Vol. B21 (1990) ACTA PHYSICA POLONICA No 11

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ С SU(6, 6)-СИММЕТРИЕЙ

В. А. Плетюхов

Брестский педагогический институт им. А. С. Пушкина*

QUANTUM THEORY OF THE TENSOR FIELD WITH SU(6, 6) SYMMETRY

V. A. Pletyukhov

(Received April 24, 1990)

The 48-component tensor field which can be used for the geometrized description of fermions with internal degrees of freedom is considered. Its quantum formulation on the basis of Fermi-Dirac statistics is given.

PACS numbers: 11.10.-z

1. В работах [1, 2] предложен общий метод вторичного квантования широкого класса релятивистских волновых уравнений с некомпактными группами внутренней симметрии. На этой основе показана возможность квантования по статистике Ферми-Дирака 16-компонентной тензорной полевой системы Дирака-Кэлера (см. также [3]) без возникновения в теории отрицательных вероятностей, что позволяет применять ее для описания дираковских частиц с внутренними степенями свободы. Однако более перспективными в этом отношении являются рассмотренные в [4, 5] две тензорные системы, имеющие 32 и 48 компонент и получающиеся при алгебраическом обобщении уравнения Дирака-Кэлера. Первая из них может служить, на наш взгляд, для описания кварков с восемью ароматами, а вторая — для геометризованного введения SU (3)-калибровочного взаимодействия [6]. Физическая реализация последней модели зависит от ряда обстоятельств, и в частности, от возможности непротиворечивого квантования 48-компонентной системы по инверсной (Ферми-Дирака) статистике. Дело в том, что общий подход к этой проблеме, развитый в [1, 2], не освобождает от необходимости явного доказательства релятивистски-инвариантного характера такого квантования применительно к конкретным волновым уравнениям. Кроме того, данная система обладает существен-

* Address: A. S. Puschkin Pedagogical Institute, Cosmonavtov Avenue 21, Brest, 224000, USSR.

ной особенностью, заключающейся в целесообразности введения двух дополнительных операторов для описания внутренних степеней свободы частицы, что требует некоторой модификации предложенной в [1, 2] схемы. Подробное исследование 48-компонентной полевой системы с указанных позиций является предметом настоящей работы.

2. Интересующая нас система уравнений базируется на схеме зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца

$$\begin{array}{ccccc} (\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}) - (1,1) & & (1,1) - (\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}) \\ | & \oplus & | \qquad\qquad | \\ (0,1) - (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) & & (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) - (1,0) \end{array}, \tag{1}$$

состоящей из двух незацепляющихся (по собственной группе Лоренца) Р-сопряженных друг другу фрагментов, которые могут трактоваться как произведения

$$(\tfrac{1}{2},1)\otimes[(0,\tfrac{1}{2})\oplus(\tfrac{1}{2},0)], \tag{2a}$$

$$(1,\tfrac{1}{2})\otimes[(0,\tfrac{1}{2})\oplus(\tfrac{1}{2},0)]. \tag{2b}$$

Приведенная в [4] тензорная формулировка теории преобразуется к виду

$$\partial_\lambda\varphi_{\lambda,\alpha\beta}+\tfrac{1}{3}(\partial_\alpha\varphi_\beta-\partial_\beta\varphi_\alpha-i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\varrho}\partial_\lambda\varphi_\varrho)+m\varphi_{\alpha\beta}=0, \tag{3a}$$

$$\begin{aligned}&\partial_\lambda\varphi_{\alpha,\lambda\beta}-\tfrac{2}{3}(\partial_\alpha\varphi_\beta-\partial_\beta\varphi_\alpha-i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\varrho}\partial_\lambda\varphi_\varrho)-\delta_{\alpha\beta}\partial_\varrho\varphi_\varrho\\ &\quad-i\varepsilon_{\alpha\eta\lambda\varrho}\partial_\eta\varphi_{\lambda,\varrho\beta}+m\varphi_{\lambda\alpha,\lambda\beta}=0,\end{aligned} \tag{4a}$$

$$\partial_\alpha\varphi_{\lambda\alpha,\lambda\beta}+\partial_\alpha\varphi_{\alpha\beta}+m\varphi_\beta=0, \tag{5a}$$

$$\begin{aligned}&\partial_\nu\varphi_{\mu\nu,\alpha\beta}+\partial_\mu\varphi_{\alpha\beta}-\tfrac{1}{3}(\delta_{\mu\alpha}\partial_\nu\varphi_{\eta\nu,\eta\beta}-\delta_{\mu\beta}\partial_\nu\varphi_{\eta\nu,\eta\alpha}\\ &\quad+\delta_{\mu\alpha}\partial_\eta\varphi_{\eta\beta}-\delta_{\mu\beta}\partial_\eta\varphi_{\eta\alpha}+i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\varrho}\partial_\nu\varphi_{\eta\nu,\eta\varrho}\\ &\quad+i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\varrho}\partial_\eta\varphi_{\eta\varrho})+m\varphi_{\mu,\alpha\beta}=0\end{aligned} \tag{6a}$$

плюс аналогичная система уравнений (обозначим ее, не выписывая, через (3б)-(6б)), получающаяся из (3а)-(6а) путем подстановок $\varphi_\beta\to\psi_\beta$, $\varphi_{\alpha\beta}\to\psi_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\lambda,\mu\nu}\to\psi_{\lambda,\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu,\alpha\beta}\to\psi_{\mu\nu,\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\to-\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$. В отличие от [4] все фигурирующие здесь тензоры сопоставляются неприводимым представлениям группы Лоренца: φ_β, $\psi_\beta-(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$; $\varphi_{\mu\nu,\alpha\beta}$, $\psi_{\mu\nu,\alpha\beta}-(1,1)$; $\varphi_{\alpha\beta}-(0,1)$ $\psi_{\alpha\beta}-(1,0)$; $\varphi_{\lambda,\mu\nu}-(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2})$, $\psi_{\lambda,\mu\nu}-(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2})$. С точки зрения классической теории релятивистских волновых уравнений полевая система (3а)-(6б) описывает спины 0, 1, 2 и характеризуется удвоением состояний по значению внутренней четности. Состояния со спиом 1 дополнительно вырождены с кратностью два, так что их полная кратность вырождения равна четырем.

Тензорная система (3а)-(6б) может быть записана в стандартной матричной форме

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0, \tag{7}$$

где волновая функция Ψ преобразуется по представлению (1), а матрицы Γ_μ размерности 48×48 удовлетворяют перестановочным соотношениям $[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu}$. При подходящем выборе базиса в пространстве представления Ψ матрицы Γ_μ и η (η-матрица инвариантной билинейной формы $\overline{\Psi}\Psi = \Psi^+\eta\Psi$) могут быть приведены к диагональному виду [4]

$$\Gamma_\mu = I_{12} \otimes \gamma_\mu, \tag{8}$$

$$\eta = \gamma_4 \otimes I_3 \otimes \gamma_4, \tag{9}$$

где γ_μ — обычные дираковские матрицы размерности 4×4 ($\gamma_4 = \sigma_3 \otimes I_2$, σ_m — матрицы Паули), I_N — единичная матрица $N \times N$. Отсюда следует инвариантность свободного лагранжиана теории

$$\mathscr{L}_0 = -\bar{\psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi \tag{10}$$

относительно преобразований U группы внутренней симметрии SU(6, 6).

Генераторы $J_{\mu\nu}$ представления группы Лоренца (1) (или (2а), (2б)) в базисе (8), (9) допускают разложение

$$J_{\mu\nu} = I_{12} \otimes J_{\mu\nu}^{[(0,\frac{1}{2})\oplus(\frac{1}{2},0)]} + J_{\mu\nu}^{[(\frac{1}{2},1)\oplus(1,\frac{1}{2})]} \otimes I_4, \tag{11}$$

где

$$J_{\mu\nu}^{[(0,\frac{1}{2})\oplus(\frac{1}{2},0)]} = \frac{1}{4}\gamma_{[\mu}\gamma_{\nu]},$$

$$J_{ik}^{(\frac{1}{2},1)} = \varepsilon_{ikm} J_m^{(\frac{1}{2},1)}, \qquad J_{ik}^{(1,\frac{1}{2})} = \varepsilon_{ikm} J_m^{(1,\frac{1}{2})},$$

$$J_m^{(\frac{1}{2},1)} = J_m^{(\frac{1}{2},0)} \otimes I_3 + I_2 \otimes J_m^{(0,1)},$$

$$J_m^{(1,\frac{1}{2})} = J_m^{(0,\frac{1}{2})} \otimes I_3 + I_2 \otimes J_m^{(1,0)},$$

$$J_m^{(0,\frac{1}{2})} = J_m^{(\frac{1}{2},0)} = \frac{1}{2}\sigma_m, \qquad J_m^{(0,1)} = J_m^{(1,0)},$$

$$J_1^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3^{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_{4m}^{(\frac{1}{2},1)} = -iJ_m^{(\frac{1}{2},0)} \otimes I_3 + I_2 \otimes iJ_m^{(0,1)},$$

$$J_{4m}^{(1,\frac{1}{2})} = iJ_m^{(0,\frac{1}{2})} \otimes I_3 + I_2 \otimes (-i)J_m^{(1,0)}.$$

Очевидно, что операторы $J_{\mu\nu}^{[(\frac{1}{2},1)\oplus(1,\frac{1}{2})]}$ являются генераторами представления подгруппы SL(3, C) группы SU(6, 6) внутренней симметрии теории и, следовательно, преобразования группы Лоренца образуют полупрямое произведение с преобразованиями внутренней симметрии. Отсюда вытекает возможность следующего разложения алгебры A_R группы полной инвариантности теории:

$$A_R = \{J_{\mu\nu}\} \boxed{\sim} (\{d_\mu\} \oplus \{U\}), \tag{12}$$

где $\{J_{\mu\nu}\}$, $\{d_\mu\}$, $\{U\}$ — совокупности генераторов групп Лоренца, пространственно-временных трансляций и внутренней симметрии соответственно, символ $\boxed{\sim}$ означает полупрямую сумму. Алгебра со структурой типа (12) обсуждалась в ряде работ (см., например, [7, 8]). Проведенный в [7] анализ показывает, что ее разложение можно осуществить еще и способом

$$A_R = (\{\check{J}_{\mu\nu}\} \boxed{\sim} \{d_\mu\}) \oplus \{U\}, \tag{13}$$

где применительно к рассматриваемой нами полевой системе

$$\check{J}_{\mu\nu} = I_{12} \otimes J_{\mu\nu}^{[(0,\frac{1}{2})\oplus(\frac{1}{2},0)]} = J_{\mu\nu} - J_{\mu\nu}^{[(\frac{1}{2},1)\oplus(1,\frac{1}{2})]} \otimes I_4.$$

С точки зрения разложения (12) лагранжиан (10) описывает тензорное поле со спинами 0, 1, 2 и внутренней симметрией, преобразования которой образуют полупрямое произведение с преобразованиями группы Лоренца (так называемая диальная симметрия [8]), тогда как согласно (13) — дираковское поле с обычной[1] внутренней симметрией.

3. Выбор между двумя приведенными трактовками может считаться вопросом соглашения, если тензорная система (3а)-(6б) допускает непротиворечивое квантование не только по статистике Бозе-Эйнштейна, но и по статистике Ферми-Дирака. Рассмотрим эту проблему, используя подход, развитый в [1, 2] для полей с некомпактными группами внутренней симметрии, с учетом тех замечаний, о которых говорилось в конце п. 1.

Уже отмечалось, что каждое состояние обсуждаемой 48-компонентной системы, характеризующееся определенными значениями 4-импульса p_μ, квадрата спина s^2 и его проекции s_n, является вырожденным. Для описания степеней свободы, соответствующих этому вырождению, введем два оператора $\hat{\Pi}$ и $\hat{\Pi}'$ ($\hat{\Pi}_0$ и $\hat{\Pi}_0'$ в системе покоя). Они, во-первых, должны коммутировать между собой и с операторами $\hat{p}_\mu$ (Γ_4 в системе покоя), $\hat{S}^2$ и $\hat{S}_n$, образуя совместно полный набор коммутирующих величин. Во-вторых, собственные значения λ_i ($i = 1, 2$) оператора $\hat{\Pi}_0$ (которые в [1, 2] названы П-четностью), выберем равными $+1$ и -1 и имеющими одинаковую кратность. П-четность, таким образом, описывает вырождение состояний, обусловленное присутствием представлений (2а) и (2б) в схеме зацеплений (1). Собственные значения $\mu_{i'}(i' = 1, 2)$ оператора $\hat{\Pi}_0'$ (их тоже можно задать равными ± 1) различают дополнительное двукратное вырождение состояний со спином 1; при этом состояниям со спинами 0 и 2 приписывается фиксированное значение дан-

[1] Под обычной понимается внутренняя симметрия, которой соответствуют степени свободы негеометрического (нелоренцевского) происхождения и чьи преобразования коммутируют с преобразованиями группы Лоренца.

ного квантового числа, например, $\mu_1 = +1$. Наконец, эти операторы должны удовлетворять условиям

$$\hat{\Pi}_0^+ \eta \hat{\Pi}_0 = \eta, \qquad (\hat{\Pi}_0')^+ \eta \hat{\Pi}_0' = \eta \tag{14}$$

и быть диагонализируемыми, т.е. иметь минимальные полиномы

$$\hat{\Pi}_0^2 - 1 = 0, \qquad (\hat{\Pi}_0')^2 - 1 = 0. \tag{15}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в базисе (8), (9) этим требованиям удовлетворяют операторы

$$\hat{\Pi}_0 = \sigma_3 \oplus I_{24}, \qquad \hat{\Pi}_0' = I_2 \otimes \begin{pmatrix} I_{12} & 0 \\ 0 & I_6 \otimes \sigma_3 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

причем одновременно с (16) спиновые операторы $\hat{S}^2$, $\hat{S}_n$ (общее определение которых дано в [9, 10]) приводятся к виду

$$\hat{S}^2 = I_2 \otimes \mathrm{diag}\,(6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 0, 6, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2), \tag{17}$$

$$\hat{S}_n = \hat{S}_3 = I_2 \otimes \mathrm{diag}\,(2, 1, 2, 1, -1, -2, -1, -2, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1). \tag{18}$$

Следуя [1, 2], введем переменную

$$g_{ii'lk}^{(\pm)} = \mathrm{sign}\,[\mathrm{Sp}\,(\tau_{ii'lk}^{(\pm)}\eta)], \tag{19}$$

которая при выполнении условия (14) определяет в системе покоя знак плотности энергии классического поля в состоянии $\psi_{ii'lk}^{(\pm)}$ (l, k — квантовые числа, характеризующие соответственно абсолютную величину и проекцию спина, индексы $(\pm)$ различают положительно- и отрицательно-частотные решения (знак массы)). Здесь $\tau_{ii'lk}^{(\pm)}(p)$ — проективный оператор [10, 11], выделяющий единственное состояние с фиксированными значениями всех величин, входящих в полный набор. В рассматриваемом случае он задается следующим образом:

$$\tau_{ii'lk}^{(\pm)}(p) = \kappa_\pm(\hat{p})\pi_i\pi_{i'}'\alpha_l^2\beta_k, \tag{20}$$

где

$$\kappa_\pm(\hat{p}) = P_\pm(\hat{p})/P_\pm(m), \qquad (\hat{p} \mp m)P_\pm(\hat{p}) \equiv P(\hat{p}) = 0, \tag{21}$$

$$\pi_i = P_i(\hat{\Pi})/P_i(\lambda_i), \qquad (\hat{\Pi} - \lambda_i)P_i(\hat{\Pi}) \equiv P(\hat{\Pi}) = 0, \tag{22}$$

$$\pi_{i'}' = P_{i'}(\hat{\Pi}')/P_{i'}(\mu_{i'}), \qquad (\hat{\Pi}' - \mu_{i'})P_{i'}(\hat{\Pi}') \equiv P(\hat{\Pi}') = 0, \tag{23}$$

$$\alpha_l^2 = Q_l(\hat{S}^2)/Q_l[l(l+1)], \qquad [\hat{S}^2 - l(l+1)]Q_l(\hat{S}^2) \equiv Q(\hat{S}^2) = 0, \tag{24}$$

$$\beta_k = Q_k(\hat{S}_n)/Q_k(k), \qquad (\hat{S}_n - k)Q_k(\hat{S}_n) \equiv Q(\hat{S}_n) = 0, \tag{25}$$

$P(\hat{p})$, $P(\hat{\Pi})$, $P(\hat{\Pi}')$, $Q(\hat{S}^2)$, $Q(\hat{S}_n)$ — минимальные полиномы операторов $\hat{p}$, $\hat{\Pi}$, $\hat{\Pi}'$, $\hat{S}^2$, $\hat{S}_n$; $P_\pm(\hat{p})$, $P_i(\hat{\Pi})$, $P_i(\hat{\Pi}')$, $Q_l(\hat{S}^2)$, $Q_k(\hat{S}_n)$ — их „усеченные" минимальные полиномы.

Расчет величин $g_{ii'lk}^{(\pm)}$ (19) с использованием выражений (8), (9), (16)—(18), (20)—(25) в системе покоя дает

$$g_{1s}^{(+)} = g_{2s}^{(-)} = 1, \quad g_{1s}^{(-)} = g_{2s}^{(+)} = -1, \tag{26}$$

где для упрощения записи введен индекс $s = \{i'lk\}$, объединяющий квантовые числа i', l, k, от которых, как видно, знак плотности энергии не зависит. Тогда условие нормировки по заряду $\overline{\psi}_{is}^{(\pm)}\Gamma_4\psi_{is}^{(\pm)} = \pm g_{is}^{(\pm)}$, которым мы будем пользоваться, принимает вид

$$\overline{\psi}_{1s}^{(\pm)}\Gamma_4\psi_{1s}^{(\pm)} = 1, \quad \overline{\psi}_{2s}^{(\pm)}\Gamma_4\psi_{2s}^{(\pm)} = -1. \tag{27}$$

Отсюда получаются следующие выражения для матриц-диад $\psi \cdot \overline{\psi}$ через оператор τ:

$$\psi_{1s}^{(\pm)} \cdot \overline{\psi}_{1s}^{(\pm)} = \pm\tau_{is}^{(\pm)} m/p_0, \quad \psi_{2s}^{(\pm)} \cdot \overline{\psi}_{2s}^{(\pm)} = \pm\tau_{2s}^{(\pm)} m/p_0. \tag{28}$$

Теперь, представляя операторные волновые функции $\Psi(x)$, $\overline{\Psi}(x)$ в виде

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_i \sum_s \int \{a_{is}(p)\psi_{is}^{(+)}(p)e^{ipx} + \overset{+}{b}_{is}(p)\psi_{is}^{(-)}(p)e^{-ipx}\} d^3p, \tag{29}$$

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_i \sum_s \int \{\overset{+}{a}_{is}(p)\overline{\psi}_{is}^{(+)}(p)e^{-ipx} + b_{is}(p)\overline{\psi}_{is}^{(-)}(p)e^{ipx}\} d^3p, \tag{30}$$

постулируем для операторов рождения и уничтожения перестановочные соотношения

$$[a_{1s}(p), \overset{+}{a}_{1s}(p')]_+ = [b_{1s}(p), \overset{+}{b}_{1s'}(p')]_+ = \delta_{ss'}\delta(p-p'), \tag{31}$$

$$[a_{2s}(p), \overset{+}{a}_{2s}(p')]_+ = [b_{2s}(p), \overset{+}{b}_{2s'}(p')]_+ = -\delta_{ss'}\delta(p-p') \tag{32}$$

(все остальные антикоммутаторы равны нулю), которые соответствуют квантованию нашей полевой системы по статистике Ферми-Дирака. Операторы числа частиц и античастиц определим так:

$$N_{1s}^{(+)} = \overset{+}{a}_{1s}a_{1s}, \quad N_{2s}^{(+)} = -\overset{+}{a}_{2s}a_{2s},$$

$$N_{1s}^{(-)} = \overset{+}{b}_{1s}b_{1s}, \quad N_{2s}^{(-)} = -\overset{+}{b}_{2s}b_{2s}. \tag{33}$$

При выборе условий квантования согласно (31), (32) определение (33) приводит к физически корректным собственным значениям операторов $N_{is}^{(\pm)}$.

Подставляя разложения (29), (30) в выражения для операторов заряда $Q = e\int \overline{\Psi}\Gamma_4\Psi d^3x$ и энергии $E = \int \{(\partial_4\overline{\Psi})\Gamma_4\Psi - \overline{\Psi}\Gamma_4\partial_4\} d^3x$ и используя условия (27), (31)—(33), получаем

$$Q = e\sum_i \sum_s (N_{is}^{(+)} - N_{is}^{(-)}), \tag{34}$$

$$E = \sum_i \sum_s (N_{is}^{(+)}\varepsilon_{is}^{(+)} + N_{is}^{(-)}\varepsilon_{is}^{(-)}) \tag{35}$$

($\varepsilon_{is}^{(\pm)} = |p_0|$, индексы у $\varepsilon_{is}^{(\pm)}$ указывают на принадлежность к соответствующему состоянию). Повторяя затем выкладки, проделанные в [1, 2] для случая квантования по инверсной статистике, приходим к причинным перестановочным соотношениям для операторных волновых функций

$$[\Psi_M(x'), \overline{\psi}_N(x'')]_+ = -2im\kappa_+(\hat{\nabla})\Delta_0(x), \tag{36}$$

где $\hat{\nabla} = \Gamma_\mu\partial_\mu$, $\Delta_0(x)$ — инвариантная дельта-функция, $x = x' - x''$, $M, N = 1 \div 48$.

Квантовое описание рассматриваемой полевой системы на основе перестановочных соотношений (31)—(32) предполагает использование пространства состояний с индефинитной метрикой $\mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_-$, где $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$ — подпространства с положительной и отрицательной нормами векторов состояний соответственно, причем

$$\mathscr{H}_+ : \psi_{1s}^{(+)}, \psi_{1s}^{(-)};$$
$$\mathscr{H}_- : \psi_{2s}^{(+)}, \psi_{2s}^{(-)}. \tag{37}$$

Для корректной вероятностной интерпретации теории необходимо, чтобы в ней отсутствовали переходы между состояниями из $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$. Существование необходимого правила запрета связано в данном случае м некомпактностью группы внутренней симметрии системы (3а)—(6б), одним из генераторов которой является оператор Π_0. Действительно, инвариантность лагранжиана $\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{\text{int}}$ относительно преобразований $\psi \to e^{i\hat{\Pi}_0\theta}\Psi$ приводит к дополнительному сохраняющемуся „заряду" G [1, 2]

$$G \sim \int \overline{\Psi}\Gamma_4\hat{\Pi}_0\Psi d^3x = \sum_s (N_{1s}^{(+)} - N_{2s}^{(+)} - N_{1s}^{(-)} + N_{2s}^{(-)}). \tag{38}$$

Из сравнения выражений (37) с (34), (38) следует, что одночастичные состояния из подпространств $\mathscr{H}_+$, $\mathscr{H}_-$ характеризуются такими сохраняющимися квантовыми числами как (e, g), $(-e, -g)$ для $\mathscr{H}_+$ и $(e, -g)$, $(-e, g)$ для $\mathscr{H}_-$ (обозначение e относится к электрическому, g — k „заряду" G частицы). Очевидно, что совместное действие законов сохранения для Q и G запрещает физически неприемлемые переходы между состояниями из $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$ для всех взаимодействий, не нарушающих внутреннюю симметрию теории.

Итак, квантование 48-компонентной тензорной полевой системы (3а)—(6б) по статистике Ферми-Дирака посредством условий (31)—(33) приводит к правильной корпускулярной картине поля (смотри (34), (35)) и причинным перестановочным соотношениям (36) для операторов Ψ, $\overline{\Psi}$, а также к корректной вероятностной интерпретации теории.

При квантовании обсуждаемой полевой системы по статистике Бозе-Эйнштейна мы получим иную структуру гильбертова пространства состояний с индефинитной метрикой, но для которой по-прежнему будут запрещены переходы между состояниями из $\mathscr{H}_+$ и $\mathscr{H}_-$. Подчеркнем также, что характер квантования не зависит от спиновых переменных. А это и означает возможность установления самосогласованной связи между квантовым описанием и спиновым содержанием теории.

4. Для проведенной процедуры квантования принципиально важно, чтобы разделение созтояний по П-четности носило лоренц-инвариантный характер. Релятивистское обобщение оператора П-четности имеет вид

$$\hat{\Pi} = T\hat{\Pi}_0 T^{-1}, \tag{39}$$

где T — преобразование представления (1) группы Лоренца, осуществляющее переход из системы покоя частицы в произвольную систему отсчета. Требуется доказать, что компоненты собственной функции Ψ_1 (Ψ_2) оператора $\hat{\Pi}$, отвечающей его собственному значению $\lambda_1 = +1$ ($\lambda_2 = -1$), выражаются только через компоненты аналогичной собственной функции $\Psi_1^0(\Psi_2^0)$ оператора $\hat{\Pi}_0$.

Если из базиса (8), (9), (16)—(18) перейти в базис, в котором

$$T = \begin{pmatrix} T_{\rm I} & \\ & T_{\rm II} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

где $T_{\rm I}$, $T_{\rm II}$ соответствуют представлениям (2а) и (2б), то оператор $\hat{\Pi}_0$ принимает вид[2]

$$\hat{\Pi}_0 = \sigma_1 \otimes I_{24}. \tag{41}$$

Преобразование, осуществляющее данный переход, имеет блочную структуру

$$A^0 = \begin{pmatrix} A_{11}^0 & A_{12}^0 \\ A_{11}^0 & -A_{12}^0 \end{pmatrix}$$

(A_{11}^0, A_{12}^0 — неособенные матрицы размерности 24 × 24), которая вытекает из условия $A^0(\sigma_3 \otimes I_{24}) = (\sigma_1 \otimes I_{24})A^0$. При этом $\Psi_{\rm I}^0 = A_{11}^0\Psi_1^0 + A_{12}^0\Psi_2^0$, $\Psi_{\rm II}^0 = A_{11}^0\Psi_1^0 - A_{12}^0\Psi_2^0$, где $\Psi_{\rm I}^0$, $\Psi_{\rm II}^0$ — компоненты волновой функции Ψ^0 в базисе (40). В произвольной системе отсчета $\Psi = (\Psi_{\rm I}, \Psi_{\rm II}) = T\Psi^0 = (T_{\rm I}\Psi_{\rm I}^0, T_{\rm II}\Psi_{\rm II}^0)$ и, следовательно,

$$\Psi_{\rm I} = T_{\rm I}A_{11}^0\Psi_1^0 + T_{\rm I}A_{12}^0\Psi_2^0, \tag{42}$$

$$\Psi_{\rm II} = T_{\rm II}A_{11}^0\Psi_1^0 - T_{\rm II}A_{12}^0\Psi_2^0. \tag{43}$$

Подстановка выражений (40), (41) для T и $\hat{\Pi}_0$ в (39) приводит к следующей форме оператора $\hat{\Pi}$ в рассматриваемом базисе:

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = T_{\rm I}T_{\rm II}^{-1}. \tag{44}$$

Преобразование формы (44) к диагональному виду $\hat{\Pi} = \sigma_3 \otimes I_{24}$, отвечающему структуре $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ волновой функции, осуществляется с помощью матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}B \\ A_{21} & -A_{21}B \end{pmatrix},$$

т.е. между компонентами $\Psi_{\rm I}$, $\Psi_{\rm II}$ и Ψ_1, Ψ_2 функции Ψ имеет место связь: $\Psi_1 = A_{11}\Psi_{\rm I} + A_{11}B\Psi_{\rm II}$, $\Psi_2 = A_{21}\Psi_{\rm I} - A_{21}B\Psi_{\rm II}$. Подставляя теперь сюда выражения (42),

---

[2] Структура (41) оператора $\hat{\Pi}_0$ в базисе (40) может рассматриваться как исходное определение П-четности, откуда следует, что последняя представляет собой альтернативную по отношению ко внутренней четности трактовку вырождения состояний, обусловленного наличием прямой суммы P-сопряженных фрагментов (2а) и (2б) в схеме зацеплений (1).

(43) для $\Psi_{\rm I}, \Psi_{\rm II}$ через Ψ^0_1, Ψ^0_2, и учитывая, что $BT_{\rm II} = T_{\rm I}$, получаем требуемые соотношения: $\Psi_1 = 2A_{11}T_{\rm I}A^0_{11}\Psi^0_1, \Psi_2 = 2A_{21}T_{\rm I}A^0_{12}\Psi^0_2$.

Завершая рассмотрение этого вопроса, отметим следующее. Поскольку знак плотности энергии классического поля от квантового числа i' в рассматриваемом случае не зависит (смотри (26)), то при фиксированных значениях знака массы и П-четности состояния, относящиеся к различным собственным значениям оператора $\hat{\Pi}'$, попадают в одно подпространство (либо $\mathscr{H}_+$, либо $\mathscr{H}_-$). Таким образом, проверять, чвляется ли разделение состояний по квантовому числу i' релятивистски-инвариантным, для наших целей нет необходимости.

5. После первоначального всплеска внимания к уравнению Дирака-Кэлера число публикаций на эту тему затем заметно уменьшилось. Причиной тому было несколько обстоятельств и прежде всего некомпактность и узость группы внутренней симметрии лагранжиана, что затрудняло физическую интерпретацию теории, ограничивало сферу возможных приложений. Предложенная в работах [1—3] квантовая формулировка системы Дирака-Кэлера частично разрешает указанные затруднения. Однако попытки использования этой системы для описания, например, „ароматов" кваркового поля [12, 13] по-прежнему весьма дискуссионны в силу того, что ее размерность (равная 16) не позволяет учесть уже ныне известные степени свободы кварков. Рассмотренная в настоящей работе тензорная полевая система имеет 48 компонент, и, таким образом, установленная здесь возможность ее непротиворечивого квантования по статистике Ферми-Дирака делает вполне обоснованным вывод о перспективности направления по геометризованному (тензорному) описанию внутренних степеней свободы фермионов (смотри в этой связи также [5]). В частности, как показано в [6], обсуждаемая 48-компонентная система может служить для описания SU(3)-симметрии кваркового поля в рамках решеточной формулировки КХД.

Editorial note. This article was proofread by the editors only, not by the authors.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, *Acta Phys. Pol.* **B19**, 751 (1988).
[2] В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, Ф. И. Федеров, Препринт Института физики АН БССР № 517, Минск 1988.
[3] И. А. Сатиков, В. И. Стражев, *Теоретич. математич. физика* 73, 16 (1987).
[4] В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, *Доклады АН БССР* 33, 328 (1989).
[5] В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, *Ядерная физика* 49, 1505 (1989).
[6] В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, *Теоретич. математич. физика*, будет опубликовано.
[7] P. Budinich, C. Fronsdal, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 968 (1965).
[8] В. И. Стражев, *Acta Phys. Pol.* **B9**, 449 (1978).
[9] А. А. Богуш, Л. Г. Мороз, *Введение в теорию классических полей*, Наука и техника, Мниск 1968.
[10] Ф. И. Федоров, *Группа Лоренца*, Наука, Москва 1979.
[11] Ф. И. Федоров, *ЖЭТФ* 35, 495 (1958).
[12] R. Edwards, D. Ritchie, D. Zwanziger, *Nucl. Phys.* **B296**, 961 (1988).
[13] G. T. Bodwin, E. V. Kovacs, *Phys. Rev.* **D38**, 1206 (1988).