СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА МОДЕЛИ СОСТАВНЫХ ФЕРМИОНОВ С СУПЕРПРОСТРАНСТВОМ

М. А. Иванов

Научно-исследовательский институт прикладных физических проблем,
Белорусский государственный университет, 220064, Минск, Курчатова 7, СССР*

COMPARISON OF SPACE OF THE COMPOSITE FERMIONS MODEL WITH SUPERSPACE

M. A. Ivanov

(Received February 21, 1990)

Two types of extension of the Minkowski space-time are compared. It is shown that the composite fermions model can be considered in ($N = 2$)-superspace without torsion, with additional coordinates transforming independently from main coordinates. A set of supermanifolds corresponds to a set of solutions of the model. Their number and character of constraints determine an internal symmetry group, while in supersymmetrical models this group is determined by the extension degree N. Use of anticommuting coordinates leads to appearance of scalar SU(2)-doublets in the model.

PACS numbers: 11.10.Kk, 12.35.Kw

1. *Введение*

Как и в суперсимметричных моделях [1, 2], в модели составных фермионов [3] мы имеем дело с некоторым расширением пространства Минковского, но дополнительные координаты в последнем случае принадлежат некоторому дискретному множеству, погруженному в 4-пространство со специфической топологией.

В этой статье проведено сравнение этих двух типов расширений пространства Минковского. Показано, что модель [3] может рассматриваться как модель поля в ($N = 2$)-суперпространстве без кручения, с независимыми дополнительными координатами, в котором с помощью связей выделен набор супермногообразий, а смешивание решений, заданных на этих супермногообразиях, толкуется как

* Address: Research Institute of Applied Physical Problems, Belorussian State University, Kurchatov Street 7, 220064 Minsk, USSR.

внутренняя симметрия. При этом группа внутренней симметрии определяется характером связей и числом выделяемых супермногообразий, а не кратностью расширения N, как в суперсимметричных моделях. Расширение с $N = 2$ необходимо для обеспечения произвольной „нормы" $y^\mu y_\mu$ относительных координат компонентов составной системы.

В суперсимметричных моделях определяют суперпространство как расширение Z' пространства Минковского X с помощью дополнительных координат $\bar\theta_\alpha$, θ_α, $\alpha = 1, 2$, для которого справедливы аксиомы (рассмотрим их для кратности расширения $N = 1$):

1) координаты $x^\mu \in X$ и θ_α, $\bar\theta_\alpha$ преоразуются по переплетенным векторному и спинорному (коспинорному) представлениям группы Лоренца;

2) пространство Z' плоское с кручением — сдвиг по θ_α, $\bar\theta_\alpha$ сопровождается сдвигом по x^μ [4];

3) дополнительные координаты являются грассмановыми переменными.

Аксиома 2), вводимая с помощью определяющих соотношений между генераторами движения в суперпространстве, исторически была введена потому, что $\bar\theta_\alpha$, θ_α рассматривались в первых работах по суперсимметрии (например, в [5]) как безмассовые спинорные поля в пространстве X, что вызывало и необходимость введения аксиом 1), 3). Последние две определяют структуру мультиплета полей в X, входящих в суперполе.

Очевидно, что если отказаться от интерпретации $\bar\theta_\alpha$, θ_α как полей, подчиняющихся некоторым уравнениям движения в пространстве X, то все три аксиомы независимы. Отбрасывая любую из них, мы определим с помощью оставшихся некоторый новый тип расширения пространства Минковского, за которым можно сохранить название суперпространство.

Аксиомы 1), 2) противоречат аксиоме с) из [3] — о независимом от x^μ преобразовании дополнительных координат, и мы от них намерены отказаться. Но так как при этом оказывается возможным сохранить связь с векторными координатами y^μ из [3] с помощью формы второй степени, за дополнительными координатами θ_α, $\bar\theta_\alpha$ можно сохранить название спинорные.

2. *Сопоставление с ($N = 1$)-суперпространством*

Использованный Дираком [6] прием перехода от соотношения $E^2 = m^2 + \bar p^2$ к линейному уравнению может быть разбит на два этапа: алгебраический, не связанный с введением новых постулатов, этап линеаризации этого уравнения:

$$E\psi = \beta m\psi + \alpha_k p_k \psi, \tag{1}$$

где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_4)^T$ — набор новых переменных ψ_α, β и α_k — 4×4 матрицы, E, m, p_k — не изменились; и этап перехода к квантовому описанию, связанный с введением постулата о замене E и p_k операторами движения в пространстве X. Нас интересует именно первый этап, так как он позволяет связать векторные

y^μ и спинорные $\bar\theta_\alpha$, θ_α координаты. Если

$$y_0^2 = y_1^2+y_2^2+y_3^2, \tag{2}$$

то линеаризация с помощью матриц Паули $(\sigma^\mu) = (I^{(2)}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ дает

$$y_0\theta = \sigma^k y_k\theta, \tag{3}$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2)^{\mathrm{T}}$ — спинорные координаты; если $\bar\theta = (\bar\theta_1, \bar\theta_2)$, $\theta_\alpha, \bar\theta_\alpha \in C$, то формула

$$y^\mu = \bar\theta\sigma^\mu\theta \tag{4}$$

при условии $P = P^+$, где $P_{\alpha\dot\beta} = \theta_\alpha\bar\theta_{\dot\beta}$, связывает y^μ с $\bar\theta_\alpha$, θ_α [7]. При $[\bar\theta_\alpha, \theta_\beta] = [\theta_\alpha, \theta_\beta] = [\bar\theta_\alpha, \bar\theta_\beta] = 0$ выполняется (2), т.е. y^μ изотропен. „Норма“

$$s^2 \equiv y_0^2-y_1^2-y_2^2-y_3^2$$

будет произвольной, если $P_{\alpha\dot\beta}$ — произвольный спин-тензор валентности (1,1) [7].

Если же все $\bar\theta_\alpha$, θ_α антикоммутируют, то $s^2 = 8\bar\theta_1\theta_1\bar\theta_2\theta_2 \not\equiv 0$. Но при этом, как легко проверить по (4),

$$y_0^2 = s^2/4, \quad y_k^2 = -s^2/4, \quad k = 1, 2, 3, \tag{5}$$

т.е. неизотропные y^μ можно получить так только при введении мнимых y^0 или y^k. Набору y_A^μ из [3] соответствует замена в (4): $\bar\theta \to \bar\theta$, $\theta \to \sigma_A\theta$, где $(\sigma_A) = (\sigma'^\mu - \sigma'^\mu)$, $A = 1, \ldots, 8$, $(\sigma'^\mu) = (I^{(2)}, \sigma^1, -i\sigma^2, \sigma^3)$. В модели [3] некоторые $y_A^\mu = 0$; тогда для таких A из (4) получим $s^2 = 0$.

Из сказанного следует, что $(N = 1)$-суперпространство $(x; \bar\theta, \theta | y_A^\mu = \bar\theta\sigma^\mu\sigma_A\theta)$, в котором выделено 8 супермногообразий $y_A^\mu = \bar\theta\sigma^\mu\sigma_A\theta$, при действительных y^μ и $s^2 \not\equiv 0$ нельзя отобразить на пространство Z модели [3], даже если отказаться от аксиом 1), 2), независимо от того, сохраняется ли аксиома 3).

Конечно, в рассмотренном выше случае можно говорить и о супермногообразиях в $(N = 8)$-суперпространстве $(x; \bar\theta_A, \theta_A)$ со связями $\bar\theta_A = \bar\theta$, $\theta_A = \sigma_A\theta$.

Отметим ещё то, что пространство $(y^\mu = \bar\theta\sigma^\mu\theta;\ \bar\theta, \theta)$ является близким аналогом обычного суперпространства; преобразования

$$\bar\theta \to \bar\theta+\bar\zeta, \quad \theta \to \theta+\zeta$$

сопровождаются преобразованием

$$y^\mu \to y^\mu+\bar\theta\sigma^\mu\zeta+\bar\zeta\sigma^\mu\theta+\bar\zeta\sigma^\mu\zeta, \tag{6}$$

т.е. аксиома 2) выполняется, хотя алгебраическая связь (4) дает ещё сдвиг $\bar\zeta\sigma^\mu\zeta$, глобальный по $\bar\theta$, θ и совместимый с дифференциальной связью из [5]. Ничто не мешает ввести аксиому 1); но введение аксиомы 3) приводит к квантованию величин $(y^\mu)^2$ (5) и возможно только при мнимых y^0 или y^k; при действительных y^μ добавление аксиомы 3) ведет к компактификации $(y; \bar\theta, \theta) \to (0, \bar\theta, \theta)$.

Как и в классическом случае [7], произвольную норму s^2 обеспечивает отказ от частного вида спин-тензора $P_{\alpha\dot\beta} = \theta_\alpha\bar\theta_{\dot\beta}$, т.е. расширение с помощью компонент произвольного спин-тензора $P_{\alpha\dot\beta}$ до $Z'' = (x^\mu; P_{\alpha\dot\beta})$ с заменой связи (4) на

$$y^\mu_A = \sigma^\mu \sigma'_A P/2, \tag{7}$$

где $\sigma'_A = (I^{(2)}, -i\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3; -I^{(2)}, i\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$.

Если матрица P эрмитова, $y^\mu = \sigma^\mu P/2$ будут действительны, а (7) дает набор y^μ_A из [3]. Требовать антикоммутативности величин $P_{\alpha\dot\beta}$ нет резона, т.к. в частном случае это $\theta_\alpha \bar\theta_{\dot\beta}$ и такие величины коммутируют даже при антикоммутирующих θ_α, $\bar\theta_{\dot\beta}$. Но связь (7) линейна, и дискретному множеству $\{y^\mu_A\}$ соответствует дискретный набор величин $P_{\alpha\dot\beta}$.

Если все $\bar\theta_\alpha$, θ_α коммутируют и справедливо (4), то при независимых и действительных $\bar\theta$, θ фиксация действительных значений y^μ может соответствовать выделению в пространстве $(\bar\theta, \theta)$ некоторых струн; например, вектору $y^\mu = (l, 0, 0, l)$ соответствует двухсвязная незамкнутая струна

$$\bar\theta_2 = \theta_2 = 0, \quad \bar\theta_1 \theta_1 = l,$$

т.е. модель [3] может быть сопоставлена и с суперструнными моделями в пространстве $(x, \bar\theta, \theta)$ (см. обзор [8]).

Использование подобной (4) связи 3-векторных и спинорных координат является эффективным приемом решения уравнения Дирака для частицы в кулоновском потенциале [9]; связь (7) широко применяется для замены спинорных индексов на векторные и обратно [1].

3. *Сопоставление с* $(N = 2)$*-суперпространством*

Ограничения на норму s^2 векторов y^μ при использовании связи (4) обусловлены тем, что ей и уравнению (3) соответствует форма (2). Заменив (2) на

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = s^2 \tag{8}$$

с произвольной нормой s^2 и используя аналог (1):

$$\gamma^\mu y_\mu \chi = s\chi, \tag{9}$$

где γ^μ — матрицы Дирака, χ — биспинор, y_μ и s — те же что и в (8), можно использовать новую связь координат y_μ и χ_a, $\bar\chi_a$, $a = 1, 2, 3, 4$:

$$y^\mu = \bar\chi \gamma^\mu \chi. \tag{10}$$

Если $s = \bar\chi\chi$, то (8) будет выполняться при некоторых дополнительных ограничениях на $\bar\chi_a$, χ_a: для коммутирующих величин $\bar\chi_a$, χ_a нужно

$$R^2 = 0, \tag{11}$$

где $R \equiv \bar\chi\gamma^5\chi$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ($R \equiv 0$, если $\bar\chi = \chi^+\gamma^0$, $\chi^*_a = \chi_a$); для антикоммутирующих $\bar\chi_a, \chi_a$ требуется

$$R^2 + 8M = 0, \tag{12}$$

где $M \equiv \bar{\chi}_1\chi_1\bar{\chi}_4\chi_4+(\bar{\chi}_2\chi_2+\bar{\chi}_1\chi_1)\,\bar{\chi}_3\chi_3+\bar{\chi}_1\chi_4\bar{\chi}_2\chi_3+\bar{\chi}_3\chi_2\bar{\chi}_4\chi_1$. Принимая и в этом случае $\bar{\chi} = \chi^{+}\gamma^0$, $\chi_a^* = \chi_a$, получим в (12)

$$R^2+8M = 8\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4 = 0,$$

а также $s \equiv 0$, $y_1^0 \equiv 0$, т.е. при действительных y^μ и $y_1^k = 0$, $l = 0$; таким образом, здесь зависимость $\bar{\chi} = \chi^+\gamma^0$ соответствует локальному варианту модели [3] с симметрией SU (8).

Пространство $(y, \bar{\chi}, \chi)$ будет $(N = 2)$-суперпространством, если принять аксиомы 1), 3) и связь (10); на супермногообразии (12) в нем $s^2 = (\bar{\chi}\chi)^2$ — норма векторов y^μ. Чтобы y^μ были действительными, нужны связи $\operatorname{Im}\bar{\chi}\gamma^\mu\chi = 0$.

Чтобы получить набор y_A^μ из [3], в (10) нужна замена $\gamma^\mu \to \gamma_A^\mu$; в отличие от случая (4) $\gamma_A^\mu = \gamma^\mu\Gamma_A B_A^\mu$, где $B_A^\mu \in \{\pm I^{(4)}, \pm\gamma^5\}$, $B_1^\mu = I^{(4)}\,\forall\,\mu$, $\Gamma_1 = I^{(4)}$, $\Gamma_2 = iI^{(2)}\times\sigma^1$, $\Gamma_3 = \sigma^1\times\sigma^2$, $\Gamma_4 = \sigma^1\times\sigma^3$, $\gamma_{A+4}^\mu = -\gamma_A^\mu$. Однако $B_A^\mu = \pm\gamma^5$ только для $y_A^\mu = 0$, так что

$$y_A^\mu = 0 \Rightarrow \bar{\chi}\gamma^\mu\gamma^5\chi_A = 0,$$

$$y_A^\mu = \pm l \Rightarrow \bar{\chi}\gamma^\mu\chi_A = \pm l, \tag{13}$$

где $\chi_A = \Gamma_A\chi$ и в последней строке возможно и обратное соотвествие знаков. Таким образом, при отказе от аксиом 1), 2) $(N = 2)$-суперпространство $(x, \bar{\chi}, \chi)$, в котором связями

$$y_A^\mu = \bar{\chi}\gamma_A^\mu\chi = \operatorname{Re}\bar{\chi}\gamma_A^\mu\chi \tag{14}$$

выделен набор супермногообразий (тривиальных [10], т.к. (14) не зависит от x), можно отобразить на пространство $Z = (x, y_A^\mu)$ модели [3]: $x \to x$, $(\bar{\chi}, \chi) \to y_A^\mu$ по формулам (14). В кварковом секторе модели выделяющие многообразия связи имеют вид (13). Переход за счёт преобразований внутренней симметрии от состояния поля A к состоянию B может пониматься как следствие перехода с многообразия A на многообразие B в пространстве $(x, \bar{\chi}, \chi)$, т.е. внутренняя симметрия в таком контексте — результат смешивания решений, заданных на разных многообразиях. Можно говорить и о $(N = 16)$-суперпространстве $(x, \bar{\chi}_A, \chi_A)$ с дополнительными связями $\bar{\chi}_A = \bar{\chi}$, $\chi_A = \Gamma_A\chi$ и его отображении на Z; обычный аргумент об ограничении $N \leqslant 8$ не имеет силы при отказе от аксиом 1), 2).

Если переход между супермногообразиями (14) происходит за счёт сдвигов $\bar{\chi} \to \bar{\chi}+\bar{\xi}$, $\chi \to \chi+\xi$, то эти сдвиги должны удовлетворять условию

$$\bar{\chi}\gamma_A^\mu\xi+\bar{\xi}\gamma_A^\mu\chi+\bar{\xi}\gamma_A^\mu\xi = y_B^\mu-y_A^\mu \tag{15}$$

для некоторой пары индексов (A, B).

Супермногообразия (14) в $(x, \bar{\chi}, \chi)$ в общем случае не будут дискретными по $\bar{\chi}, \chi$, что дает возможность строить дифференциальную геометрию этого сложно устроенного пространства.

Связь (14) и уравнение (9) можно сравнить с разложением 4-вектора на „компоненты“ в базисе (γ^μ) [11]:

$$\hat{y} = y_\mu \gamma^\mu;$$

для матрицы $\hat{y}$ уравнение (9) — уравнение на собственные значения $\hat{y}\chi = s\chi$.

4. *Заключение*

Рассмотренное отображение суперпространства со связями на пространство Z модели [3] дает возможность сравнить эту модель с суперсимметричными моделями. Сравнение пространств показало, что модели [3] соответствует сложно устроенное суперпространство с $N = 2$ (точнее, необходимо $N \geqslant 2$), причем кратность расширения сама по себе не определяет группы внутренней симметрии, которую определяют теперь число и характер связей. Но не только они — то, что SU(2) должна быть киральной, следует из уравнений модели [3], но не из особенностей базового пространства $(x, \bar{\chi}, \chi)$.

Отказ от аксиом 1), 2) для антикоммутирующих координат $\bar{\chi}, \chi$ существенно меняет интерпретацию компонентных полей, входящих в скалярное суперполе в пространстве $(x, \bar{\chi}, \chi)$ — все они должны быть скалярными относительно группы Лоренца основного пространства. В частности, лагранжиан, рассматриваемый как такое суперполе, должен содержать члены разложения по степеням $\bar{\chi}, \chi$:

$$\bar{\Sigma}_A(x)\chi_A + \bar{\chi}\Sigma(x),$$

где $\bar{\Sigma}(x), \Sigma(x)$ — набор скалярных полей. SU(2) — преобразования не изменят этих слагаемых, если $(\bar{\Sigma}_A, \bar{\Sigma}_{\bar{A}})$, где $\bar{A} \equiv A+4 \pmod 8$, являются дублетами SU(2). Эти дублеты, вероятно, могут быть использованы для расщепления масс на основе механизма Хиггса. При локальном действии группы внутренней симметрии коэффициенты при произведениях $\bar{\chi}_\alpha, \chi_\beta$ могут имитировать обычно используемый потенциал скалярного поля.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Весс, Дж. Беггер, *Суперсимметрия и супергравитация*, Москва 1986.

[2] А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, *Поля и фундаментальные взаимодействия*, Киев 1986.

[3] M. A. Ivanov, *Acta Phys. Pol.* **B21**, 25 (1990).

[4] J. Wess, *Springer Lecture Notes in Phys.* **77**, 81 (1978).

[5] Д. В. Волков, В. П. Акулов, *Письма в ЖЭТФ* **16**, 621 (1972).

[6] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc.* (London) **A117**, 610; **A118**, 351 (1928).

[7] Ю. Б. Румер, А. И. Фет, *Теория групп и квантованные поля*, Москва 1977.

[8] Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко, *Успехи физических наук* **150**, 489 (1986).

[9] L. I. Komarov, T. S. Romanova, *J. Phys.* **B18**, 859 (1985).

[10] Ф. А. Березин, *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*, Москва 1983.

[11] A. Gamba, *J. Math. Phys.* **8**, 775 (1967).

[12] Т.П. Ченг, Л.-Ф. Ли, *Калибровочные теории в физике элементарных частиц*, Москва 1987.