд обрывается.

Из-за отсутствия единичного и обратного элементов преобразования (12) могут соответствовать только полугруппе [23]. Отметим, что березиниан (2) неопределен для преобразований (12), поскольку $m[g(z)] = 0$. Тем не менее, для вычисления

суперякобиана преобразований можно формально воспользоваться первым соотношением (6), тогда

$$J_{\Pi}^{\text{scf}} = D\bar{\theta} = \alpha(z)\beta(z) + \theta\psi'(z) \quad (14)$$

и видно, что суперякобиан нильпотентный, однако, его степень нильпотентности равна трем, т.к. $(J_{\Pi}^{\text{scf}})^2 = 2\theta\alpha(z)\beta(z)\psi'(z) \neq 0$.

Выясним, какие из преобразований, удовлетворяющих (4), могут быть реализованы как линейные преобразования в суперпроективном пространстве $CP^{1,1}$ [24] после перехода к однородным координатам $z = x/y$, $\theta = \eta/y$, $X^T \equiv (x, y, \eta) \in C^{2,1}$. Для этого поставим в соответствие общему (5 4)-мерному линейному отображению в $CP^{1,1}$

$$\tilde{X} = MX,$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ \gamma & \delta & e \end{pmatrix}, \quad (15)$$

дробно-линейное преобразование в неоднородных координатах

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \frac{az+b}{cz+d} + \theta \frac{(\beta a - \alpha c)z + \beta b - \alpha d}{(cz+d)^2}, \\ \bar{\theta} &= \frac{\gamma z + \delta}{cz+d} + \theta \frac{(\beta \gamma + e c)z + \beta \delta + e d}{(cz+d)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Суперконформные условия (4) дают четыре уравнения на параметры суперматрицы (15). Решение типа I приводит к (3/2)-мерной супергруппе матриц [17, 24]

$$M_I^{\text{scf}} = \begin{pmatrix} a & b & \gamma b - \delta a \\ c & d & \gamma d - \delta c \\ \gamma & \delta & 1 + \frac{3}{2} \delta \gamma \end{pmatrix}, \quad (ad - bc = 1), \quad (17)$$

действительная подгруппа которой, имеющая единичный березиниан, изоморфна $OSp(1,2)$ [25]. Описание классов суперконформных многообразий может быть проведено с помощью дискретных подгрупп этой супергруппы [24, 26]. В неоднородных координатах для (17) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \frac{az+b}{cz+d} + \theta \frac{\gamma z + \delta}{(cz+d)^2}, \\ \bar{\theta} &= \frac{\gamma z + \delta}{cz+d} + \theta \frac{1 + \frac{1}{2} \delta \gamma}{cz+d}. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение типа II отвечает (3|4)-мерной суперполугруппе

$$M_{\Pi}^{\text{scf}} = \begin{pmatrix} a\gamma\delta & b\gamma\delta & \mu\delta\gamma \\ c & d & \lambda\delta\gamma \\ \gamma & \delta & \mu(\gamma d - \delta c) \end{pmatrix} \quad (19)$$

и в неоднородных координатах соответствует преобразованиям

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \frac{az+b}{cz+d} \gamma\delta + \theta\mu \frac{\gamma\delta}{cz+d}, \\ \tilde{\theta} &= \frac{\gamma z + \delta}{cz+d} + \theta\mu \frac{\gamma d - \delta c}{cz+d}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $ad - bc = 1$. Для вычисления суперякобиана этих преобразований снова используем (6) и получим

$$J_{\Pi}^{\text{scf}} = \frac{\gamma d - \delta c}{cz+d} \left(\mu + \frac{\theta}{cz+d} \right). \quad (21)$$

Другое решение типа II

$$M_{\Pi\text{deg}}^{\text{scf}} = \begin{pmatrix} \kappa\gamma\delta & \kappa d\gamma\delta & \kappa\alpha\gamma\delta \\ c & d & \alpha \\ \gamma & \delta & e\gamma\delta \end{pmatrix} \quad (22)$$

соответствует полному вырождению четной неоднородной координаты

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \kappa\gamma\delta, \\ \tilde{\theta} &= \frac{\gamma z + \delta}{cz+d} + \theta \left[\frac{e\gamma\delta}{cz+d} + \alpha \frac{\gamma z + \delta}{(cz+d)^2} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

и с помощью (6) получаем суперякобиан

$$J_{\Pi\text{deg}}^{\text{scf}} = \frac{e\gamma\delta}{cz+d} + \alpha \frac{\gamma z + \delta}{(cz+d)^2} + \theta \frac{\gamma d - \delta c}{(cz+d)^2}. \quad (24)$$

4. $N = 1$ супердифференциалы и суперполя

Абелевы $N = 1$ супердифференциалы $d\tau$ определяются [4] как величины, преобразующиеся с помощью березиниана (6) $d\tilde{\tau} = (D\tilde{\theta})d\tau$. В интегралах они ведут себя как супермера $d\tilde{\tau}d\tilde{\theta}$ [15]. Очевидно, что $d\tau^2 = dZ$, где $dZ = dz + \theta d\theta$ — 1-форма, соответствующая метрике на суперримановой поверхности [27]. Отметим, что условие $J = D\tilde{\theta}$ вместе с требованием, чтобы суперпроизводные преобразовывались ковариантно с конформным множителем, разным березиниану, приводит

к тем же уравнениям на функции перехода, что и (7). В общем случае $(p/2, q/2)$ -супердифференциалом называется величина, преобразующаяся по закону [5]

$$\phi\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)(z, \theta) (d\tau)^p (\overline{d\tau})^q = \tilde{\phi}\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)(\tilde{z}, \tilde{\theta}) (d\tilde{\tau})^p (\overline{d\tilde{\tau}})^q. \quad (25)$$

Поэтому коэффициенты, представляющие собой суперполя веса $(p/2, q/2)$, будут преобразовываться следующим образом

$$\phi\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)(z, \theta) = (D\tilde{\theta})^p (\overline{D\tilde{\theta}})^q \tilde{\phi}\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)(\tilde{z}, \tilde{\theta}). \quad (26)$$

Так, для $(k, 0)$ -суперполей и преобразований типа I получаем $\phi_{(k,0)}(z, \theta) \equiv u(z) + \theta\lambda(z)$

$$\tilde{u}(f(z)) = F^{-k-1} [u(z) (F + \kappa\psi(z)\psi'(z)) + \lambda(z)\psi(z) \sqrt{F}],$$

$$\tilde{\lambda}(f(z)) = F^{-k-1} \left[\lambda(z) \sqrt{F} - 2\kappa u(z)\psi'(z) - u'(z)\psi(z) + \kappa u(z)\psi(z) \frac{F'}{F} \right], \quad (27)$$

где $F \equiv f'(z)$. Для $(0, 0)$ -суперполей и преобразований типа II находим

$$u(z) = \tilde{u}(f(z)) + \psi(z)\tilde{\lambda}(f(z)),$$

$$\lambda(z) = \alpha(z)\beta(z) [\tilde{u}'(f(z))\psi(z) + \tilde{\lambda}(f(z))]. \quad (28)$$

Специфичным для суперсимметричного случая представляется рассмотрение такого класса суперполей, $\phi^{\text{out}}(z, \theta)$, для которых закон ковариантного преобразования их суперпроизводных $D\phi^{\text{out}}(z, \theta) = (D\tilde{\theta})\tilde{D}\phi^{\text{out}}(\tilde{z}, \tilde{\theta})$ выполняется при супераналитических, а не суперконформных, преобразованиях координат. Такие суперполя можно назвать конформными вне суперримановой поверхности. Их структура определяется супераналитическими функциями перехода (1) с помощью уравнения (см. (3))

$$\tilde{D}^2 \tilde{\phi}^{\text{out}}(\tilde{z}, \tilde{\theta}) = 0 \quad (29)$$

что дает (вследствие нильпотентности $\tilde{\theta}$)

$$\tilde{\phi}^{\text{out}}(\tilde{z}, \tilde{\theta}) = \tilde{\theta}\gamma + c. \quad (30)$$

Решение для нечетного суперполя можно получить, изменяя четность констант на противоположную. Если определить вес конформного суперполя по аналогии с (26), то общая структура $(p/2, 0)$ -суперполя будем иметь вид [28]

$$\begin{aligned} \phi\left(\frac{p}{2}, 0\right)(z, \theta) &= g^p(z) (\psi(z)\gamma + c) \\ &+ \theta g^{p-1}(z) [\gamma g^2(z) + p\psi'(z) (\psi(z)\gamma + c)]. \end{aligned} \quad (31)$$

Видно, что конформные суперполя зависят только от функций перехода из нечетного сектора соответствующих супераналитических преобразований (1),

а конформный множитель $D\tilde{\theta} = g(z) + \theta\psi'(z)$ не равен в общем случае их березиниану (2). Условие такого равенства приводит к системе уравнений, аналогичной (7), но в первом уравнении может содержаться нечетная константа $\chi(z) = g(z)$ ($\varrho + \psi(z)$), что приводит к следующим преобразованиям типа I, для которых конформный множитель совпадает с березинианом вне суперримановой поверхности, $D\tilde{\theta} = \text{Ber}(\tilde{z}, \tilde{\theta}/z, \theta)$,

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f(z) + \theta(\psi(z) + \varrho) \sqrt{f'(z)}, \\ \tilde{\theta} &= \psi(z) + \theta \sqrt{f'(z) + (\psi(z) + \varrho)\psi'(z)},\end{aligned}\quad (32)$$

а соответствующее конформное суперполе веса $(k, 0)$ равно

$$\begin{aligned}\phi_{(k,0)}^{\text{out}}(z, \theta) &= F^{k-1} [F + k(\psi(z) + \varrho)\psi'(z)] \\ &\times (\psi(z)\gamma + c) + \theta \left[2k(\psi(z)\gamma + c) \frac{\psi'(z)}{\sqrt{F}} \right] \\ &+ F^{k-1/2} (F + (k + \frac{1}{2})(\psi(z) + \varrho)\psi'(z))\gamma.\end{aligned}\quad (33)$$

Из (31) видно, что при $c = 1$ конформное суперполе становится чисто нильпотентным. И наоборот, если из нильпотентного суперполя можно выделить нильпотентную константу противоположной ему четности, то существуют супераналитические, а не суперконформные преобразования, под действием которых его суперпроизводные преобразуются однородно. Например, если конформное суперполе имеет вид $\phi_{(\frac{p}{2}, 0)}^{\text{out}}(z, \theta) = (\lambda(z) + \theta u(z))\gamma$, то нечетный сектор искомым преобразований определяется функциями

$$\begin{aligned}g(z) &= u(z)^{\frac{1}{p+1}} + \frac{p}{p+1} \cdot \frac{\lambda(z)\lambda'(z)}{u^2(z)}, \\ \psi(z) &= \lambda(z)u(z)^{-\frac{p}{p+1}}.\end{aligned}\quad (34)$$

а четный сектор произволен. Подобным способом находятся преобразования, для которых конформный множитель равен березиниану. Преобразования (34) не зависят от выделенной из суперполя константы, а определяются функциональной зависимостью его компонент от z . Однако, можно найти такие преобразования, которые зависят лишь от выделяемой нильпотентной константы γ , если заменить суперконформное условие (4) следующим

$$D\tilde{z} - \tilde{\theta}D\tilde{\theta} = \gamma(a(z) + \theta\mu(z)) \quad (35)$$

тогда преобразования типа I определяются формулами

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f(z) + \theta[\psi(z) \sqrt{f'(z) + \gamma\mu(z) + \gamma a(z)}], \\ \tilde{\theta} &= \psi(z) + \theta \sqrt{f'(z) + \psi(z)\psi'(z) + \gamma\mu(z)},\end{aligned}\quad (36)$$

а для преобразований типа II можно получить

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f_N(z) + \theta[\alpha(z)\beta(z)\psi(z) + \gamma a(z)], \\ \tilde{\theta} &= \psi(z) + \theta\alpha(z)\beta(z), \\ f'_N(z) &= \psi'(z)\psi(z) + \mu(z)\gamma.\end{aligned}\quad (37)$$

5. $N = 2$ суперпространство и расстояние

С комплексным базисе $(1|2)$ -мерное суперпространство $C^{1,2}$ локально описывается набором $Z = (z, \theta^+, \theta^-)$, где z и $\theta^\pm$ — четная и нечетные комплексные координаты. В $C^{1,2}$ $(0|2)$ -мерное подпространство касательного пространства порождается дифференциальными операторами $D^\pm$, которые в локальных координатах имеют вид $D^\pm = \partial_\mp + \theta^\pm \partial_z$ ($\partial_\pm \equiv \partial/\partial\theta^\pm$) и образуют алгебру $\{D^+, D^-\} = 2\partial_z$, $D^{\pm 2} = 0$.

В суперпространстве $C^{1,2}$ расстояние $Z_{12} \equiv \langle Z_1 | Z_2 \rangle$ является решением уравнений [5] $Z_{12} = D^\pm Z_{12} = 0$ для совпадающих точек, кроме того $Z_{12} = -Z_{21}$. Общее решение, линейное по четной координате, имеет вид

$$\begin{aligned}Z_{12} &= (z_1 - z_2) [1 + r(\theta_1^+ - \theta_2^+)(\theta_1^- - \theta_2^-) + \alpha_+(\theta_1^+ \theta_2^+ \theta_2^- \\ &\quad + \theta_2^+ \theta_1^+ \theta_1^-) + \alpha_-(\theta_1^- \theta_2^- \theta_2^+ + \theta_2^- \theta_1^- \theta_1^+)] - \theta_1^+ \theta_2^- - \theta_1^- \theta_2^+.\end{aligned}\quad (38)$$

Это расстояние чувствительно к сдвигам вдоль нечетных направлений, что может иметь отношение к проблеме неоднозначности интегрирования по супермодулям [29] в $N = 2$ случае. Так, например,

$$\langle z_1, c\theta^+, c\theta^- | z_2, \theta^+, \theta^- \rangle = z_1 - z_2 + r(1 - c)^2 \theta^+ \theta^- \quad (39)$$

не совпадает с $\langle z_1, \theta^+, \theta^- | z_2, \theta^+, \theta^- \rangle = z_1 - z_2$ в отличие от стандартных значений параметров $r = 0, \alpha_\pm = 0$ [10]. В общем случае эти значения должны определяться требуемой симметрией Z_{12} . Глобальная $N = 2$ суперсимметрия приводит к $\alpha_\pm = 0$. Однако, если $\alpha_\pm \neq 0$, то расстояние (38) инвариантно относительно подгруппы глобальной $N = 2$ суперсимметрии, параметры которой зависят от $\alpha_\pm$

$$\varepsilon_\pm(\alpha_+, \alpha_-) = a_\pm \alpha_\pm \pm b \alpha_\mp + \gamma_\pm \alpha_\pm \alpha_\mp, \quad (40)$$

Следовательно, можно ввести $(1|2)$ -мерное комплексное суперпространство с координатами $(r, \alpha_+, \alpha_-) \in D^{1,2}$ которое представляет собой как-бы „суперпространство расстояний“ $D^{1,2}$ между двумя фиксированными точками Z_1 и Z_2 суперпространства $C^{1,2}$. В $C^{1,2}$ глобальной суперсимметрии расстояния Z_{12} отвечает все $(1|0)$ -мерное подпространство суперпространства $D^{1,2}$, для которого $\alpha_\pm = 0$, а также поверхности, параллельные его четной координате r , задаваемые уравнениями (40).

6. $N = 2$ суперконформная инвариантность

Супераналитическое отображение области в суперпространстве $C^{1,2}$ после разложения в ряд по нечетным координатам определяется 12 функциями на $C^{1,0}$ (6 четных и 6 нечетных)

$$\begin{aligned}\bar{z} &= f(z) + \theta^+ \chi_-(z) + \theta^- \chi_+(z) + \theta^+ \theta^- h(z), \\ \bar{\theta}^\pm &= \psi_\pm(z) + \theta^\pm g_{\pm\mp}(z) + \theta^\mp g_{\pm\pm}(z) + \theta^\pm \theta^\mp \lambda_\pm(z).\end{aligned}\quad (41)$$

Под действием этих преобразований дифференциальные операторы $D^\pm$ переходят в

$$\begin{aligned}D^\pm &= (D^\pm \bar{\theta}^-) \tilde{D}^+ + (D^\pm \bar{\theta}^+) \tilde{D}^- \\ &+ (D^\pm \bar{z} - \bar{\theta}^+ D^\pm \bar{\theta}^- - \bar{\theta}^- D^\pm \bar{\theta}^+) \partial_{\bar{z}}.\end{aligned}\quad (42)$$

Требование независимости $(0|2)$ -мерного подпространства касательного пространства в $C^{1,3}$, т.е. глобального определения дифференциальных операторов $D^\pm$ приводит к необходимости зануления неоднородного слагаемого в (42). Как и в $N = 1$ случае будем рассматривать три возможности для этого: дальнейшее ограничение на преобразования координат обращает в нуль первый сомножитель в неоднородном слагаемом в (42) и приводит к $N = 2$ суперконформным преобразованиям, рассмотрение $N = 2$ конформных суперполей, для которых второй сомножитель там же равен нулю, и промежуточный случай, когда структура каждого сомножителя такова, что их произведение исчезает, несмотря на то, что каждый из них отличен от нуля.

Если какие-либо две из четырех величин $D^\pm \bar{\theta}^\pm$ равны нулю, то вместо (42) удобно воспользоваться одной из следующих эквивалентных формул аналогичных $N = 1$ случаю (3)

$$\begin{aligned}D^\pm &= (D^\pm \bar{\theta}^\mp) \tilde{D}^\pm + (D^\pm \bar{\theta}^\pm) \tilde{\partial}_\pm + (D^\pm \bar{z} - \bar{\theta}^\pm D^\pm \bar{\theta}^\mp) \partial_{\bar{z}}, \\ D^\pm &= (D^\pm \bar{\theta}^\pm) \tilde{D}^\mp + (D^\pm \bar{\theta}^\mp) \tilde{\partial}_\mp + (D^\pm \bar{z} - \bar{\theta}^\mp D^\pm \bar{\theta}^\pm) \partial_{\bar{z}}, \\ D^\pm &= (D^\pm \bar{\theta}^-) \tilde{D}^+ + (D^\pm \bar{\theta}^+) \tilde{\partial}_+ + (D^\pm \bar{z} - \bar{\theta}^+ D^\pm \bar{\theta}^-) \partial_{\bar{z}}, \\ D^\pm &= (D^\pm \bar{\theta}^+) \tilde{D}^- + (D^\pm \bar{\theta}^-) \tilde{\partial}_- + (D^\pm \bar{z} - \bar{\theta}^- D^\pm \bar{\theta}^+) \partial_{\bar{z}},\end{aligned}\quad (43)$$

и описывающих переходы в состояния с определенным $U(1)$ -зарядом.

Для суперпроизводных с центральным зарядом $D_q^\pm = D^\pm + q_{\pm\pm} \theta^\mp$, удовлетворяющих соотношениям $\{D_q^+, D_q^-\} = 2\partial_z$ и $(D_q^\pm)^2 = q_{\pm\pm}$, имеем

$$\begin{aligned}. D_q^\pm &= (D^\pm \bar{\theta}^-) \tilde{D}_q^+ + (D^\pm \bar{\theta}^+) \tilde{D}_q^- \\ &+ (D^\pm \bar{z} - \bar{\theta}^+ D^\pm \bar{\theta}^- - \bar{\theta}^- D^\pm \bar{\theta}^+) \partial_{\bar{z}} \\ &+ q_{\pm\pm} \theta^\mp - \tilde{q}_{\pm\pm} \bar{\theta}^\mp (D^\pm \bar{\theta}^\mp) - q_{--} \bar{\theta}^+ (D^\pm \bar{\theta}^+).\end{aligned}\quad (44)$$

Поэтому, если выбрать для центрального заряда закон преобразования

$$q_{\pm\pm}\theta^{\mp} = \tilde{q}_{++}\tilde{\theta}^-(D^{\pm}\tilde{\theta}^-) + \tilde{q}_{--}\tilde{\theta}^+(D^{\pm}\tilde{\theta}^+), \quad (45)$$

то закон преобразования $N = 2$ суперпроизводных с центральным зарядом и условия $N = 2$ суперконформной инвариантности на функции перехода совпадут с таковыми без центрального заряда. С другой стороны, можно подобрать такие преобразования координат и центрального заряда, чтобы все неоднородное слагаемое в (44), а не каждое из его составляющих, обратилось в нуль, либо найти класс приводящих к этому суперполей, решая соответствующую систему уравнений для их компонент.

7. $N = 2$ суперконформные преобразования

Рассмотрим первую возможность зануления неоднородного слагаемого в (42) — ограничение на функции перехода в (41)

$$D^{\pm}\tilde{z} = \tilde{\theta}^+(D^{\pm}\tilde{\theta}^-) + \tilde{\theta}^-(D^{\pm}\tilde{\theta}^+) \quad (46)$$

что определяет $N = 2$ суперконформные преобразования [29, 30]. Условия (46) можно записать в эквивалентном виде

$$\partial_z\tilde{z} + \tilde{\theta}^+\partial_z\tilde{\theta}^- + \tilde{\theta}^-\partial_z\tilde{\theta}^+ = (D^+\tilde{\theta}^+)(D^-\tilde{\theta}^-) + (D^-\tilde{\theta}^+)(D^+\tilde{\theta}^-) \quad (47)$$

или

$$(D^+\tilde{\theta}^-)(D^+\tilde{\theta}^+) = 0,$$

$$(D^-\tilde{\theta}^+)(D^-\tilde{\theta}^-) = 0. \quad (48)$$

В общем случае эти уравнения имеют много решений, каждое из которых соответствует определенному типу $N = 2$ суперконформных преобразований. В неразрешенном виде рассматривалась лишь одна возможность $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm} = 0$ [30, 31], а также две возможности $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm} = 0$ и $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\mp} = 0$ [32], дробнолинейный вариант которых дан в [33], а расщепленный — в [29, 34]. Четыре общих и разрешенных случая $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm} = 0$, $D^{\pm}\tilde{\theta}^{\mp} = 0$, $D^{\pm}\tilde{\theta}^+ = 0$, $D^{\pm}\tilde{\theta}^- = 0$ представлены в [28]. Ниже будет проведена классификация всех типов решений системы (46)–(48) и соответствующих $N = 2$ суперконформных преобразований, включая, например, и такие, когда каждый сомножитель в (48) не равен нулю, но пропорционален одной и той же нильпотентной величине, степень нильпотентности которой равна двум.

7.1. Классификация $N = 2$ суперконформных преобразований

Если предположить, что в нильпотентных направлениях может существовать топология, отличная от цилиндрической [22], то все $N = 2$ суперконформные преобразования могут быть проклассифицированы на три топологически неэквивалентных типа:

- I. Преобразования, которые могут быть сведены к обычным обратимым конформным отображениям $\bar{z}_0 = f_0(z_0)$, где $z_0 \equiv m[z]$, т.е. подстилающее преобразование невырождено.
- II. Преобразования, для которых подстилающее вырождено.
- III. Преобразования, зависящие от дополнительных по сравнению с (41) нечетных нильпотентных функций.

Такая классификация возникает при рассмотрении матрицы четных функций перехода из (41) в нечетном секторе

$$G = \begin{pmatrix} g_{+-}(z) & g_{++}(z) \\ g_{--}(z) & g_{-+}(z) \end{pmatrix} \quad (49)$$

описывающей расщепленные $N = 2$ суперконформные преобразования [29, 34], для которых все остальные функции перехода, кроме $f(z)$, равны нулю. В координатном базисе $\theta^1, \theta^2 \left((\theta^\pm = U_i^\pm \theta^i, U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}) \right)$ матрице G отвечает матрица $G_0 = U^{-1} G U$, для которой имеем

$$G_0^T G_0 = \text{per } G \cdot I + g_{+-}(z) g_{--}(z) (\sigma_3 + i\sigma_1) + g_{-+}(z) g_{++}(z) (\sigma_3 - i\sigma_1), \quad (50)$$

где I — единичная матрица, σ_i — матрицы Паули,

$$\text{per } G \equiv g_{+-}(z) g_{-+}(z) + g_{++}(z) g_{--}(z) \quad (51)$$

— перманент матрицы G [35], который представляет собой полилинейную и нормированную ($\text{per } I = 1$) функцию элементов матрицы и обладает свойствами

$$\text{per } G^T = \text{per } G; \quad \text{per } (cG) = c^2 \text{per } G, \quad |\text{per } G| \leq \text{per } (|G|). \quad (52)$$

Перманент можно трактовать как скалярное произведение на классе симметрии вполне симметричных тензоров [35].

В терминах перманента матрицы G $N = 2$ суперконформные условия (47) и (48) для расщепленных преобразований могут быть записаны следующим образом

$$\text{per } G = f'(z), \quad (53)$$

$$g_{+-}(z) g_{--}(z) = 0; \quad g_{-+}(z) g_{++}(z) = 0. \quad (54)$$

Из сравнения с (50) следует, что матрица координатного базиса G_0 может стать ортогональной после перенормировки на $\sqrt{\text{per } G}$ (как это делается в [29, 33]), только, если числовая часть перманента отлична от нуля $m[\text{per } G] \neq 0$, но, как будет показано ниже, это условие выполняется лишь для преобразований типа I. Таким образом, расщепленные преобразования полностью определяются из (53) матрицей G , обладающей свойством (54).

Полезно изучить это свойство на примере грассмановых четных 2×2 матриц $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с заданным перманентом $\text{per } A = ad + bc$. Легко убедиться, что свойство

$ac = bd = 0$ сохраняется относительно обычного умножения, поэтому такие матрицы образуют по меньшей мере полугруппу [23]. Их классификация может быть проведена с помощью перманента:

- I. $m[\text{per } A] \neq 0$, тогда у A отлична от нуля либо главная, либо побочная диагональ.
- II. $\text{per } A = 0$, тогда A — мономиальная или биномиальная матрица.
- III. $\text{per } A \neq 0$, $m[\text{per } A] = 0$, тогда матрица A содержит нильпотентные элементы.

Единичный и обратный элементы могут быть определены только для матриц типа I, поэтому они образуют группу относительно обычного умножения, которая представляет собой подгруппу полной линейной группы четных грассмановых 2×2 матриц [36], которая сохраняет свойство $ac = bd = 0$. Его следствием является, например, упрощение формулы Бине-Коши для перманентов [35], которая в данном случае совпадает с аналогичной формулой для детерминантов

$$\text{per}(AB) = \text{per } A \cdot \text{per } B. \quad (55)$$

Похожими становятся и другие формулы

$$\begin{aligned} \text{per}(A^{-1}) &= (\text{per } A)^{-1}, \\ \text{per}(ABA^{-1}) &= \text{per } B. \end{aligned} \quad (56)$$

Кроме того, упрощаются функции от степени матрицы ($n \geq 2$)

$$\begin{aligned} \text{per } A^n &= \det A^n = (ad)^n + (bc)^n, \\ \text{tr } A^n &= a^n + d^n + \frac{1 + (-1)^n}{2} (bc)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned} \quad (57)$$

Классификация функциональных матриц G (49) идентична классификации рассмотренных выше матриц A и совпадает с типом $N = 2$ суперконформных преобразований, а их структура определяет функциональный вид преобразований. Так, преобразования типов I и II зависят от 4 функций на $C^{1,0}$ (12 функций в (41) минус 8 уравнений в (46)). Все четные функции в (41) могут быть выражены через элементы матрицы G , которая является нечетно-нечетной частью суперматрицы перехода $(z, \theta^+, \theta^-) \rightarrow (\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-)$. Из-за свойства (54) наибольшее количество четных функций с ненулевой числовой частью, задающих преобразование, равно двум. Кроме того, количество ненулевых элементов матрицы G определяет количество четных функций перехода, а число нулей совпадает с числом нечетных функций.

7.2. Расщепленные $N = 2$ суперконформные преобразования

Поскольку элементами матрицы G задаются все функции перехода для расщепленных преобразований с помощью (53), то, определяя умножение этих матриц как композицию преобразований, их можно трактовать как нелинейную матричную

реализацию расщепленной $N = 2$ суперконформной группы или полугруппы в зависимости от наличия единичного и обратного элементов. Матрицы типа I образуют группу, и в координатном базисе им соответствуют $U(1)$ и $O(2)$ симметричные матрицы [29, 33]. Их умножение задается действием расщепленной $N = 2$ суперконформной группы: $G^{(1)} \otimes G^{(2)} = G^{(3)}$

$$\begin{pmatrix} g_{+-}^{(1)}(z) & 0 \\ 0 & g_{-+}^{(1)}(z) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} g_{+-}^{(2)}(z) & 0 \\ 0 & g_{-+}^{(2)}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{+-}^{(1)}(f(z))g_{+-}^{(2)}(z) & 0 \\ 0 & g_{-+}^{(1)}(f(z))g_{-+}^{(2)}(z) \end{pmatrix}, \quad (58)$$

где $f'(z) = g_{+-}^{(2)}(z)g_{-+}^{(2)}(z)$;

$$\begin{pmatrix} 0 & g_{++}^{(1)}(z) \\ g_{--}^{(1)}(z) & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & g_{++}^{(2)}(z) \\ g_{--}^{(2)}(z) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{++}^{(1)}(f(z))g_{--}^{(2)}(z) & 0 \\ 0 & g_{--}^{(1)}(f(z))g_{++}^{(2)}(z) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

где $f'(z) = g_{++}^{(2)}(z)g_{--}^{(2)}(z)$;

$$\begin{pmatrix} g_{+-}^{(1)}(z) & 0 \\ 0 & g_{-+}^{(1)}(z) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & g_{++}^{(2)}(z) \\ g_{--}^{(2)}(z) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g_{+-}^{(1)}(f(z))g_{++}^{(2)}(z) \\ g_{-+}^{(1)}(f(z))g_{--}^{(2)}(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad (60)$$

где $f'(z) = g_{++}^{(2)}(z)g_{--}^{(2)}(z)$.

С другой стороны, разрешая систему уравнений (53)—(54), можно получить явный вид расщепленных $U(1)$ -преобразований

$$\tilde{z} = f(z); \quad \tilde{\theta}^{\pm} = \theta^{\pm} e^{\pm i q(z)} \sqrt{f'(z)} \quad (61)$$

и $O(2)$ -преобразований

$$\tilde{z} = f(z); \quad \tilde{\theta}^{\pm} = \theta^{\mp} e^{\mp i q(z)} \sqrt{f'(z)} \quad (62)$$

типа I. После удаления всех нильпотентностей они могут служить функциями перехода между картами для расщепленных $N = 2$ суперримановых поверхностей, представляющих обычную риманову поверхность со спиновой структурой на ней [29]. Если рассматривать преобразования остальных типов, для которых отличны от нуля только $f(z)$ и элементы матрицы G , то можно сделать вывод, что преобразования типа II вообще отсутствуют, а для преобразований типа III получаем

$$\tilde{z} = f_N(z),$$

$$\tilde{\theta}^{\pm} = \theta^{\pm} \alpha_{\pm}(z) \mu_{\mp}(z) + \theta^{\pm} \beta_{\mp}(z) \mu_{\pm}(z), \quad (63)$$

где $f'_N(z) = (\alpha_{+}(z)\alpha_{-}(z) + \beta_{+}(z)\beta_{-}(z))\mu_{+}(z)\mu_{-}(z)$,

или

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f_N(z); \quad \tilde{\theta}^+ = \theta^+ g_{+-}(z) + \theta^- \alpha(z) \beta_+(z), \\ \tilde{\theta}^- &= \theta^- \alpha(z) \beta_-(z),\end{aligned}\quad (64)$$

где $f'_N(z) = g_{+-}(z) \alpha(z) \beta_-(z)$, и еще три симметричных, отвечающих другим выборам ненильпотентного элемента $g_{+-}(z)$.

7.3. Общие $N = 2$ суперконформные преобразования

Преобразования типа I допускают обратимое конформное отображение в качестве подстилающего преобразования и разделяются на два класса в соответствии с симметрией нечетного сектора в координатном базисе: $U(1)$ или $O(2)$ [29, 33]. В первом случае матрица G диагональна и $D^\pm \tilde{\theta}^\pm = 0$, тогда из первого соотношения в (43) находим, что суперпроизводные не изменяют свой $U(1)$ -заряд

$$D^\pm = (D^\pm \tilde{\theta}^\mp) \tilde{D}^\pm \quad (65)$$

и, разрешая соответственное условие $N = 2$ суперконформной инвариантности

$$D^\pm z = \tilde{\theta}^\pm (D^\pm \tilde{\theta}^\mp) \quad (66)$$

получаем нерасщепленные $U(1)$ -преобразования

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f(z) + \theta^+ e^{iq(z)} \psi_-(z) \sqrt{f'(z) + \psi_+(z) \psi'_-(z)} \\ &+ \theta^- e^{-iq(z)} \psi_+(z) \sqrt{f'(z) + \psi_-(z) \psi'_+(z)} + \theta^+ \theta^- (\psi_+(z) \psi_-(z))' \\ \tilde{\theta}^+ &= \psi_\pm(z) \\ &+ \theta^\pm e^{\pm iq(z)} \sqrt{f'(z) + \psi_+(z) \psi'_-(z) + \psi_-(z) \psi'_+(z)} + \theta^\pm \theta^\mp \psi'_\pm(z).\end{aligned}\quad (67)$$

Другой выбор, $D^\pm \tilde{\theta}^\mp = 0$, отвечает матрице G с отличной от нуля побочной диагональю, тогда из второго соотношения в (43) находим, что заряд суперпроизводных меняется на противоположный

$$D^\pm = (D^\pm \tilde{\theta}^\pm) \tilde{D}^\mp \quad (68)$$

а суперконформные условия имеют вид

$$D^\pm \tilde{z} = \tilde{\theta}^\mp (D^\pm \tilde{\theta}^\pm) \quad (69)$$

разрешая которые в компонентах, получаем $O(2)$ -преобразования

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f(z) + \theta^+ e^{+iq(z)} \psi_+(z) \sqrt{f'(z) + \psi_-(z) \psi'_+(z)} \\ &+ \theta^- e^{-iq(z)} \psi_-(z) \sqrt{f'(z) + \psi_+(z) \psi'_-(z)} + \theta^+ \theta^- (\psi_-(z) \psi_+(z))' \\ \tilde{\theta}^\pm &= \psi_\pm(z) + \theta^\mp e^{\mp iq(z)} \sqrt{f'(z) + \psi_+(z) \psi'_-(z) + \psi_-(z) \psi'_+(z)} + \theta^\mp \theta^\pm \psi'_\pm(z).\end{aligned}\quad (70)$$

Редукция к $N = 1$ (8) возникает из (67) и (70) при $\theta^\pm \rightarrow \theta/\sqrt{2}$, $\psi_\pm(z) \rightarrow \psi(z)/\sqrt{2}$, $q(z) \rightarrow 0$. Преобразования (67) соответствуют бесконечномерной $N = 2$ суперконформной группе с гелератором $g = [f, \psi_+, \psi_-, q]$, единицей $e = [z, 0, 0, 0]$ и законом умножения

$$\begin{aligned} & [f_1, \psi_{1\pm}, q_1] \otimes [f_2, \psi_{2\pm}, q_2] = [f_1(f_2) \\ & + \psi_{2+}\psi_{1-}(f_2) \sqrt{f'_1(f_2) + \psi_{1+}(f_2)\psi'_{1-}(f_2)} e^{iq_1(f_2)} \\ & + \psi_{2-}\psi_{1+}(f_2) \sqrt{f'_1(f_2) + \psi_{1-}(f_2)\psi'_{1+}(f_2)} e^{-iq_1(f_2)} \\ & + \psi'_{2+}\psi'_{2-}(\psi_{1+}(f_2)\psi_{1-}(f_2))', \psi_{1\pm}(f_2) \\ & + \psi_{2\pm} \sqrt{f'_1(f_2) + \psi_{1+}(f_2)\psi'_{1-}(f_2) + \psi_{1-}(f_2)\psi'_{1+}(f_2)} \\ & \times e^{\pm iq_1(f_2)} + \psi_{2\pm}\psi_{2\mp}\psi'_{1\pm}(f_2), q_1(f_2) + q_2]. \end{aligned} \quad (71)$$

Конечномерная (4|4)-параметрическая подгруппа этой группы изоморфна $OSp(2, 2)$ и может быть получена из (67), если положить $f(z) \in SL(2, C)$, $\psi_\pm(z)$ — в виде нечетной дробнолинейной функции с тем же знаменателем [30, 32].

Под действием конечных суперконформных преобразований (67) $N = 2$ тензор энергии-импульса преобразуется нековариантно в общем случае [30], и аномальная часть пропорциональна $N = 2$ суперпроизводной Шварца [29], которая является тензором энергии-импульса соответствующей $N = 2$ суперсимметричной теории Лиувилля [37] и для $U(1)$ -преобразований имеет следующий вид

$$S_{N=2} = \frac{1}{2} [D^+, D^-]V - \frac{1}{2} (D^+V)(D^-V) \quad (72)$$

где $e^V = (D^+\bar{\theta}^-)(D^-\bar{\theta}^+)$. Используя (67), можно получить точное выражение для $N = 2$ суперпроизводной Шварца в общем случае

$$S_{N=2} = S_U + \theta^+ S_F^- + \theta^- S_F^+ + \theta^+ \theta^- S_B,$$

$$S_U = -2 \left(iq'(z) + \frac{\psi'_+(z)\psi'_-(z)}{f'(z)} \right),$$

$$S_F^\pm = \mp 2e^{\mp iq(z)} \sqrt{F} \left(\frac{\psi'_\pm(z)}{F} \right)',$$

$$S_B = \frac{F''}{F} - \frac{3}{2} \left(\frac{F'}{F} \right)^2 - 2(q'(z))^2$$

$$+ 2 \frac{\psi'_+(z)\psi''_-(z) + \psi'_-(z)\psi''_+(z) + 2iq'(z)\psi'_+(z)\psi'_-(z)}{F} \quad (73)$$

где $F = f'(z) + \psi_+(z)\psi'_-(z) + \psi_-(z)\psi'_+(z)$.

Редукция к $N = 1$ суперпроизводной Шварца [4, 38] $S_{N=1} = S_f + \theta S_\theta$ происходит при $\psi_\pm(z) \rightarrow \psi(z)/\sqrt{2}$, $q(z) \rightarrow 0$, тогда $S_U \rightarrow 0$, $S_F^\pm \rightarrow S_f$, $S_B \rightarrow 2S_\theta$. Несуперсимметричная производная Шварца может быть получена из (73), если $\psi_\pm(z) \rightarrow 0$, $q(z) \rightarrow 0$, после чего имеем $S_U \rightarrow 0$, $S_F^\pm \rightarrow 0$, $S_B \rightarrow S_{N=0} \equiv \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$ [39].

Преобразования типа II отвечает матрица G с нулевым перманентом $\text{per } G = 0$. При этом, биномиальной матрице G соответствует равенство $D^\pm \tilde{\theta}^- = 0$ и вырождение касательного пространства, поскольку для суперпроизводных имеем (из последнего соотношения в (43))

$$D^\pm = (D^\pm \tilde{\theta}^+) \tilde{D}^- \quad (74)$$

поэтому одна из нечетных координат вырождается и правая часть в (47) обращается в нуль, откуда непосредственно получаем [28]

$$\tilde{z} = \tilde{\theta}^+ \varrho_- + c,$$

$$\tilde{\theta}^+ = \psi_+(z) + \theta^+ g_{+-}(z) + \theta^- g_{++}(z) + \theta^+ \theta^- \lambda_+(z), \quad \tilde{\theta}^- = \varrho_- \quad (75)$$

и симметричный ($\pm \rightarrow \mp$) вариант.

Мономиальной матрице G соответствуют преобразования, описываемые одной четной и тремя нечетными функциями

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= f_N(z) + \theta^+ \psi_-(z) g_{+-}(z) + \theta^+ \theta^- (\psi_+(z) \psi'_-(z) + \lambda_+(z) \psi_-(z)) \\ \tilde{\theta}^+ &= \psi_+(z) + \theta^+ g_{+-}(z) + \theta^+ \theta^- \lambda_+(z) \\ \tilde{\theta}^- &= \psi_-(z) + \theta^- \theta^+ \psi'_-(z), \end{aligned} \quad (76)$$

где $f'_N(z) = \psi'_+(z)\psi_-(z) + \psi'_-(z)\psi_+(z)$ и еще три варианта, отличающиеся выбором ненулевых элементов матрицы G . Если $g_{+-}(z) \in \text{SL}(2, C)$ преобразования (76) представляют собой нечетное суперобобщение группы $\text{SL}(2, C)$.

Если матрица G тождественно равна нулю, то соответствующие преобразования определяются четырьмя нечетными функциями

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= f_N(z) + \theta^+ \theta^- (\psi_+(z) \lambda_-(z) + \lambda_+(z) \psi_-(z)), \\ \tilde{\theta}^\pm &= \psi_\pm(z) + \theta^\pm \theta^\mp \lambda_\pm(z), \\ f'_N(z) &= \psi'_+(z)\psi_-(z) + \psi'_-(z)\psi_+(z). \end{aligned} \quad (77)$$

Следовательно, $N = 2$ суперконформных преобразований типа II имеется 7 вариантов, каждый из которых задается 4 функциями на $C^{1,0}$.

При получении преобразований типа III возникает функциональный произвол, обусловленный наличием делителей нуля среди грассмановых величин [14, 15]. Простейший анзац состоит в представлении четной нильпотентной функции в виде произведения двух нечетных, степень нильпотентности которых равна двум. При этом, возникает два существенно различных подтипа, один из них, III_a, включает в себя преобразования, сводимые к предыдущим с помощью зануления некоторых функций, преобразования же другого подтипа, III_b, не имеют аналогов среди уже полученных. Так, например, к преобразованиям типа III_a относится нильпотентное расширение (77)

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f_N(z) + \theta^+[(\psi_+(z)(\lambda_+(z) + \psi'_+(z)) + \psi_-(z)(\lambda_-(z) - \\ &- \psi'_-(z)))\beta_+(z) + (\psi_-(z)(\lambda_+(z) + \psi'_+(z)) - \psi_+(z)(\lambda_-(z) - \\ &- \psi'_-(z)))\alpha_+(z)] + \theta^-[(\psi_-(z)(\lambda_-(z) + \psi'_-(z)) \\ &+ \psi_+(z)(\lambda_+(z) - \psi'_+(z)))\beta_-(z) + (\psi_+(z)(\lambda_-(z) + \\ &+ \psi'_-(z)) - \psi_-(z)(\lambda_+(z) - \psi'_+(z)))\alpha_-(z)] + \theta^+\theta^-(\psi_+(z) \\ &- \lambda_-(z) - \psi_-(z)\lambda_+(z)), \\ \tilde{\theta}^\pm &= \psi_\pm(z) + \theta^\pm[(\lambda_\pm(z) + \psi'_\pm(z))\alpha_\pm(z) + (\lambda_\mp(z) - \\ &- \psi'_\mp(z))\beta_\pm(z)] + \theta^\mp[(\lambda_\mp(z) + \psi'_\mp(z))\beta_\mp(z) \\ &- (\lambda_\pm(z) - \psi'_\pm(z))\alpha_\mp(z)] + \theta^\pm\theta^\mp\lambda_\pm(z),\end{aligned}\quad (78)$$

где $f'_N(z) = \psi'_+(z)\psi_-(z) + \psi'_-(z)\psi_+(z) + 2(\alpha_+(z)\alpha_-(z) + \beta_+(z)\beta_-(z))(\lambda_-(z)\psi'_+(z) - \lambda_+(z)\psi'_-(z)) + 2(\alpha_+(z)\beta_-(z) + \alpha_-(z)\beta_+(z))(\lambda_-(z)\psi'_-(z) + \lambda_+(z)\psi'_+(z))$ и такое же расширение для (76)

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f_N(z) + \theta^+\psi_-(z)g_{+-}(z) + \theta^-[\psi_-(z)\psi'_-(z) \\ &+ \psi_+(z)(\lambda_+(z) - \psi'_+(z))]\alpha(z) + \theta^+\theta^-(\psi_+(z)\psi'_-(z) + \lambda_+(z)\psi_-(z)), \\ \tilde{\theta}^+ &= \psi_+(z) + \theta^+g_{+-}(z) + \theta^-\psi'_-(z)\alpha(z) + \theta^+\theta^-\lambda_+(z), \\ \tilde{\theta}^- &= \psi_-(z) + \theta^-(\lambda_+(z) - \psi'_+(z))\alpha(z) + \theta^-\theta^+\psi'_-(z),\end{aligned}\quad (79)$$

где $f'_N(z) = \psi'_+(z)\psi_-(z) + \psi'_-(z)\psi_+(z) + g_{+-}(z)(\lambda_+(z) - \psi'_+(z))\alpha(z)$.

Среди преобразований типа III_b можно отметить похожее на преобразование типа I

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= f_N(z) + \theta^+(\psi_-(z)\alpha_+(z) + \psi'_+(z)\psi_+(z))\beta_-(z) \\ &+ \theta^-(\psi_+(z)\alpha_-(z) + \psi'_-(z)\psi_-(z))\beta_+(z) + \theta^+\theta^-(\psi_+(z)\psi_-(z))', \\ \tilde{\theta}^\pm &= \psi_\pm(z) + \theta^\pm\alpha_\pm(z)\beta_\mp(z) + \theta^\mp\psi'_\mp(z)\beta_\pm(z) + \theta^\pm\theta^\mp\psi'_\pm(z),\end{aligned}\quad (80)$$

где $f'_N(z) = \psi'_+(z)\psi_-(z) + \psi'_-(z)\psi_+(z) + (\alpha_+(z)\alpha_-(z) + \psi'_+(z)\psi'_-(z))\beta_+(z)\beta_-(z)$.

8. $N = 2$ супердифференциалы и суперполя

Абелевы $N = 2$ супердифференциалы $d\tau^\pm$ [29] дуальны по отношению к $N = 2$ суперпроизводным $\{d\tau^+, d\tau^-\} = 2dZ$, где $dZ = dz + \theta^+ d\theta^- + \theta^- d\theta^+ - N = 2$ 1-форма, отвечающая метрике на $N = 2$ суперплоскости. Введем матрицу

$$H = \begin{pmatrix} D^+ \tilde{\theta}^- & D^- \tilde{\theta}^- \\ D^+ \tilde{\theta}^+ & D^- \tilde{\theta}^+ \end{pmatrix} \quad (81)$$

которая для расщепленных преобразований совпадает с матрицей миноров матрицы G (49). Тогда при суперконформных преобразованиях, удовлетворяющих (46), имеем (в матричных обозначениях)

$$D = H^T \tilde{D}; \quad d\tilde{\tau} = H d\tau; \quad d\tilde{Z} = \text{per } H dZ \quad (82)$$

следовательно, $\text{per } H$ играет роль $N = 2$ суперякобиана в комплексном базисе. (Рассмотрение $N = 2$ суперримановых поверхностей с точки зрения конформной двумерной $N = 2$ супергравитации [40] можно найти, например, в [41]). $N = 2$ супердифференциалы веса p и заряда q [29] инвариантны относительно $U(1)$ -преобразований

$$\begin{aligned} \phi_{(p,q)}(z, \theta^+, \theta^-) (d\tau^+)^{p+q/2} (d\tau^-)^{p-q/2} \\ = \tilde{\phi}_{(p,q)}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-) (d\tilde{\tau}^+)^{p+q/2} (d\tilde{\tau}^-)^{p-q/2} \end{aligned} \quad (83)$$

и приводят для соответствующих суперполей к

$$\phi_{(p,q)}(z, \theta^+, \theta^-) = (D^+ \tilde{\theta}^-)^{p+q/2} (D^- \tilde{\theta}^+)^{p-q/2} \tilde{\phi}_{(p,q)}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-). \quad (84)$$

Если абелевы супердифференциалы могут образовывать $O(2)$ -комбинации dZ , то

$$\phi_{(p)}(z, \theta^+, \theta^-) (dZ)^p = \tilde{\phi}_{(p)}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-) (d\tilde{Z})^p \quad (85)$$

и для суперполей веса p без заряда имеем

$$\phi_{(p)}(z, \theta^+, \theta^-) = (\text{per } H)^p \tilde{\phi}_{(p)}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-). \quad (86)$$

8.1. $N = 2$ конформные суперполя

Аналогично $N = 1$ случаю (31) будем искать класс $N = 2$ суперполей, суперпроизводные которых преобразуются однородно

$$\begin{aligned} D^\pm \phi^{\text{out}}(z, \theta^+, \theta^-) &= (D^\pm \tilde{\theta}^-) \tilde{D}^+ \tilde{\phi}^{\text{out}}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-) \\ &+ (D^\pm \tilde{\theta}^+) \tilde{D}^- \tilde{\phi}^{\text{out}}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-) \end{aligned} \quad (87)$$

при супераналитических преобразованиях (41). Из (42) следует, что должно выполняться

$$\partial_{\tilde{z}} \tilde{\phi}^{\text{out}}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-) = 0 \quad (88)$$

отсюда получаем

$$\tilde{\phi}^{\text{out}}(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-) = \tilde{\theta}^+ \gamma_- + \tilde{\theta}^- \gamma_+ + \tilde{\theta}^+ \tilde{\theta}^- a + c \quad (89)$$

и с помощью (41) находим общую структуру $N = 2$ конформного суперполя нулевого веса, для которого выполняется (87) вне $N = 2$ суперримановой поверхности

$$\begin{aligned} \phi^{\text{out}}(z, \theta^+, \theta^-) = & \psi_+(z) \gamma_- + \psi_-(z) \gamma_+ + \psi_+(z) \psi_-(z) a \\ & \theta^+ [g_{+-}(z) \gamma_- + g_{--}(z) \gamma_+ + (g_{+-}(z) \psi_-(z) \\ & - g_{--}(z) \psi_+(z)) a] + \theta^- [g_{-+}(z) \gamma_+ + g_{++}(z) \gamma_- \\ & + (g_{++}(z) \psi_-(z) - g_{-+}(z) \psi_+(z)) a] + \theta^+ \theta^- [\lambda_+(z) \gamma_- \\ & + \lambda_-(z) \gamma_+ + (\lambda_+(z) \psi_-(z) - \lambda_-(z) \psi_+(z) \\ & + g_{+-}(z) g_{--}(z) - g_{-+}(z) g_{++}(z)) a] + c. \end{aligned} \quad (90)$$

В принципе можно решить и обратную задачу: для заданного суперполя найти такие $N = 2$ супераналитические, а не суперконформные преобразования, решая (90) в компонентах, чтобы выполнялось соотношение (87) (для $N = 1$) см. (34)).

Если $N = 2$ суперполе содержит нильпотентную константу в виде общего множителя, например, нечетную γ , то суперконформные условия (46) могут быть расширены

$$D^\pm \tilde{z} - \tilde{\theta}^+ D^\pm \tilde{\theta}^- - \tilde{\theta}^- D^\pm \tilde{\theta}^+ = \gamma (a_\pm(z) + \theta^+ \theta^- b_\pm(z)) \quad (91)$$

(для краткости слагаемые, линейные по $\theta^\pm$ в правой части, опущены). Тогда каждое из преобразований, рассмотренных в разделе 7, будет зависеть от дополнительных функций и константы из правой части (91).

Так, для $U(1)$ -преобразований имеем

$$\begin{aligned} \tilde{z} = & f(z) + \theta^+ [e^{iq(z)} \psi_-(z) \sqrt{f'(z) + \psi_+(z) \psi'_-(z)} \\ & + a_+(z) \gamma] + \theta^- [e^{-iq(z)} \psi_+(z) \sqrt{f'(z) + \psi_-(z) \psi'_+(z)} \\ & + a_-(z) \gamma] + \theta^+ \theta^- [(\psi_+(z) \psi_-(z))' + (\psi_+(z) A_- - \psi_-(z) A_+) \gamma] \\ \tilde{\theta}^\pm = & \psi_\pm(z) + \theta^\pm e^{\pm iq(z)} \sqrt{f'(z) + \psi_+(z) \psi'_-(z) + \psi_-(z) \psi'_+(z)} \\ & + \theta^+ \theta^- (\psi'_\pm(z) + A_\pm \gamma), \end{aligned} \quad (92)$$

где $A_\pm = e^{\pm iq(z)} \frac{a'_\mp(z) \mp b_\mp(z)}{2 \sqrt{f'(z) + \psi_+(z) \psi'_-(z) + \psi_-(z) \psi'_+(z)}}$ и аналогично для остальных типов преобразований.

9. Суперконформные преобразования из $N = 1$ в $N = 2$

Необходимые при суперструнных вычислениях суперконформные преобразования $N = 1$ мирового листа в $N = 1$ суперплоскость приводят к неправильным граничным условиям в случае струны Рамона [42]. Чтобы избежать этого, было предложено [43] погружать $N = 1$ мировой лист в $N = 2$ суперплоскость используя $N = 1$ в $N = 2$ суперконформные преобразования $(w, \theta) \rightarrow (z, \theta^+, \theta^-)$. При супераналитических преобразованиях $N = 1$ суперпроизводная $D = \partial_\theta + \theta \partial_w$ переходит в

$$D = (D\theta^+)D^- + (D\theta^-)D^+ + (Dz - \theta^+ D\theta^- - \theta^- D\theta^+)\partial_z \quad (93)$$

поэтому суперконформные условия в данном случае имеют вид

$$Dz = \theta^+ D\theta^- + \theta^- D\theta^+ \quad (94)$$

или

$$\partial_w + \theta^+ \partial_w \theta^- + \theta^- \partial_w \theta^+ = 2(D\theta^+)(D\theta^-). \quad (95)$$

Условие того, что два погружения (z, θ^+, θ^-) и $(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-)$ параметризуют один и тот же мировой лист, приводят к соотношениям

$$(D^+ \tilde{\theta}^-)(D^- \tilde{\theta}^+) + (D^+ \tilde{\theta}^+)(D^- \tilde{\theta}^-) = \frac{(D\tilde{\theta}^+)(D\tilde{\theta}^-)}{(D\theta^+)(D\theta^-)}. \quad (96)$$

Если аналогично (81) ввести матрицу с одинаковыми столбцами (чтобы сохранить матричные обозначения и всю классификацию пункта 7.1),

$$H_w = \begin{pmatrix} D\theta^- & D\theta^- \\ D\theta^+ & D\theta^+ \end{pmatrix} \quad (97)$$

то условие (96) запишется в виде

$$\text{per } \tilde{H}_w = \text{per } H \cdot \text{per } H_w \quad (98)$$

напоминающем еще раз, что перманент матриц (81) и (97) является аналогом $N = 2$ суперякобиана. Преобразование абелевого $N = 1$ супердифференциала $d\tau_w$ и 1-формы $dW = dw + \theta d\theta = (d\tau_w)^2$ определяется аналогично (82)

$$d\tau = JH_w d\tau_w, \quad dZ = \text{per } H_w \cdot dW, \quad JD = H_w^T \begin{pmatrix} D^+ \\ D^- \end{pmatrix}, \quad (99)$$

где J — единичный столбец. Необходимые граничные условия для струны Рамона [43] находятся с помощью инвариантности $\text{per } H_w$ относительно замен $D\theta^\pm \rightarrow k^{\pm 1/2} D\theta^\pm$ с соответствующим выбором k .

Сохранение матричных обозначений позволяет провести классификацию суперконформных преобразований из $N = 1$ в $N = 2$ таким же образом, как и в чисто $N = 2$ случае, в терминах перманента матрицы G_w , аналога G (49), которая в данном случае имеет одинаковые строки, что естественно для перехода $1 \rightarrow 2$ в нечетном

секторе. Суперконформных $N = 1$ в $N = 2$ преобразований также три типа, однако теперь каждый из них представлен лишь одним преобразованием, не считая симметрии $\pm \rightarrow \mp$. Как и ранее, тип I отвечает ненулевой числовой части $\text{reg } G_w$

$$z = f(w) + \frac{\theta}{\sqrt{2}} e^{iq(w)} \psi_-(w) \sqrt{f'(w) + \psi_+(w) \psi'_-(w)} + \frac{\theta}{\sqrt{2}} e^{-iq(w)} \psi'_+(w) \sqrt{f'(w) + \psi_-(w) \psi'_+(w)},$$

$$\theta^\pm = \psi_\pm(w) + \frac{\theta}{\sqrt{2}} e^{\pm iq(w)} \sqrt{f'(w) + \psi_+(w) \psi'_-(w) + \psi_-(w) \psi'_+(w)}. \quad (100)$$

Если выбрать $f(w) \in \text{SL}(2, C)$, а $\psi_\pm(w)$ — в виде дробнолинейной нечетной функции с тем же знаменателем, то для суперконформных $N = 1$ в $N = 2$ дробнолинейных преобразований можно получить

$$z = \frac{aw+b}{cw+d} + \frac{\theta}{\sqrt{2}} e^{iq} \frac{\gamma_- w + \delta_- + \frac{1}{2} \delta_- \gamma_+ (\gamma_+ w + \delta_+)}{(cw+d)^2} + \frac{\theta}{\sqrt{2}} e^{-iq} \frac{\gamma_+ w + \delta_+ + \frac{1}{2} \delta_+ \gamma_- (\gamma_- w + \delta_-)}{(cw+d)^2},$$

$$\theta^\pm = \frac{\gamma_\pm w + \delta_\pm}{cw+d} + \frac{\theta}{\sqrt{2}} e^{\pm iq} \frac{1 + \frac{1}{2} (\delta_+ \gamma_- + \delta_- \gamma_+) - \frac{1}{4} \delta_+ \delta_- \gamma_+ \gamma_-}{cw+d}. \quad (101)$$

Преобразования типа II характеризуются нулевым перманентом матрицы G_w и имеют следующий вид

$$z = f_N(w) + \theta \psi_-(w) g_+(w), \quad \theta^+ = \psi_+(w) + \theta g_+(w), \quad \theta^- = \psi_-(w), \quad (102)$$

где $f'_N(w) = \psi'_+(w) \psi_-(w) + \psi'_-(w) \psi_+(w)$ и еще один симметричный $\pm \rightarrow \mp$ вариант. Выбрав $g_+(w) \in \text{SL}(2, C)$, а $\psi_\pm(w)$, как в (101), получаем дробнолинейное преобразование типа II

$$z = \frac{\delta_+ \gamma_- + \delta_- \gamma_+}{c(cw+d)} + \theta \frac{(aw+b)(\gamma_- w + \delta_-)}{(cw+d)^2} + k,$$

$$\theta^+ = \frac{\gamma_+ w + \delta_+}{cw+d} + \theta \frac{aw+b}{cw+d}, \quad \theta^- = \frac{\gamma_- w + \delta_-}{cw+d}. \quad (103)$$

И, наконец, учитывая возможность, что матрица G_w может содержать четные нильпотентные функции, равные произведению двух нечетных, находим общий вид суперконформных $N = 1$ в $N = 2$ преобразований типа III

$$z = f_N(w) + \theta (\psi_+(w) \alpha_-(w) + \psi_-(w) \alpha_+(w)) \beta(w),$$

$$\theta^\pm = \psi_\pm(w) + \theta \alpha_\pm(w) \beta(w). \quad (104)$$

10. Суперконформные преобразования из $N = 2$ в $N = 1$

Будучи последовательными, рассмотрим суперконформные преобразования из $N = 2$ (z, θ^+, θ^-) в $N = 1$ (w, θ). Суперпроизводные под действием супераналитических преобразований переходят в

$$D^\pm = (D^\pm \theta) D + (D^\pm z - \theta D^\pm \theta) \partial_w. \quad (105)$$

Поэтому суперконформные условия определяются формулами

$$D^\pm z = \theta D^\pm \theta \quad (106)$$

или

$$\partial_z w + \theta \partial_z \theta = 2(D^+ \theta)(D^- \theta) \quad (107)$$

и

$$(D^\pm \theta)^2 = 0. \quad (108)$$

В данном случае матрица G_w , аналогичная (49) имеет одинаковые столбцы, поэтому условие (54), а также (108), приводит к тому, что элементы матрицы G_w должны быть нильпотентны, либо равны нулю. Это приводит к отсутствию преобразований типа I, т.е. суперконформные преобразования из $N = 2$ в $N = 1$, в отличие от обратного случая, не могут быть редуцированы после удаления всех нильпотентностей к обычному конформному отображению и не могут быть преобразованиями группы, а только полугруппы. Тождественное равенство нулю матрицы G_w дает преобразование типа II

$$\begin{aligned} w &= f_N(z) - \theta^+ \theta^- \psi(z) \lambda(z), \\ \theta &= \psi(z) + \theta^+ \theta^- \lambda(z), \end{aligned} \quad (109)$$

где $f'_N(z) = \psi'(z)\psi(z)$ аналогичное (77), но здесь оно единственное.

Дробно-линейный вариант для (109) имеет вид

$$\begin{aligned} w &= \frac{\delta \gamma}{c(cz+d)} - \theta^+ \theta^- \frac{(\gamma z + \delta)(\alpha z + \beta)}{(cz+d)^2} + k, \\ \theta &= \frac{\gamma z + \delta}{cz+d} + \theta^+ \theta^- \frac{\alpha z + \beta}{cz+d}. \end{aligned} \quad (110)$$

Преобразования типа III_a требуют введения двух нечетных функций, зануление которых приводит к (109)

$$\begin{aligned} w &= f_N(z) + \theta^+ \psi(z) \alpha_-(z) (\lambda(z) + \psi'(z)) \\ &+ \theta^- \psi(z) \alpha_+(z) (\lambda(z) - \psi'(z)) - \theta^+ \theta^- \psi(z) \lambda(z), \\ \theta &= \psi(z) + \theta^+ \alpha_-(z) (\lambda(z) + \psi'(z)) \\ &+ \theta^- \alpha_+(z) (\lambda(z) - \psi'(z)) + \theta^+ \theta^- \lambda(z), \end{aligned} \quad (111)$$

где $f'_N(z) = \psi'(z)\psi(z) + 2\alpha_+(z)\alpha_-(z)\psi'(z)\lambda(z)$.

Другая разновидность III_B при $\varrho = 0$ описывает аналог расщепленных преобразований

$$\begin{aligned} w &= f_N(z) + \theta^+ \varrho \alpha_-(z) \beta_-(z) + \theta^- \varrho \alpha_+(z) \beta_+(z), \\ \theta &= \varrho + \theta^+ \alpha_-(z) \beta_-(z) + \theta^- \alpha_+(z) \beta_+(z), \end{aligned} \quad (112)$$

где $f'_N(z) = \alpha_+(z) \beta_+(z) \alpha_-(z) \beta_-(z)$.

Матрица H_w для преобразований из $N = 2$ в $N = 1$ имеет одинаковые строки

$$H_w = \begin{pmatrix} D^+ \theta & D^- \theta \\ D^+ \theta & D^- \theta \end{pmatrix} \quad (113)$$

и с ее помощью суперпроизводные, абелевы супердифференциалы и 1-форма преобразуются по следующим формулам

$$\begin{pmatrix} D^+ \\ D^- \end{pmatrix} = H_w^T J D, \quad J d\tau_w = H_w d\tau, \quad dw = \text{per } H_w dZ \quad (114)$$

аналогичным (82) и (99).

Следовательно, анализ различных $N = 1, 2$ суперконформных преобразований и их классификация (для $N = 1$ можно ввести аналоги матриц G и H , но с одинаковыми элементами) проводится единым образом.

11. Дискуссии

Таким образом, в работе получены все возможные $N = 1$ и $N = 2$ суперконформные преобразования, а также преобразования из $N = 1$ в $N = 2$ и обратно. Дана их классификация в терминах перманента нечетно-нечетной части суперматрицы замены координат. Также построен класс суперполей, обладающих конформными свойствами при супераналитических, а не суперконформных преобразованиях, найдены расширения суперконформных преобразований, связанных со структурой рассматриваемого суперполя.

Свойства суперконформных преобразований оказываются более богатыми по сравнению с обычными конформными отображениями: супергладкость и супераналитичность функций перехода в общем случае определяют полугруппу суперконформных преобразований S_{scf} с отделяющейся групповой частью G_{scf} , которая содержит единицу и обратимые элементы (преобразования типа I по введенной выше классификации). Суперконформные преобразования, не образующие подгруппу полугруппы S_{scf} (обозначим их S_{scf}/G_{scf} , они соответствуют преобразованиям типа II и III), возникают, благодаря наличию делителей нуля среди грассмановых величин и являются частичными преобразованиями, у которых вторая проекция соответствует вырожденной числовой части, т.е. для них дефект числовой части отличен от нуля всегда. Элемент полугруппы S_{scf} определяется набором функций, задающих преобразование, поэтому полугруппа S_{scf} является бесконечномерной. Конечномерная ее подполугруппа S_{scf}^{finite} имеет элементы,

принадлежащие как G_{scf} , так и S_{scf}/G_{scf} , и включает в себя подполугруппу S_{Mat} , допускающую матричную реализацию в линейном суперпроективном пространстве, $S_{Mat} \subset S_{scf}^{finite}$ (для $N = 1$ см. (17) и (19)). Интересным представляется изучить свойства фактор-полугруппы S_{scf}/G_{scf} , если отношение эквивалентности в S_{scf} стабильно. Однако, разбиение на классы эквивалентности полугруппы S_{scf} может быть проведено не во всех случаях однозначно.

Отметим некоторые экзотические свойства преобразований из S_{scf}/G_{scf} : отсутствие единицы (тождественного преобразования), обратных элементов (хотя в четном секторе частичная обратимость в некоторых случаях может наблюдаться (20)) и нуля (неподвижных точек преобразования). Березиниан таких преобразований неопределен (из-за необходимости делить в (2) на нильпотентную величину), в то же время формально определенный суперякобиан (первым равенством в (6)) оказывается хотя и не равным нулю, но чисто нильпотентным (14), (21). Эти преобразования невозможно представить в инфинитезимальном виде и определить для них соответствующие супералгебры дифференциальных операторов [44]. Возможной причиной этого является нильпотентность формально определенного суперякобиана. Кроме того, для преобразований из S_{scf}/G_{scf} не выполняется такое свойство, как сохранение числовой части — “body preserving” [45]. Тем не менее, по аналогии с суперримановыми поверхностями [4] или суперконформными многообразиями [5], определяемыми как набор суперобластей, склеенных между собой суперконформными преобразованиями из G_{scf} , можно ввести суперримановы полуповерхности как набор суперобластей склеенных суперконформными преобразованиями из всей полугруппы S_{scf} , которые обладают нетривиальной структурой как в нечетном, так и в четном нильпотентном направлении. Для существования суперримановых полуповерхностей, определяемых преобразованиями из S_{scf}/G_{scf} , наличие нечетных модулей [7, 46] является критичным, причем наименьшее количество их равно двум. Множество преобразований из S_{scf}/G_{scf} является идеалом всей полугруппы S_{scf} .

Важно, что при фиксированных функциях, определяющих конкретное преобразование, полугруппа S_{scf} конечно-порождена. Поэтому в принципе можно построить бесконечную таблицу Кэли (таблицу умножения, в которой действие определяется как суперпозиция преобразований), полностью характеризующую полугруппу S_{scf} . Так, для $N = 1$ имеется два порождающих элемента полугруппы S_{scf} , один из которых (8) принадлежит G_{scf} , а другой (12) — S_{scf}/G_{scf} . Имея таблицу Кэли и явный вид самих преобразований, было бы интересно построить и изучить строгими методами [47] абстрактную полугруппу, которой соответствует полугруппа преобразований S_{scf} .

Автор благодарит V. D. Alekseevski, M. F. Bessmertny and J. Lukierski за полезные обсуждения, а также E. D'Hoker, G. Felder, E. Melzer, Y. S. Myung, S. Nam and E. Verlinde за присланные работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Выражение $N = 2$ березиниана через перманент

Покажем, что березиниан суперматрицы F из производных, соответствующей суперконформному преобразованию $(z, \theta^+, \theta^-) \rightarrow (\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-)$, выражается через перманент и детерминант матрицы H (81). Для этого обратим внимание на то, что при супераналитических преобразованиях (41) выполняется следующее соотношение

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} & \frac{\partial \tilde{\theta}^+}{\partial z} & \frac{\partial \tilde{\theta}^-}{\partial z} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta^+} - \Delta^+ & \frac{\partial \tilde{\theta}^+}{\partial \theta^+} & \frac{\partial \tilde{\theta}^-}{\partial \theta^+} \\ \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta^-} - \Delta^- & \frac{\partial \tilde{\theta}^+}{\partial \theta^-} & \frac{\partial \tilde{\theta}^-}{\partial \theta^-} \end{pmatrix} = C A \tilde{C} \quad (A1)$$

где

$$\Delta^\pm = D^\pm \tilde{z} - \tilde{\theta}^+ D^\pm \tilde{\theta}^- - \tilde{\theta}^- D^\pm \tilde{\theta}^+, \\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\theta^- & 1 & 0 \\ -\theta^+ & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{\theta}^- & 1 & 0 \\ \tilde{\theta}^+ & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A = \begin{pmatrix} \partial_z \tilde{z} + \tilde{\theta}^+ \partial_z \tilde{\theta}^- + \tilde{\theta}^- \partial_z \tilde{\theta}^+ & \partial_z \tilde{\theta}^+ & \partial_z \tilde{\theta}^- \\ 0 & D^- \tilde{\theta}^+ & D^- \tilde{\theta}^- \\ 0 & D^+ \tilde{\theta}^+ & D^+ \tilde{\theta}^- \end{pmatrix}.$$

Используя свойство мультипликативности березиниана [15], и замечая, что $\text{Ber } C = \text{Ber } \tilde{C} = 1$, а из суперконформных условий (46) следует, что $\Delta^\pm = 0$, получаем

$$\text{Ber } F = \text{Ber } C \cdot \text{Ber } A \cdot \text{Ber } \tilde{C} = \text{Ber } A \\ = \frac{\partial_z \tilde{z} + \tilde{\theta}^+ \partial_z \tilde{\theta}^- + \tilde{\theta}^- \partial_z \tilde{\theta}^+}{(D^+ \tilde{\theta}^-)(D^- \tilde{\theta}^+) - (D^+ \tilde{\theta}^+)(D^- \tilde{\theta}^-)}. \quad (A2)$$

Далее, принимая во внимание (47), получаем окончательное выражение для $N = 2$ березиниана

$$\text{Ber } F = \frac{(D^+ \tilde{\theta}^-)(D^- \tilde{\theta}^+) \pm (D^+ \tilde{\theta}^+)(D^- \tilde{\theta}^-)}{(D^+ \tilde{\theta}^-)(D^- \tilde{\theta}^+) \mp (D^+ \tilde{\theta}^+)(D^- \tilde{\theta}^-)}, \quad (A3)$$

где нижние знаки возникают из-за условия (48) и возможности вычисления березиниана разными способами [15]. Замечая, что величины, входящие в (A3), являются элементами матрицы H , получаем выражение $N = 2$ березиниана через перманент

и детерминант H (81)

$$\text{Ber } F = \frac{\text{per } H}{\det H} = \frac{\det H}{\text{per } H} \quad (\text{A4})$$

где второе равенство есть следствие (48), откуда $(\text{per } H)^2 = (\det H)^2$, тогда $(\text{Ber } F)^2 = 1$ (см. для обычных матриц (57)). Следовательно, для $N = 2$ суперконформных преобразований основной характеристикой является перманент матрицы H (81), через который выражается как $N = 2$ березиниан преобразований, так и конформный множитель, с помощью которого преобразуется I-форма, соответствующая $N = 2$ метрике (82), и некоторые типы суперполей (86).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Доопределение и вычисление $N = 2$ березиниана

Преобразования типа I характеризуются соотношениями $m[\text{per } H] \neq 0$, $m[\det H] \neq 0$, отсюда с очевидностью следует, что

$$\text{Ber } F_1 = \begin{cases} +1, D^+ \bar{\theta}^+ = D^- \bar{\theta}^- = 0 \\ -1, D^+ \bar{\theta}^- = D^- \bar{\theta}^+ = 0 \end{cases} \quad (\text{B1})$$

Для преобразований, образующих группу, этого и следовало ожидать, поскольку в данном случае группой внешних автоморфизмов является $Z_2 = O(2)/SO(2)$ [29, 33].

Соотношениями (A4) для преобразований типа II и III непосредственно пользоваться нельзя, т.к. $\text{per } H$ и $\det H$ оказываются либо нильпотентными, либо равными нулю. Поэтому необходимо доопределить березиниан (A4), обозначив доопределение волной сверху, $\tilde{\text{Ber}} F$, например, как класс эквивалентности, соответствующих множеству решений уравнения

$$\det H \cdot \tilde{\text{Ber}} F = \text{per } H \quad (\text{B2})$$

или

$$\text{per } H \cdot \tilde{\text{Ber}} F = \det H, \quad (\text{B3})$$

что в принципе имеет смысл: (нильпотентная величина) $\cdot$ (доопределенный березиниан) = (нильпотентная величина). Сужение класса эквивалентности производится с помощью дополнительных и для каждого случая своих интуитивно принимаемых ограничений.

Так, если один из элементов матрицы H равен нулю, как в случае преобразований типа II с мономиальной матрицей G (76), получаем соотношение $\text{per } H = \pm \det H$ в зависимости от выбора нулевого элемента в H . И, хотя $\text{per } H$ и $\det H$ нильпотентны, воспользовавшись (B2), получаем

$$\tilde{\text{Ber}} F_{\text{II}}^{\text{monomial}} = \begin{cases} +1, D^+ \bar{\theta}^+ = 0 & D^- \bar{\theta}^- = 0 \\ -1, D^+ \bar{\theta}^- = 0 & D^- \bar{\theta}^+ = 0 \end{cases} \quad (\text{B4})$$

Здесь весь класс эквивалентности содержит, например, еще слагаемые, пропорциональные $\psi'_-(z)$ и θ^+ (для преобразований (76)). Если матрица G (49) биномиальна, то анзац (B2) не помогает (в этом случае имеем уравнение типа $0 \cdot x = 0$, поскольку $\text{reg } H = \det H = 0$). Можно, конечно, сначала приравнять $D^+\tilde{\theta}^-$ и $D^-\tilde{\theta}^+$ друг другу, не обращая в нуль (для (75)), и затем сократить их в (B2). Но тогда для однозначного определения березиниана необходимо наложить дополнительное требование на функции перехода, в данном случае $(D^+\tilde{\theta}^+)(D^-\tilde{\theta}^+) = 0$.

Для преобразований типа II с нулевой матрицей G (77) доопределенный березиниан ищется из уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Ber}} F_{\text{II}}^{\text{zero}}(\psi'_+(z)\psi'_-(z) + \lambda_+(z)\lambda_-(z)) \\ = \lambda_+(z)\psi'_-(z) + \psi'_+(z)\lambda_-(z). \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

Например, если положить $\lambda_{\pm}(z) = a_{\pm}(z)\psi'_{\pm}(z)$, то

$$\tilde{\text{Ber}} F_{\text{II}}^{\text{zero}} = \frac{a_+(z) + a_-(z)}{1 + a_+(z)a_-(z)}. \quad (\text{B6})$$

В случае преобразований типа III для доопределенного березиниана $\tilde{\text{Ber}} F_{\text{III}}$ можно получить уравнения, аналогичные (B5), решать которые необходимо, выбирая конкретно вид входящих в них функций.

REFERENCES

- [1] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1987; M. Kaku, *Introduction to Superstrings*, Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [2] M. Bershadsky, V. G. Knizhnik, M. G. Teitelman, *Phys. Lett.* **B151**, 31 (1985); H. Eichenherr, *Phys. Lett.* **B151**, 26 (1985).
- [3] E. D'Hoker, D. H. Phong, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 917 (1988).
- [4] D. Friedan, in *Unified String Theories*, ed. M. B. Green, D. J. Gross, World Scientific, Singapore 1986, p. 162.
- [5] A. A. Rosly, A. S. Schwarz, A. A. Voronov, *Commun. Math. Phys.* **119**, 129 (1988).
- [6] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **B103**, 207 (1981).
- [7] D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker, *Nucl. Phys.* **B271**, 93 (1986); E. Verlinde, H. Verlinde, IASSNS-HEP-88/52, Princeton 1988.
- [8] M. Ademollo et al., *Nucl. Phys.* **B111**, 77 (1976).
- [9] D. Gepner, PUPT-1121, Princeton 1989; J. H. Schwarz, CALT-68-1531, Pasadena 1988.
- [10] P. Di Vecchia, J. L. Petersen, H. B. Zheng, *Phys. Lett.* **B162**, 327 (1985); M. Yu, H. B. Zheng, *Nucl. Phys.* **B288**, 275 (1987).
- [11] G. Waterson, *Phys. Lett.* **B171**, 77 (1986); S. K. Yang, *Nucl. Phys.* **B285**, 183 (1987).
- [12] Yu. I. Manin, *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer-Verlag, Berlin 1988.
- [13] A. Rogers, *J. Math. Phys.* **21**, 1352 (1980).
- [14] A. Rogers, *Commun. Math. Phys.* **105**, 375 (1986).
- [15] F. A. Berezin, *Introduction to Superanalysis*, D. Reidel, Dordrecht 1987.
- [16] C. LeBrun, M. Rothstein, *Comm. Math. Phys.* **117**, 159 (1988).
- [17] M. Baranov, I. Frolov, A. S. Schwarz, *Theor. Math. Phys.* **70**, 64 (1987).
- [18] L. Crane, J. M. Rabin, *Commun. Math. Phys.* **113**, 601 (1988).

- [19] S. B. Giddings, P. Nelson, *Commun. Math. Phys.* **116**, 607 (1988).
- [20] G. Falqui, C. Reina, Ref. S.I.S.S.A. 46/FM, Trieste 1989.
- [21] B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge University Press, Cambridge 1984.
- [22] M. Batchelor, in *Mathematical Aspects of Superspace*, ed. H.-J. Seifert, C. J. S. Clarke, A. Rosenblum, D. Reidel, Dordrecht 1984, p. 91.
- [23] J. Howie, *An Introduction to Semigroup Theory*, London 1976.
- [24] P. Teofilatto, *J. Math. Phys.* **29**, 2389 (1988).
- [25] J. M. Rabin, P. Topiwala, San-Diego preprint, December, 1988.
- [26] M. A. Baranov, Yu. I. Manin, I. V. Frolov, A. S. Schwarz, *Commun. Math. Phys.* **111**, 373 (1987).
- [27] L. Hodgkin, *Lett. Math. Phys.* **14**, 177 (1987).
- [28] S. A. Duplij, *Probl. Nucl. Phys. Cosm. Rays* **33**, 41 (1989), in Russian.
- [29] J. D. Cohn, *Nucl. Phys.* **B284**, 349 (1987).
- [30] E. B. Kiritsis, *Phys. Rev.* **D37**, 3048 (1987).
- [31] S. N. Dolgikh, A. A. Rosly, A. S. Schwarz, IC/89/210, Trieste 1989.
- [32] E. Melzer, *J. Math. Phys.* **29**, 1555 (1988).
- [33] K. Schoutens, *Nucl. Phys.* **B295**, 634 (1988); Y. S. Muyung, *Phys. Rev.* **D38**, 3139 (1988).
- [34] G. Falqui, C. Reina, Ref. S.I.S.S.A. 47/FM, Trieste 1989.
- [35] H. Minc, *Permanents*, Addison-Wesley, Reading 1978.
- [36] N. B. Backhouse, A. G. Fellouris, *J. Math. Phys.* **26**, 1146 (1985).
- [37] E. Ivanov, S. Krivonos, *Lett. Math. Phys.* **7**, 523 (1983).
- [38] J. D. Cohn, *Nucl. Phys.* **B306**, 239 (1988).
- [39] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241**, 333 (1984).
- [40] R. Brooks, F. Muhammad, S. J. Gates Jr., *Nucl. Phys.* **B268**, 599 (1986).
- [41] H. Kanno, Y. S. Myung, RIMS-639, Kyoto 1988.
- [42] N. Berkovits, *Nucl. Phys.* **B276**, 650 (1986).
- [43] N. Berkovits, EFI-68, 75, 87, Chicago 1988.
- [44] V. G. Kac, *Adv. Math.* **26**, 8 (1977).
- [45] R. Catenacci, C. Reina, P. Teofilatto, *J. Math. Phys.* **26**, 671 (1985).
- [46] M. Bershadsky, *Nucl. Phys.* **B310**, 79 (1988).
- [47] A. H. Clifford, G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence 1961; A. B. Paalman-de-Miranda, *Topological Semigroups*, Math. Centrum, Amsterdam 1964.