

GREENSCHE FUNKTIONEN DER ELEKTRODYNAMIK IN GESCHLOSSENEN KOSMEN

The Electrodynamic Green Functions in a Closed Universe

VON H. STEPHANI

Fachbereich Theoretische Physik, Universität Jena*

(Eingegangen am 28. July 1971)

In a closed Einstein universe Green's functions of electrostatics and magnetostatics are given. An integral representation of the retarded potentials is constructed which is valid for a large class of timedependent sources; the exceptional cases are discussed. The results are generalized for closed universes with Robertson-Walker-metric.

Einführung

Im flachen Raum diskutiert man Eigenschaften von Lösungen der inhomogenen Maxwellgleichungen gern an ihren quellenmäßigen Darstellungen. In dieser Arbeit soll untersucht werden, wie sich die Tatsache, daß der dreidimensionale Ortsraum geschlossen ist, auf diese quellenmäßigen Darstellungen auswirkt. Es werden zunächst statische und dann beliebige Felder im Einsteinkosmos betrachtet. Unter Ausnützung der Konforminvarianz der Maxwellgleichungen lassen sich die Ergebnisse dann leicht auf Robertson-Walker-Metriken mit beliebiger Zeitabhängigkeit übertragen.

Die Elektrodynamik in Robertson-Walker-Metriken wurde schon von Schrödinger [1] (Lösungen der homogenen Gleichungen) und von Peters [2] und Katz [3] (Greensche Funktionen) untersucht. Die Ergebnisse von Peters und Katz bedürfen aber in vielen Punkten einer Klärung und Erweiterung; eine Reihe mathematischer Aussagen werden wir von ihnen übernehmen. Infeld und Schild [6] diskutierten Maxwellfelder in Kosmen mit elliptischem Raum konstanter Krümmung als Ortsraum. Im Gegensatz dazu wollen wir Punkt und Antipodenpunkt nicht identifizieren.

* Adresse: Fachbereich Theoretische Physik, Universität Jena, DDR 69 Jena, Max-Wien-Platz 1

1. Mathematische Eigenschaften des Einsteinkosmos

Ausgezeichnete Koordinatensysteme

Die Tatsache, daß der dreidimensionale Ortsraum geschlossen ist, sieht man am besten bei der Verwendung von Kugelkoordinaten

$$ds^2 = d\chi^2 + \sin^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - dt^2$$

$$0 \leq \chi \leq \pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (1)$$

Für manche Überlegungen ist jedoch ein quasikartesisches Koordinatensystem, das man durch

$$\begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ r/2 &= \operatorname{tg} \chi/2, & z &= r \cos \vartheta, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

eingeführen kann, geeigneter:

$$ds^2 = A^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dt^2 = A^2 dx^i dx^i - dt^2$$

$$r^2 = x^i x^i, \quad A = (1 + r^2/4)^{-1}. \quad (3)$$

Über gleichgestellte Indizes wird (wie in kartesischen Koordinaten im flachen Raum) von 1 bis 3 summiert.

Gelegentlich ist es zweckmäßig, sich den dreidimensionalen Ortsraum als Hyperkugel in einem vierdimensionalen Raum vorzustellen:

$$z^i = Ax^i, \quad z^4 = A(1 - r^2/4)$$

$$\sum_1^4 (z^B)^2 = 1, \quad \sum_1^4 (dz^B)^2 = A^2 dx^i dx^i. \quad (4)$$

Killingvektoren und Bewegungen im dreidimensionalen Ortsraum

Der Ortsraum besitzt als Raum konstanter Krümmung eine sechsparametrische Bewegungsgruppe mit den Killingvektoren

$$\zeta^i = A^{in} x^n + a^i \left(1 - \frac{r^2}{4} \right) + x^i \frac{a^n x^n}{2}, \quad A^{in} = -A^{ni}, \quad (5)$$

d. h. mit drei „Drehungen“ A^{ni} und drei „Translationen“ a^i .

Die endlichen Translationen erhält man, indem man z. B. eine z_1 - z_4 -Drehung der Hyperkugel (4) ausführt, nach x' auflöst und das Ergebnis drehungsinvariant schreibt:

$$x'^n = \frac{(x^n - a^n)(1 + a^2/4) + a^n/4(w - a)^2}{1 + \frac{aw}{2} + \frac{a^2 r^2}{16}}$$

$$r'^2 = \frac{(w - a)^2}{1 + \frac{aw}{2} + \frac{a^2 r^2}{16}}. \quad (6)$$

Diese Translation transformiert den Punkt $x^n = a_n$ in den Nullpunkt des Koordinatensystems.

Geodätischer Abstand und Parallelpropagator im Ortsraum

Der Abstand des Nullpunktes von einem beliebigen Punkt (a) ist in den Kugelkoordinaten (1) gleich dem Wert der Koordinate χ

$$\Psi(0, a) = \chi = 2 \arctg \frac{a}{2},$$

und da bei einer Bewegung (6) der geodätische Abstand Ψ invariant bleibt, folgt

$$\begin{aligned} \Psi(w, \bar{w}) &= 2 \arctg \frac{r'}{2} \\ r'^2 &= \frac{(w - \bar{w})^2}{1 + \frac{w\bar{w}}{2} + \frac{r^2 \bar{r}^2}{16}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Wenn ein beliebiges Vektorfeld $\lambda_k(x)$ längs einer Geodäten vom Punkt x (Index k) zum Punkt $\bar{x}$ (Index $\bar{m}$) parallel verschoben wird, kann man aus

$$\lambda_k(x) = g_{k\bar{m}} \lambda^{\bar{m}}(\bar{x}) \quad (8)$$

den Parallelpropagator $g_{km}(x, \bar{x})$ berechnen; er ist in Bezug auf beide Indizes ein Vektor [5]. Durch explizite Durchführung der Parallelverschiebung erhält man

$$g_{k\bar{m}}(0, a) = \frac{\delta_{km}}{1 + a^2/4}. \quad (9)$$

Den Parallelpropagator zwischen zwei beliebigen Punkten kann man aus (9) mit Hilfe einer Translation (6) berechnen.

Parallelpropagator und geodätischer Abstand werden die wichtigsten Bauelemente bei der Konstruktion Greenscher Funktionen sein. Bei Rechnungen mit ihnen sind entscheidende Vereinfachungen dadurch möglich, daß in einem geschlossenen Raum konstanter Krümmung ihre Ableitungen wieder durch die Funktionen selbst ausgedrückt werden können [2]:

$$\begin{aligned} \Psi_{,k;\bar{m}} &= -\frac{1}{\sin \Psi} (g_{k\bar{m}} + \Psi_{,k} \Psi_{,\bar{m}}) \\ \Psi_{,k;m} &= \operatorname{ctg} \Psi (g_{km} - \Psi_{,k} \Psi_{,m}) \\ g_{k\bar{m};n} &= \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} (g_{kn} \Psi_{,\bar{m}} - g_{n\bar{m}} \Psi_{,k}) \\ \Psi_{,k} &= -g_{k\bar{m}} \Psi_{,\bar{m}}, \quad \Psi_{,k} \Psi^{,k} = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Gleichungen (10) bleiben richtig, wenn man die Punkte x und $\bar{x}$ (die gequerten und die ungequerten Indizes) vertauscht.

2. Elektrostatik im Einsteinkosmos

Die Poissongleichung

Die Maxwellgleichungen reduzieren sich auf die Poissongleichung

$$U_{;n}^n = -\varrho, \quad n = 1 \dots, 3 \quad (11)$$

für das skalare Potential U . Während man im flachen Raum die Ladungsdichte ϱ beliebig vorgeben kann, folgt in einem geschlossenen Raum aus (11) nach Anwendung des Gaußschen Satzes

$$\int U_{;n}^n d^3V = 0 = \int \varrho d^3V, \quad (12)$$

d.h. die Gesamtladung muß verschwinden, damit die Poissongleichung integrierbar ist.

Diese Eigenschaft der Elektrostatik in geschlossenen Räumen zeigt sich auch daran, daß die nur von der "radialen" Koordinate χ abhängige Lösung der Potentialgleichung

$$U = c_1 + c_2 \operatorname{ctg} \chi \quad (13)$$

zwar bei $\chi = 0$ das singuläre Verhalten einer Punktladung hat, aber bei $\chi = \pi$ ein bis auf das Vorzeichen gleiches Verhalten zeigt: in (13) ist mit einer Punktladung Q im Nullpunkt stets eine Ladung $-Q$ im Antipodenpunkt gekoppelt.

Die quellenmäßige Darstellung des Potentials

Die Greensche Funktion $W_0(x, \bar{x})$ der Elektrostatik soll der Bedingung genügen, daß

$$U(x) = \int W_0(x, \bar{x}) \varrho(\bar{x}) d^3\bar{V} \quad (14)$$

für eine beliebige Ladungsverteilung Lösung der Poissongleichung (11) ist, wenn nur die Gesamtladung verschwindet. Wenn W_0 — wie wir ansetzen wollen — eine Funktion des geodätischen Abstands Ψ ist, heißt das, daß $W_0(\Psi)$ nur bei $\Psi = 0$ singulär sein darf und wegen (11), (14) und (10) der Gleichung

$$\int (W_0'' + 2W_0' \operatorname{ctg} \Psi) \varrho(\bar{x}) d^3\bar{V} = 0 \quad (15)$$

genügt. Die der Regularitätsbedingung für $\Psi = \pi$ genügende Lösung der aus (15) und (12) folgenden Differentialgleichung

$$W_0'' + 2W_0' \operatorname{ctg} \Psi = \text{const.}$$

ist die gesuchte Greensche Funktion

$$W_0(x, \bar{x}) = c_1 + \frac{\operatorname{ctg} \Psi}{4\pi} \left(1 - \frac{\Psi}{\pi} \right). \quad (16)$$

3. Magnetostatik im Einsteinkosmos

Die Feldgleichungen

Wenn das Maxwellfeld nur von zeitunabhängigen Strömen erzeugt wird, vereinfachen sich die Maxwellgleichungen

$$F_{\alpha;\beta}^{\beta} = J_{\alpha}, \quad F_{\{\alpha\beta;\gamma\}} = 0, \quad \alpha, \beta = 1 \dots, 4 \quad (17)$$

nach Einführung des Vektorpotentials A_n zu

$$(A_{p;i} - A_{i;p})_{;k} g^{ik} = -J_p \quad i, k, p = 1 \dots, 3. \quad (18)$$

Integrabilitätsbedingung dieses Systems ist die Kontinuitätsgleichung $J^m_{;m} = 0$. Multipliziert man sie mit einer beliebigen Funktion B des geodätischen Abstands, integriert und führt eine partielle Integration aus, erhält man

$$\int J^m(\bar{x}) B'(\Psi) \Psi_{;m} d^3 \bar{V} = 0$$

und hieraus durch Ableitung nach x^n

$$\int J^m \left[-\frac{B'}{\sin \Psi} g_{nm} + \left(B'' - \frac{B'}{\sin \Psi} \right) \Psi_{;n} \Psi_{;m} \right] d^3 \bar{V} = 0. \quad (19)$$

Die quellenmäßige Darstellung des Potentials

Als Bauelemente zur Konstruktion der Greenschen Funktion hat man den geodätischen Abstand Ψ , seine Ableitungen $\Psi_{;p}$ und $\Psi_{;m}$ und den Parallelpropagator g_{pm} zur Verfügung; wegen (10) brauchen höhere Ableitungen nicht mitgenommen zu werden. Gesucht sind also Funktionen $G_0(\Psi)$ und $H_0(\Psi)$ mit der Eigenschaft, daß

$$A_p(x) = \int J^m(\bar{x}) [G_0(\Psi) g_{pm} + H_0(\Psi) \Psi_{;p} \Psi_{;m}] d^3 \bar{V} \quad (20)$$

für eine beliebige, der Kontinuitätsgleichung genügende Stromverteilung J^m Lösung der Maxwellgleichungen (18) ist. Insbesondere dürfen G_0 und H_0 nur bei $\Psi = 0$ singularär sein.

Ein Vergleich dieses Ansatzes mit der Identität (19) zeigt, daß die Funktionen G_0 und H_0 nicht eindeutig bestimmbar sein können. Dies kommt auch darin zum Ausdruck, daß in die Feldstärken

$$F_{ip} = A_{p;i} - A_{i;p} = \int J^m N'_0(\Psi) (g_{mp} \Psi_{;i} - g_{mi} \Psi_{;p}) \quad (21)$$

nur die Kombination

$$N'_0 = G'_0 + \frac{H}{\sin \Psi} - G'_0 \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} \quad (22)$$

eingeht.

Einsetzen von (20) in die Maxwellgleichungen gibt nach Benutzung von (19) die Differentialgleichung

$$N''_0 + N'_0 \frac{1 + \cos \Psi}{\sin \Psi} - \frac{N_0}{1 + \cos \Psi} = \frac{\text{const}}{1 + \cos \Psi}$$

mit der (nur bei $\Psi = 0$ singulären) Lösung

$$N_0 = \text{const} + \frac{1 - \Psi/\pi}{4\pi \sin \Psi}. \quad (23)$$

G_0 und H_0 können nun aus (23) bestimmt werden. Besonders einfache Möglichkeiten sind

$$4\pi G_0 = \frac{1 - \Psi/\pi}{\sin \Psi}, \quad 4\pi H_0 = (1 - \Psi/\pi) \operatorname{tg} \Psi/2$$

$$G_0 = 0, \quad 4\pi H_0 = -(1 - \Psi/\pi) \operatorname{ctg} \Psi - \frac{1}{\pi}. \quad (24)$$

Die Potentiale (20) erfüllen für beliebige Funktionen G_0 und H_0 die Coulombbeziehung $A_{;n}^n = 0$.

Wie im flachen Raum kann man auch im Einsteinkosmos die Stromverteilung J^m durch eine Dipoldichte M_r ersetzen

$$J^m = \varepsilon^{msr} M_{r;s}$$

und unter Verwendung von W_0 das zugehörige skalare magnetische Potential berechnen. Die aus ihm abgeleiteten Feldstärken stimmen mit (21), (23) überein.

4. Elektrodynamik im Einsteinkosmos

Feldgleichungen und Kontinuitätsgleichung

Die Maxwellgleichungen (17) geben nach Einführung des Viererpotentials $A^a = (A^a, U)$ die Gleichungen

$$A_{;b,4}^b + U_{;b}^b = -\varrho$$

$$[(A_{a;s} - A_{s;a})g^{at}]_{;i} + U_{;s,4} + A_{s,44} = J_s. \quad (25)$$

Sie sind nur dann integrabel, wenn die Kontinuitätsgleichung

$$J_{;m}^m + \varrho_{,4} = 0 \quad (26)$$

erfüllt ist und die Gesamtladung verschwindet. Aus ihr folgt eine Reihe von Gleichungen, die man benutzen kann, um Integrale über die Ladungsdichte ϱ durch Integrale über die Stromdichte zu ersetzen:

$$\int \varrho(\bar{x}) A \delta' d^3 \bar{V} d\bar{t} = - \int J^m(\bar{x}) (A' \delta + A \delta') \Psi_{,m} d^3 \bar{V} d\bar{t}$$

$$\int \varrho A \delta'' d^3 \bar{V} d\bar{t} = - \int J^m (A' \delta' + A \delta'') \Psi_{,m} d^3 \bar{V} d\bar{t}$$

$$\int \varrho A \delta' \Psi_{,p} d^3 \bar{V} d\bar{t} = - \int J^m \left[\left(- \frac{A g_{pm}}{\sin \Psi} + \left(A' - \frac{A}{\sin \Psi} \right) \Psi_{,p} \Psi_{,m} \right) \delta + \right. \\ \left. + A \Psi_{,p} \Psi_{,m} \delta' \right] d^3 \bar{V} d\bar{t} \quad (27)$$

usw.

$$A = A(\Psi), \quad \delta = \delta(\bar{t} - t + \Psi).$$

Die Greenschen Funktionen — der Ansatz von Peters

Da der Einsteinkosmos konform flach ist, breiten sich elektromagnetische Wirkungen nur auf dem Lichtkegel aus. Peters [2] machte deshalb den Ansatz

$$A_p(x, t) = \int \bar{J}^m(\bar{x}, \bar{t}) [G(\Psi) g_{p\bar{m}} + H(\Psi) \Psi_{,p} \Psi_{,\bar{m}}] \delta(\bar{t} - t + \Psi) d^3 \bar{V} d\bar{t}$$

$$U(x, t) = \int \varrho(\bar{x}, \bar{t}) W(\Psi) \delta(\bar{t} - t + \Psi) d^3 \bar{V} d\bar{t} \quad (28)$$

für die retardierten Potentiale (auf die wir uns hier beschränken wollen). Einsetzen in die Maxwellgleichungen, Elimination von ϱ vermöge (27) und Nullsetzen der Faktoren von J^m und seiner zeitlichen Ableitungen gibt ein System von Differentialgleichungen für G , H und W , deren einzige Lösung

$$4\pi W = \text{ctg } \Psi, \quad 4\pi G = \frac{1}{\sin \Psi}, \quad 4\pi H = \text{tg } \frac{\Psi}{2} \quad (29)$$

ist. Dieses Ergebnis ist aus mehreren Gründen unbefriedigend: 1. Da die Greenschen Funktionen (29) nicht mit denen der Statik (16), (24) übereinstimmen (die Peters offensichtlich nur teilweise bekannt waren), ist die Elektro- bzw. Magnetostatik ohne ersichtlichen Grund nicht als Spezialfall enthalten. 2. Da die Greenschen Funktionen (29) auch bei $\Psi = \pi$ singularär sind, fügen sie zu der tatsächlich vorhandenen Ladungs- und Stromverteilung noch eine mit entgegengesetztem Vorzeichen im Antipodenpunkt hinzu — die Potentiale (28), (29) sind im allgemeinen gar keine Lösungen der Maxwellgleichungen.

Konstruktion von fast immer benutzbaren quellenmäßigen Darstellungen

Man könnte daran denken, den Ansatz (28) für die Potentiale dadurch zu erweitern, daß man auch Abhängigkeiten des Vektorpotentials von der Ladung und des skalaren Potentials vom Strom zuläßt. Es zeigt sich aber nach längerer Rechnung, daß auch dann nur die Lösung (28), (29) existiert.

Man kann jedoch die störenden Singularitäten im Antipodenpunkt (den wir mit $\bar{x} \pm \pi$ bezeichnen wollen) dadurch eliminieren, daß man das Potential der Antipodenladungen bzw. -ströme von dem ursprünglichen Potential abzieht:

$$4\pi U_1 = \int \varrho(\bar{x}, t - \Psi) \text{ctg } \Psi d^3 \bar{V}$$

$$4\pi U_2 = \int \varrho(\bar{x} + \pi, t - \Psi - \pi) \text{ctg } \Psi d^3 \bar{V} \quad U = U_1 + U_2. \quad (30)$$

Das Integral für U_2 können wir anders schreiben, indem wir die Integrationsvariable $\bar{x}$ umbenennen $\bar{x} + \pi \rightarrow \bar{x}$, $\Psi \rightarrow \pi - \Psi$:

$$4\pi U = \int \text{ctg } \Psi [\varrho(\bar{x}, t - \Psi) - \varrho(\bar{x}, t - 2\pi + \Psi)] d^3 \bar{V}. \quad (31)$$

Man könnte vermuten — wie Peters bei der Diskussion von U_1 — daß im zweiten Summanden wegen der Kombination $t + \Psi$ avancierte Effekte enthalten sind; dies ist jedoch eine Täuschung: in dieser Schreibweise kommt nur zum Ausdruck, daß eine von einem Punkt ausgehende Welle für den Antipodenpunkt eine einlaufende Welle ist.

Es gilt dann — mit der analogen Summe beim Vektorpotential —

$$F_{;\beta}^{\alpha\beta}(x, t) = J^{\alpha}(x, t) - J^{\alpha}(x, t - 2\pi), \quad (32)$$

d.h. man hat sich dafür ein falsches Quellverhalten im Ausgangspunkt eingehandelt. Der störende zweite Summand auf der rechten Seite bezieht sich aber auf einen früheren Zeitpunkt. Wir können dies Verfahren iterieren und erhalten

$$\begin{aligned} 4\pi U(x, t) &= \int \operatorname{ctg} \Psi \cdot \sum_{n=0}^{N-1} [\varrho(\bar{x}, t - \Psi - 2n\pi) - \varrho(\bar{x}, t + \Psi - 2(n+1)\pi)] d^3 \bar{V} \\ 4\pi A_p(x, t) &= \int \left(\frac{g_{p\bar{m}}}{\sin \Psi} + \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} \Psi_{,p} \Psi_{,\bar{m}} \right) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{N-1} [J^{\bar{m}}(\bar{x}, t - \Psi - 2n\pi) - J^{\bar{m}}(\bar{x}, t + \Psi - 2(n+1)\pi)] d^3 \bar{V} \\ F_{;\beta}^{\alpha\beta} &= J^{\alpha}(x, t) - J^{\alpha}(x, t - 2N\pi). \end{aligned} \quad (33)$$

Der in (33) zum Ausdruck kommende Mechanismus läßt sich leicht anschaulich beschreiben: die von den Quellen des Feldes ausgehenden Wirkungen pflanzen sich längs des Lichtkegels fort und durchlaufen dabei den Kosmos mehrfach.

Die Potentiale (33) sind dann befriedigende Lösungen der Maxwellgleichungen, wenn vor hinreichend langer Zeit ($N \rightarrow \infty$) Ladungen und Ströme verschwinden. Eine solche Bedingung ist für nichtstatische Felder in einem geschlossenen Kosmos verständlich, da ja die erzeugte Strahlung den Raum nicht verlassen und so nach unendlich langer Zeit zu einem singulären Feld führen kann.

Die quellenmäßige Darstellung ist nicht anwendbar auf zeitunabhängige Ladungen und Ströme (deren Feld wir aber beherrschen) und auf Ladungen und Ströme, die zeitlich ganzzahlig periodisch sind, d.h. für

$$J^{\alpha}(x, t) = J^{\alpha}(x, t \pm 2n\pi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Den Grund für die Ausnahmestellung dieser Ladungs- und Stromverteilung versteht man, wenn man eine Fourieranalyse der Quellen und ihrer Felder durchführt.

Fourierzerlegung und Greensche Funktionen der zeitfreien Maxwellgleichungen

Für die Fourierkomponenten von Viererpotential und Viererstrom

$$J^{\alpha} = \int J^{\alpha}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad A^{\alpha} = \int A^{\alpha}(x, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (35)$$

gelten die zeitfreien Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} U_{;b}^{\cdot b}(x, \omega) + i\omega A_{;b}^b(x, \omega) &= -\varrho(x, \omega) \\ [(A_{a;b}(x, \omega) - A_{b;a}(x, \omega)) g^{bs} g^{ai}]_{;i} + i\omega U^s(x, \omega) - \omega^2 A^s(x, \omega) &= J^s(x, \omega). \end{aligned} \quad (36)$$

Für die quellenmäßige Darstellung ihrer Lösung machen wir den zu (14) und (20) analogen Ansatz

$$U(x, \omega) = \int W(\Psi, \omega) \varrho(\bar{x}, \omega) d^3\bar{V}$$

$$A_p(x, \omega) = \int J^{\bar{m}}(\bar{x}, \omega) [G(\Psi, \omega) g_{p\bar{m}} + H(\Psi, \omega) \Psi_{,p} \Psi_{,\bar{m}}] d^3\bar{V}, \quad (37)$$

Einsetzen in die Maxwellgleichungen gibt ein System von Differentialgleichungen mit der Lösung

$$4\pi \begin{pmatrix} W(\Psi, \omega) \\ G(\Psi, \omega) \\ H(\Psi, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ctg} \Psi \\ \sin^{-1} \Psi \\ \operatorname{tg} \Psi/2 \end{pmatrix} (c_1 \cos \Psi \omega + c_2 \sin \Psi \omega). \quad (38)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 sind so zu bestimmen, daß sich W und G bei $\Psi = 0$ wie $1/4\pi\Psi$ verhalten und sonst regulär sind:

$$4\pi \begin{pmatrix} W \\ G \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ctg} \Psi \\ \sin^{-1} \Psi \\ \operatorname{tg} \Psi/2 \end{pmatrix} \frac{\sin \omega(\pi - \Psi)}{\sin \omega\pi}. \quad (39)$$

Dies sind die Greenschen Funktionen der zeitfreien Maxwellgleichungen. Die Greenschen Funktionen der Statik sind als Spezialfall $\omega \rightarrow 0$ enthalten.

Wie man aus (39) abliest, ist der Fall auszuschließen, daß ω ganzzahlig ist — die Regularität bei $\Psi = \pi$ ist nicht erreichbar. Dies liegt daran, daß für ganzzahliges ω die zeitfreien Maxwellgleichungen (36) für räumlich beliebige Ladungs- und Stromverteilungen $J^a(x, \omega)$ gar nicht lösbar sind.

Bemerkungen zum Sonderfall ganzzahliger Frequenz

Die homogenen Maxwellgleichungen (ohne Ladungen und Ströme) haben in einem geschlossenen Einsteinkosmos den Charakter von Eigenwertgleichungen. Sie besitzen — wie von Schrödinger [1] gezeigt wurde — nur Lösungen, die zeitlich ganzzahlig periodisch sind: (36) mit $\varrho = J^s = 0$ ist nur für $\omega = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ lösbar.

Diese Eigenwertgleichungen definieren ein vollständiges System räumlicher Funktionen, nach denen sich Viererpotential und Viererstrom entwickeln lassen, vgl. z. B. die Entwicklung des Viererpotentials, Formeln 9.31 f. in [6]. Nach den bekannten Sätzen über Eigenwertprobleme haben die inhomogenen Gleichungen genau dann Lösungen und lassen sich die Entwicklungskoeffizienten des Potentials aus denen des Stromes genau dann berechnen, wenn $J^a(x, \omega)$ auf allen zu ω gehörenden Eigenfunktionen orthogonal ist.

Es ist deshalb verständlich, daß die Fälle ganzzahliger Frequenz weder in (39) noch in (33) erfaßt werden konnten.

Zusammenfassung

Wir können das Potential einer Ladungs- und Stromverteilung in folgenden Fällen und ihren Kombinationen konstruieren:

- a) Elektrostatik (14), (16); Magnetostatik (20), (24).

b) Strom- und Ladungsverteilungen, die nicht statisch, zeitlich nicht ganzzahlig periodisch sind und für $t \rightarrow -\infty$ verschwinden: (33) mit $N \rightarrow \infty$.

c) Streng periodische Strom- und Ladungsverteilungen (37), (39).

5. Elektrodynamik in zeitabhängigen Robertson-Walker-Metiken

Jeder geschlossene Kosmos mit Robertson-Walker-Metrik ist dem Einsteinkosmos konform äquivalent (in diesem Abschnitt weist "E" immer auf den Einsteinkosmos hin, Größen ohne E beziehen sich auf beliebige R-W-Metrik):

$$ds^2 = R^2(t) ds_E^2. \quad (40)$$

Da bei geeigneter Transformation des Viererstroms die Elektrodynamik konforminvariant ist, kann man die für den Einsteinkosmos gewonnenen Ergebnisse leicht übertragen: Man kann die Lösung der Maxwellgleichungen

$$[(A_{\sigma;\tau} - A_{\tau;\sigma})g^{\alpha\tau}g^{\beta\sigma}]_{;\beta} = J^\alpha \quad (41)$$

erhalten, indem man

$$A_\sigma = A_\sigma^E, \quad J^\alpha = J^\alpha \cdot R^{-4}(t) \quad (42)$$

setzt und A^α aus J^α gemäß den für den Einsteinkosmos geltenden Beziehungen bestimmt. Bei der physikalischen Diskussion ist zu beachten, daß t eine Koordinatenzeit ist, nicht die Weltzeit.

Meinen Kollegen Dr D. Kramer und Dr G. Neugebauer danke ich für wertvolle Anregungen und Diskussionen.

LITERATUR

- [1] E. Schrödinger, *Proc. R. Irish Acad.* **46A**, 25 (1940).
- [2] P. C. Peters, *J. Math. Phys.*, **10**, 1216 (1969).
- [3] A. Katz, *J. Math. Phys.*, **9**, 1694 (1968).
- [4] L. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton 1949.
- [5] J. L. Synge, *Relativity — The General Theory*, Amsterdam 1960.
- [6] L. Infeld, A. Schild, *Phys. Rev.*, **70**, 414 (1946).