Vol. B 3 (1972) ACTA PHYSICA POLONICA No 5

К ПРОБЛЕМЕ ДВУХ ТЕЛ В ТЕОРИИ ПРЯМОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. I

On Two-Body Problem in the Theory of Direct Gravitational Interaction. I

В. И. Жданов, К. А. Пирагас

Институт теоретической физики АН УССР, Киев*

(Поступила в редакцию 14 апреля 1972 г.)

The problem of two gravitating bodies is considered in terms of a direct interparticle action. The action functional is given in a mathematically correct form. The equations following from the action priciple contain both retarded and advanced potentials, however with the given functional the theory may easily be reformulated for only retarded interactions. The existence and uniqueness theorem is proved under certain conditions, provided the initial functions are given on some finite interval.

1. Введение

Проблема многих гравитирующих тел в рамках современной теории тяготения является довольно сложной и неполучившей до последнего времени окончательного разрешения. Более того, она не поставлена математически. Известны лишь частные её решения, основанные на приближениях [1—3]. Трудности возникающие при её постановке и решении во многом связаны с тем, что уравнения поля гравитации являются нелинейными (здесь не может быть применена процедура, аналогичная процедуре перенормировки квантовой теории поля без существенного её изменения, которая позволила бы исключить сингулярности в точках расположения источников, введя определенные добавки, после чего уравнения движения представляли бы геодезические линии регуляризованного риманова многообразия V_4) и, во-вторых, с конечной скоростью распространения гравитационного взаимодействия. Нелинейность уравнений поля приводит к тому, что уравнения движения источников и уравнения поля не могут быть заданы независимо. В этой связи Эйнштейном была высказана гипотеза, что уравнения движения в нелинейных

* Address: Institute for Theoretical Physics, Academy of Sciences, Ukrainian SSR, Kiev 130, Metrologicheskaya St. 14-b, USSR.

теориях содержатся в уравнениях поля. В частности, эта гипотеза была доказана в пост-ньютоновском приближении для эйнштейновских уравнений Эйнштейном, Инфельдом, Гофманом [1] и независимо несколько другим методом Фоком [2]. Доказательство этой гипотезы в общем случае сопряжено с рядом технических трудностей, хотя физически она довольно очевидна.

Ввиду наличия указанных трудностей при постановке проблемы многих тел в рамках ОТО, мы попытаемся поставить эту проблему в несколько упрощенном варианте, но в котором проявляются основные трудности и особенности при её постановке в рамках ОТО — гравитационное взаимодействие будем описывать с помощью теории прямого гравитационного взаимодействия учитывающего запаздывание взаимодействий. Первые попытки построения такой теории можно найти в работах Шварцшильда, Тетроде [4] и в наиболее законченном варианте в работе Фоккера [5]. Интерес к этим работам был возобновлен работами Уилера и Фейнмана [6—7] в связи с проблемой механизма реакции излучения электромагнитного поля. В последнее время этот метод использовался для решения ряда конкретных задач электродинамики в работах Старушкевича [8—9].

Применительно к гравитационным взаимодействиям идея использования действия типа Фоккера привлекалась в работах Грановского и Пантюшина [10], Волкова [11—12], а также в ряде других работ [13—15].

Известно, что требование равенства нулю первой вариации Фоккеровского действия при произвольных вариациях координат источника, приводит к уравнениям движения, которые представляют дифференциально-разностные уравнения и которые не могут быть сведены, вообще говоря, к уравнениям типа Гамильтона. К выводу о том, что уравнения движения источников, взимодействие которых происходит под действием сил, распространяющихся с конечной скоростью, будут не гамильтоновского типа, пришли многие авторы [16]. Отметим фундаментальный результат, полученный из принципа Лоренц-инвариантности Курье, Йорданом и Судершаном [17] известный под названием „теоремы не-взаимодействия“, в силу которой невозможно построить, требуя „жесткой“ Лоренц-инвариантности, гамильтонов формализм взаимодействующих частиц, кроме случая, когда эти частицы не взаимодействуют.

В данной работе мы рассматриваем проблему лишь двух гравитирующих тел в рамках формализма Фоккера, имея в виду, что обобщение многих результатов на случай произвольного числа тел не имеет принципиальных отличий и сопряжено лишь с техническими трудностями. Кроме того, нас в итоге будет интересовать конкретная задача двух тел — когда последние движутся по круговым орбитам (модель двойной звезды), в частности, вопрос об устойчивости такого образования.

Мы хотим ещё раз подчеркнуть, что используемый нами формализм мы ни в коей мере не считаем окончательным вариантом решения проблемы двух гравитирующих тел, но он интересен тем, что, как мы уже подчеркивали, в этом формализме учитывается ряд особенностей возникающих в проблеме многих тел в рамках ОТО и, кроме того, при малых скоростях он с большой степенью точности совпадает с выводами ОТО [13].

2. *Уравнения движения двух гравитирующих тел и некоторые их свойства*

Согласно [10], действие Фоккера для двух гравитирующих тел будет иметь вид:

$$S = -m_a \int \sqrt{\dot{x}_a^\mu \dot{x}_{a\mu}}\, d\tau - m_b \int \sqrt{\dot{x}_b^\mu \dot{x}_{b\mu}}\, d\tau +$$
$$+ \varkappa \iint d^4x_1 d^4x_2 \tau_a^{\mu\nu}(x_1) \tau_b^{\alpha\beta}(x_2) D_{\mu\nu,\alpha\beta}(x_1 - x_2) \tag{2.1}$$

где индексы a и b относятся к частице a и b соответственно, $\tau^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса частиц, $\varkappa$ — константа взаимодействия,

$$D_{\mu\nu,\alpha\beta} = (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})\delta((x_1 - x_2)^2) \tag{2.2}$$

здесь $\eta_{\alpha\beta}$ — тензор Минковского, $\delta(x) - \delta$ — функция Дирака. Единицы выбраны так, что $c = 1$. Эти соотношения могут быть получены из квантовой линеаризованной теории гравитации [18], рассматривая низшие порядки возмущения для S-матрицы. Если введем далее обозначение $x^\alpha = (t, \vec{\zeta})$, то выражение для тензора энергии импульса имеет вид:

$$\tau_i^{\mu\nu}(x) = \frac{m_i \delta(\vec{r} - \vec{\zeta}(t))}{\sqrt{1 - \dot{\vec{\zeta}}_i^2(t)}} \frac{dx_i^\mu}{dt} \frac{dx_i^\nu}{dt}, \qquad (i = a, b). \tag{2.3}$$

Здесь точка обозначает дифференцирование по t. Далее мы вместо параметра τ (собственное время) на соответствующей кривой выбираем координатное время t. Подставив (2.3) в (2.1) и проинтегрировав по пространственным координатам, имеем:

$$S = -m_a \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 - \dot{\vec{\zeta}}_a^2}\, dt_a - m_b \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 - \dot{\vec{\zeta}}_b^2}\, dt_b +$$
$$+ \varkappa m_a m_b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_a dt_b \delta[(t_a - t_b)^2 - (\vec{\zeta}_a - \vec{\zeta}_b)^2] \frac{2(1 - \dot{\vec{\zeta}}_a \dot{\vec{\zeta}}_b)^2 - (1 - \dot{\vec{\zeta}}_a^2)(1 - \dot{\vec{\zeta}}_b^2)}{\sqrt{1 - \dot{\vec{\zeta}}_a^2}\sqrt{1 - \dot{\vec{\zeta}}_b^2}} \tag{2.4}$$

$$\vec{\zeta}_a = \vec{\zeta}_a(t_a), \qquad \vec{\zeta}_b = \vec{\zeta}_b(t_b).$$

Отметим, что в математическом отношении действие Фоккера (2.1) имеет ряд недостатков [19], в частности, как отмечено в работе [20], выражение (2.1), вообще говоря, не существует в силу наличия бесконечных пределов интегрирования. Причем, если эти пределы заменить конечными, то условие $\delta S = 0$ приводит к уравнениям движения не совпадающими, вообще говоря, с уравнениями движения, когда эти пределы бесконечны. В работе [19] предлагалось для устранения указанной трудности к действию с бесконечными пределами прибавить постоянную добавку S_0, чтобы величина $S + S_0$, рассматриваемая как целое, имела смысл.

Можно указать другой способ преодоления указанной трудности. Нетрудно убедиться, что может быть построен функционал из сходящихся интегралов, причем вводимое действие является функцией пределов интегрирования. Этот способ позволяет несколько сблизить подход Фоккера с методами классической динамики.

Рассмотрим величины:

$$h^{\mu\nu}_{a\leftrightarrow b}(x) = \varkappa \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta[(x-x')]\tau^{\mu\nu}_{a\leftrightarrow b}(x')d^4x'$$

$$\underset{a\leftrightarrow b}{\tilde{h}_{\alpha\beta}}(x) = (\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}+\eta_{\mu\beta}\eta_{\nu\alpha}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta})h^{\mu\nu}_{a\leftrightarrow b}(x). \tag{2.5}$$

Отметим, что уравнения движения, совпадающие с уравнениями движения Фоккера, можно получить из двух независимых вариационных принципов $\delta \underset{a\leftrightarrow b}{S(t)}=0$, где

$$\underset{a\leftrightarrow b}{S(t)} = -m_{a\leftrightarrow b}\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{1-\dot{\vec{\zeta}}^2_{a\leftrightarrow b}}\,dt_{a\leftrightarrow b}+\int\limits_{t_0}^{t}dt\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^3x\tau^{\mu\nu}_{a\leftrightarrow b}(x)\underset{b\leftrightarrow a}{\tilde{h}_{\mu\nu}}(x). \tag{2.6}$$

Используя явный вид $\tau^{\mu\nu}(x)$ (2.3) убеждаемся, что все интегралы в (2.6) существуют.

Из определения величин $h^{\mu\nu}(x)$, согласно (2.5) и поскольку $\delta[(x-x')^2]$ является фундаментальным решением оператора Даламбера, а выражение для $h^{\mu\nu}(x)$ представляет свертку обобщенных функций, которая определена в случае непрерывных траекторий, входящих в $\tau^{\mu\nu}(x)$, и, в силу теоремы о свертке, имеем:

$$\Box h^{\mu\nu}(x) = 4\pi\varkappa\tau^{\mu\nu}(x) \tag{2.7}$$

где $\Box$ — оператор Даламбера.

Отметим также, что если рассматривать вариацию $\delta h^{\mu\nu}_{a\leftrightarrow b}(x)$ при вариации траектории $\delta\vec{\zeta}_{a\leftrightarrow b}(t)$, то если выбрать вариации $\delta\vec{\zeta}_{a\leftrightarrow b}(t)$, так что $\delta\vec{\zeta}_{a\leftrightarrow b}(t)=0$ вне некоторого отрезка, то $\delta h^{\mu\nu}_{a\leftrightarrow b}(x)=0$ при достаточно больших значениях пространственной части x. Действительно, используя (2.3) и (2.5), имеем

$$\delta h^{\mu\nu}(x) = \int \delta[(t-t')^2-(\vec{x}-\vec{x}')^2]f(t',x')dt'd\vec{x}'$$

где sup $f(t'x')$ находится в ограниченной области переменных $(t',\vec{x}')$, в которой содержатся траектории $\vec{\zeta}(t)$ и $\vec{\zeta}(t)+\delta\vec{\zeta}(t)$ при $\delta\vec{\zeta}(t)\neq 0$. Отсюда замечаем, для фиксированного t (любого на некотором интервале) при достаточно больших $|\vec{x}|$, что $\delta h^{\mu\nu}=0$.

Используя (2.6) и (2.7) и равенство нулю $\delta h^{\mu\nu}$ на бесконечности, нетрудно показать, что выражение

$$S = S_0(t)+\int\limits_{t_0}^{t}dt\int d\vec{x}\tau^{\mu\nu}_a(x)\tilde{h}_{b\mu\nu}(x)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}dt\int d\vec{x}\tau^{\mu\nu}_b(x)\tilde{h}_{a\mu\nu}(x)+\frac{1}{4\pi\varkappa}\int\limits_{t_0}^{t}dt\int d\vec{x}\,\frac{\partial h^{\alpha\beta}_a}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial h_{b\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\,\eta^{\mu\nu} \tag{2.8}$$

при условии $\delta S = 0$ приводит к уравнениям движения получаемым из вариационного принципа Фоккера. Здесь $S_0(t)$ — действие для свободных частиц[1].

Проведя длинные, но не сложные вычисления из условия для действия (2.4) (или (2.8)), приходим к следующим уравнениям движения:

$$\frac{d}{dt_a}\left[\frac{\vec{\dot{\zeta}}_a}{\sqrt{1-\vec{\dot{\zeta}}_a}}\right] = \varkappa m_a \int dt_b \delta[(t_a-t_b)^2-(\vec{\zeta}_a-\vec{\zeta}_b)^2]\times$$

$$\times\left\{-\left[\frac{\vec{\dot{\zeta}}_b}{t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\vec{\dot{\zeta}}_b} = \frac{(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\,[(1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2)-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\vec{\ddot{\zeta}}_b]}{[t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\vec{\dot{\zeta}}_b]}\right]\times\right.$$

$$\times\frac{2(1-\vec{\dot{\zeta}}_a\vec{\dot{\zeta}}_b)^2-(1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2)\,(1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2)}{\sqrt{1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2}\sqrt{1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2}}+\left[\frac{1-\vec{\dot{\zeta}}_a\vec{\dot{\zeta}}_b}{t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\vec{\dot{\zeta}}_b}-\right.$$

$$\left.-\frac{[t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\vec{\dot{\zeta}}_a]\,[1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\vec{\ddot{\zeta}}_b]}{[t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\vec{\dot{\zeta}}_b]^2}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{4\vec{\dot{\zeta}}_b(1-\vec{\dot{\zeta}}_a\vec{\dot{\zeta}}_b)}{\sqrt{1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2}\sqrt{1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2}}-\frac{2(1-\vec{\dot{\zeta}}_a\vec{\dot{\zeta}}_b)^2+(1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2)\,(1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2)}{(1-\vec{\dot{\zeta}}_2)^{\frac{3}{2}}(1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2)^{\frac{1}{2}}}\,\dot{\zeta}_a\right]+$$

$$+(\vec{\dot{\zeta}}_b\vec{\ddot{\zeta}}_b)\left[-\frac{\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a}{t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\vec{\dot{\zeta}}_b}\cdot\frac{2(1-\vec{\dot{\zeta}}_a\vec{\dot{\zeta}}_b)^2+(1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2)\,(1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2)}{(1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2)^{\frac{1}{2}}(1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2)^{\frac{3}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\vec{\dot{\zeta}}_a}{t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\vec{\dot{\zeta}}_b}\left(\frac{4\vec{\dot{\zeta}}_b(1-\vec{\dot{\zeta}}_a\vec{\dot{\zeta}}_b)}{(1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2)^{\frac{1}{2}}(1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{2(1-\vec{\dot{\zeta}}_a\vec{\dot{\zeta}}_b)^2-(1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2)\,(1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2)}{(1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2)^{\frac{3}{2}}(1-\vec{\dot{\zeta}}_b)^{\frac{3}{2}}}\right)\right]+$$

$$+\frac{(\vec{\dot{\zeta}}_a\vec{\ddot{\zeta}}_a)}{(1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2)^{\frac{1}{2}}(1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2)^{\frac{3}{2}}}\left[4\vec{\dot{\zeta}}_b(1-\vec{\dot{\zeta}}_a\vec{\dot{\zeta}}_b)-\frac{6(1-\vec{\dot{\zeta}}_a\vec{\dot{\zeta}}_b)+(1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2)\,(1-\vec{\dot{\zeta}}_b^2)}{(1-\vec{\dot{\zeta}}_a^2)}\,\vec{\dot{\zeta}}_a\right]+$$

---

[1] Мы благодарны др-у А. Старушкевичу, указавшему нам, что действие (2.8) не вполне эквивалентно формулировке, рассмотренной им в [19] в связи с тем, что (2.8) приводить к уравнениям движения на конечном отрезке $[t_0, t]$, движение же вне этого отрезка, которое позволяет вычислить вклад, вносимый опережающими и запаздывающими потенциалами, предполагается заданным. Чтобы непосредственно вычислить действие на $[t_0, t]$, надо, очевидно, знать движение на некотором большем отрезке $[t_0', t']$, содержащем $[t_0, t]$.

Нетрудно видеть, что оставляя у $h^{\mu\nu}(x)$ лишь запаздывающие части, можно получить функционал $S(t)$, приводящий только к запаздывающим взаимодействиям.

$$
+\frac{4(\dot{\vec{\zeta}}_b\ddot{\vec{\zeta}}_a)}{(1-\dot{\vec{\zeta}}_a)^{\frac{3}{2}}(1-\dot{\vec{\zeta}}_b^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1-\dot{\vec{\zeta}}_a\dot{\vec{\zeta}}_b}{1-\dot{\vec{\zeta}}_a^2}\dot{\vec{\zeta}}_a-\dot{\vec{\zeta}}_b\right]+\frac{4(\ddot{\vec{\zeta}}_b\dot{\vec{\zeta}}_a)}{(1-\dot{\vec{\zeta}}_a^2)^{\frac{1}{2}}(1-\dot{\vec{\zeta}}_b^2)^{\frac{1}{2}}}\times
$$

$$
\times\left[\frac{(1-\dot{\vec{\zeta}}_a\dot{\vec{\zeta}}_b)(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)}{t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\dot{\vec{\zeta}}_b}+\frac{t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\dot{\vec{\zeta}}_a}{t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\dot{\vec{\zeta}}_b}\left(\frac{1-\dot{\vec{\zeta}}_a\dot{\vec{\zeta}}_b}{1-\dot{\vec{\zeta}}_a}\dot{\vec{\zeta}}_a-\dot{\vec{\zeta}}_b\right)\right]+
$$

$$
\left.+\ddot{\vec{\zeta}}_b\frac{4(1-\dot{\vec{\zeta}}_a\dot{\vec{\zeta}}_b)\left[t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\dot{\vec{\zeta}}_a\right]}{(1-\dot{\vec{\zeta}}_a^2)^{\frac{1}{2}}(1-\dot{\vec{\zeta}}_b^2)^{\frac{1}{2}}\left[t_b-t_a-(\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a)\dot{\vec{\zeta}}_b\right]}-\ddot{\vec{\zeta}}_a\frac{2(1-\dot{\vec{\zeta}}_a\dot{\vec{\zeta}}_b)^2+(1-\dot{\vec{\zeta}}_a^2)(1-\dot{\vec{\zeta}}_b^2)}{(1-\dot{\vec{\zeta}}_a)^{\frac{3}{2}}(1-\dot{\vec{\zeta}}_b^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}. \tag{2.9}
$$

Вторая система уравнений получается простой заменой индекса a на b в этом выражении.

Если выполнить интегрирование по t_b в смысле определения функционала, определяемого обобщенной функцией:

$$
\delta[(t_a-t_b)^2-(\vec{\zeta}_a-\vec{\zeta}_b)^2]=\frac{\delta[t_b-\alpha_1^b\ t_a)]}{2[|\vec{\zeta}_b(\alpha_1^b(t_a\ )-\vec{\zeta}_a(t_a)|+(\vec{\zeta}_b(\alpha_1^b(t_a))-\vec{\zeta}_a(t_a))\dot{\vec{\zeta}}_b(\alpha_1^b(t_a))]}+
$$

$$
+\frac{\delta[t_b-\alpha_2^b(t_a)]}{2[|\vec{\zeta}_b(\alpha_2^b(t_a))-\vec{\zeta}_a(t_a)|-(\vec{\zeta}_b(\alpha_2^b(t_a))-\vec{\zeta}_a(t_a))\dot{\vec{\zeta}}_b(\alpha_2^b(t_a))]} \tag{2 10}
$$

где $\alpha_1^b(t_a)$ и $\alpha_2^b(t_a)$ корни уравнений:

$$
\alpha_1^b(t_a)-t_a=-|\vec{\zeta}_b(\alpha_1^b(t_a))-\vec{\zeta}_a(t_a)| \tag{2.11a}
$$

$$
\alpha_2^b(t_a)-t_a=|\vec{\zeta}_b(\alpha_2^b(t_a))-\vec{\zeta}_a(t_a)| \tag{2.11b}
$$

то мы приходим к дифференциально-разностным уравнениям, в которых будут члены как с запаздывающими, так и с опережающими аргументами. Аналогично пишутся уравнения для функций запаздывания и опережения $\alpha_1^a(t_b)$, $\alpha_2^a(t_b)$.

Рассмотрим некоторые свойства функций запаздывания-опережения. Для определенности выберем одно уравнение определящее функцию опережения, опустив несущественные для данного случая индексы; оно будет иметь вид:

$$
\alpha(t)-t=|\vec{\zeta}_a(\alpha(t))-\vec{\zeta}_b(t)|. \tag{2.12}
$$

Исследования всех остальных случаев аналогично.

Теорема 2.1. Пусть в (2.10) функции $\vec{\zeta}_a(t)$, $\vec{\zeta}_b(t)$ заданные и дифференцируемы на $[t_0, t_1]$ и существует $\alpha_0<1$ такое, что $\underset{a\leftarrow\rightarrow b}{|\dot{\vec{\zeta}}(t)|}\leqslant\alpha_0$ и $t_0<t_2$, где $t_2=t_1-\dfrac{\gamma}{1-\alpha_0}$, $\gamma=\sup\limits_{t\in[t_0,\,t_1]}|\vec{\zeta}_a(t)-\vec{\zeta}_b(t)|$. Тогда (2.10) имеет единственное решение $\alpha(t)$ $\forall\ t\in[t_0, t_2]$ при-

чем функция $\alpha(t)$ непрерывна, монотонно возрастает и производная $\alpha'(t)$ существует везде, кроме, может быть, точек, где $\vec{\zeta}_a(t) = \vec{\zeta}_b(t)$. Для функции $\alpha(t)$ справедлива оценка

$$\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}(t'-t'') \leqslant \alpha(t')-\alpha(t'') \leqslant \frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}(t'-t'')$$

где $t', t'' \in [t_0, t_2]$, $t' > t''$.

Отметим, что в [21] рассматривалась аналогичная теорема, но при несколько других условиях.

Доказательство. Аналогично [21] рассматриваем функцию $f(\alpha) = \alpha - t - |\vec{\zeta}_a(\alpha)-\vec{\zeta}_d(t)|$ для фиксированного $t \in [t_0, t_2]$.

Рассмотрим $f(\alpha_2)-f(\alpha_1) = \alpha_2-\alpha_1-|\vec{\zeta}_a(\alpha_2)-\vec{\zeta}_b(t)|+|\vec{\zeta}_a(\alpha_1)-\vec{\zeta}_b(t)| \geqslant \alpha_2-\alpha_1-|\vec{\zeta}_a(\alpha_2)-$ $-\vec{\zeta}_b(t)-\vec{\zeta}_a(\alpha_1)+\vec{\zeta}_b(t)| \geqslant (1-\alpha_0)(\alpha_2-\alpha_1)$ $\alpha_2 > \alpha_1$ т.к. $|\vec{\zeta}_a(\alpha_2)-\vec{\zeta}_a(\alpha_1)| \leqslant \alpha_0(\alpha_2-\alpha_1)$. Таким образом,

$$f(\alpha_2)-f(\alpha_1) \geqslant (1-\alpha_0)(\alpha_2-\alpha_1) \tag{2.13}$$

и, следовательно, $f(\alpha)$ монотонна и растет быстрее, чем $(1-\alpha_0)\alpha$.

Очевидно $f(\alpha)|_{\alpha=t_1} \geqslant f(\alpha)+(t_1-t)(1-\alpha_0) \geqslant -\gamma+(t_1-t_2)(1-\alpha_0) \geqslant 0$; $f(\alpha)|_{\alpha=t_0} \leqslant 0$ (t — фиксировано, $t \in [t_0, t_2]$).

Поскольку $f(\alpha)$ — непрерывна и монотонна, существует единственный корень $f(\alpha) = 0$.

Рассмотрим свойства $\alpha(t)$ на $[t_0, t_2]$.

Пусть $\alpha' = \alpha(t')$, $\alpha'' = \alpha(t'')$.

Обозначим $I(\alpha, t) = \alpha - t - |\vec{\zeta}_a(\alpha)-\vec{\zeta}_b(t)|$.

Очевидно $I(\alpha', t') = I(\alpha'', t') = 0$.

Рассмотрим $I(\alpha', t')-I(\alpha'', t'') = \alpha'-\alpha''-(t'-t'')-|\vec{\zeta}_a(\alpha')-\vec{\zeta}_b(t')|+|\vec{\zeta}_a(\alpha'')-\vec{\zeta}_b(t'')|$. Поскольку

$$||\vec{\zeta}_a(\alpha')-\vec{\zeta}_b(t')|-|\vec{\zeta}_a(\alpha'')-\vec{\zeta}_b(t'')|| \leqslant |\vec{\zeta}_a(\alpha')-\vec{\zeta}_a(\alpha'')|+$$
$$+|\vec{\zeta}_b(t')-\vec{\zeta}_b(t'')| \leqslant \alpha_0\{|\alpha'-\alpha''|+|t'-t''|\}$$

и

$$I(\alpha', t') = I(\alpha'', t'') = 0$$

нетрудно видеть, что при $t'-t'' > 0$ будет и $\alpha'-\alpha'' > 0$, кроме того,

$$0 = I(\alpha', t')-I(\alpha'', t'') \begin{cases} \leqslant (1+\alpha_0)(\alpha'-\alpha'')-(1-\alpha_0)(t'-t'') \\ \geqslant (1-\alpha_0)(\alpha'-\alpha'')-(1+\alpha_0)(t'-t''). \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}(t'-t'') \leqslant \alpha'-\alpha'' \leqslant \frac{1+\alpha_0}{1-\alpha_0}(t'-t''), \qquad t'-t'' > 0.$$

Таким образом, $\alpha(t)$ непрерывна, монотонно возрастает на $[t_0, t_2]$ и выполняется неравенство, указанное в условии. Из теоремы о неявных функциях следует, что если в окрестности точки $(t, \alpha(t))$ функция $|\vec{\zeta}_a(\alpha)-\vec{\zeta}_b(t)|$ является дифференцируемой, то $\exists\, \alpha'(t)$.

Указанная функция (при дифференцируемости $\vec{\zeta}_a(t)$ и $\vec{\zeta}_b(t)$) не дифференцируема лишь там, где она обращается в нуль. Нетрудно видеть, что для функции $|\vec{\zeta}_a(\alpha(t))-\vec{\zeta}_b(t)|$ это возможно тогда и только тогда, когда $\alpha(t) = t$. Таким образом, $\alpha(t)$ дифференцируема везде, кроме, быть может, окрестности точек столкновений $\vec{\zeta}_a(t) = \vec{\zeta}_b(t)$.

Теорема доказана полностью.

Заметим, что при отсутствии столкновений порядок дифференцируемости $\alpha(t)$ равен порядку дифференцируемости функций $\vec{\zeta}_a(t), \vec{\zeta}_b(t)$.

Рассмотрим изменение $\alpha(t)$ при варьировании функций $\vec{\zeta}_a(t), \vec{\zeta}_b(t)$. Пусть измененное значение этих функций будет $\vec{\zeta}'_a(t), \vec{\zeta}'_b(t)$ и соответственно этому $\alpha'(t)$, т.е.

$$\alpha'(t)-t = |\vec{\zeta}'_a(\alpha'(t))-\vec{\zeta}_b(t)|.$$

Рассмотрим разность в некоторой точке t

$$I'(\alpha', t)-I(\alpha, t) = 0$$

($I(\alpha, t)$ была введена в предыдущем доказательстве).

Нетрудно оценить $||\vec{\zeta}'_a(\alpha')-\vec{\zeta}'_b(t)|-|\vec{\zeta}_a(\alpha)-\vec{\zeta}_b(t)|| \leqslant |\vec{\zeta}'_a(\alpha')-\vec{\zeta}_a(\alpha')-\vec{\zeta}'_b(t)+\vec{\zeta}_b(t)|+$ $+\alpha_0|\alpha'-\alpha|$.

Отсюда

$$|\alpha'-\alpha|(1-\alpha_0) - |\delta\vec{\zeta}_a(\alpha')-\delta\vec{\zeta}_b(t)| \leqslant 0$$

и, наконец,

$$|\alpha'(t)-\alpha(t)| \leqslant \frac{|\delta\vec{\zeta}_a(\alpha')-\delta\vec{\zeta}_b(t)|}{1-\alpha_0}$$

где $\delta\vec{\zeta} = \vec{\zeta}'-\vec{\zeta}$.

Отметим, что если в дифференциалных уравнениях имеются как запаздывающие, так и опережающие аргументы, то мы, вообще говоря, не сможем сделать оценку типа (2.13) на конечном отрезке оси t, когда вариации $\delta\vec{\zeta}$ заданы на этом же отрезке. Это затрудняет применение метода последовательных приближений.

Из уравнений (2.11a) и (2.11b), с учетом единственности и существования корней, следует

$$\alpha_1^{a\leftrightarrow b}[\alpha_2^{b\leftrightarrow a}(t)] \equiv t$$
$$\alpha_2^{a\leftrightarrow b}[\alpha_1^{b\leftrightarrow a}(t)] \equiv t. \tag{2.14}$$

При доказательстве теоремы существования нам потребуется оценка функции $\alpha_1(t)-t$.

Пусть $\vec{\zeta}_a(t) \neq \vec{\zeta}_b(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$|\alpha_1(t)-t| \geqslant -\alpha_0|\alpha_1(t)-t|+|\vec{\zeta}_a(t)-\vec{\zeta}_b(t)|.$$

Отсюда делаем оценку

$$|\alpha_1(t)-t| \geqslant \frac{|\vec{\zeta}_a(t)-\vec{\zeta}_b(t)}{1+\alpha_0}.$$

При $|\vec{\zeta}_a(t)-\vec{\zeta}(t)| \geqslant C$ имеем

$$|\alpha_1(t)-t| \geqslant \frac{C}{1+\alpha_0}. \tag{2.15}$$

Перейдём к вопросу о существовании и единственности решения системы (2.9). Аналогичная задача рассматривалась для запаздывающих потенциалов без вторых производных Драйвером [21].

В силу отмеченных затруднений, вносимых опережающими аргументами в (2.9), приходится рассматривать разрешимость этих уравнений относительно наивысших производных с опережающими аргументами.

Дело несколько облегчается тем, что указанные производные входят в уравнение линейно. Систему (2.9) можно представить в виде

$$A\vec{x}+(\vec{B}_1\vec{x})\,\vec{C}_1+(\vec{B}_2\vec{x})\,\vec{C}_2+(\vec{B}_3\vec{x})\,\vec{C}_3 = \vec{D}$$

где через $\vec{x}$ обозначены вторые производные $\vec{\zeta}_b$ с опережающими аргументами, а величины A, $\vec{B}_i$, $\vec{C}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ не зависят от $\vec{x}$; $A \neq 0$ при $|\dot{\vec{\zeta}}_{a\leftrightarrow b}| \leqslant \alpha_0 < 1$.

Домножая последнее уравнение поочередно на $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$, получим систему трех уравнений относительно $(\vec{B}_i\vec{x})$, $(i = 1, 2, 3)$, детерминант которой будет:

$$\begin{vmatrix} A+(\vec{C}_1\vec{B}_1) & (\vec{C}_2\vec{B}_2) & (\vec{C}_3\vec{B}_1) \\ \vec{C}_1\vec{B}_2 & A+(\vec{C}_2\vec{B}_2) & (\vec{C}_3\vec{B}_2) \\ \vec{C}_1\vec{B}_3 & (\vec{C}_2\vec{B}_3) & A+(\vec{C}_3\vec{B}_3) \end{vmatrix} = \begin{cases} A^3+A^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{3}(\vec{C}_i\vec{B}_i)+ \\ +A\sum\limits_{i<j}^{3}[(\vec{C}_i\vec{B}_i)(\vec{C}_j\vec{B}_j)-(\vec{C}_i\vec{B}_j)(\vec{C}_j\vec{B}_i)]+ \\ +(\vec{C}_1[C_2\times C_3])(\vec{B}_1[B_2\times B_3]) \end{cases}$$

Определив величины $(\vec{B}_i\vec{x})$,, нетрудно определить $\vec{x}$, т.к. $A \neq 0$. Таким образом, вопрос о разрешимости однозначно определяется величиной выписанного детерминанта. Оценим этот детерминант в приближении малых скоростей. В дальнейшем при всех конкретных вычислениях будем пользоваться этим приближением, поскольку в общем случае вычисления приводят к весьма громоздким выкладкам. С другой стороны, именно это приближение является практически интересным. Кроме того, имеются основания полагать, что принцип Фоккера неприменим с достаточной точностью для быстроосциллирующих движений[2] [15]. При $|\dot{\vec{\zeta}}| \ll 1$ приближенно имеем:

$$A = 4, \quad \vec{B}_1 = -\frac{\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a}{|\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a|^2}, \quad \vec{B}_2 = 4\,\frac{\dot{\vec{\zeta}}_b-\dot{\vec{\zeta}}_a}{|\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a|}, \quad B_3 = -3\,\frac{\dot{\vec{\zeta}}_b-\dot{\vec{\zeta}}_a}{|\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a|},$$

$$\vec{C}_1 = \vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a, \quad \vec{C}_2 = \dot{\vec{\zeta}}_b, \quad \vec{C}_3 = \dot{\vec{\zeta}}_a.$$

(Здесь $\vec{\zeta}_a = \vec{\zeta}_a(t_a)$, $\vec{\zeta}_b = \vec{\zeta}_b(\alpha_2^b(t_a))$ для системы (2.9).)

---

[2] В связи с возможностью излучения.

Аналогичные выражения записываются при замене индекса (*a*) на (*b*). Учитывая порядок величин $|\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a|\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3, \dfrac{\vec{C}_1}{|\vec{\zeta}_b-\vec{\zeta}_a|}$, получаем, что детерминант приближенно равен

$$A^3+A^2(\vec{C}_1\vec{B}_1) = 48 \neq 0.$$

Таким образом, разрешимость относительно $\vec{x}$ доказана. Кроме того, из вида (2.9) следует, что правые части получаемых уравнений обладают достаточно „хорошими" свойствами, указанными подробно ниже.

Делая замену в уравнениях (*a*) $t \to \alpha_1^a(t)$ и, соответственно, для (*b*): $t \to \alpha_1^b(t)$, используя (2.14) и обычным методом понижая порядок производных системы (2.9), приходим к новой системе вида

$$\dot{\vec{\zeta}}_a(t) = \vec{\mathscr{F}}[\vec{\zeta}_a(t), \dot{\vec{\zeta}}_a(A_1^a(t)), \vec{\zeta}_a(A_1^a(t)), \dot{\vec{\zeta}}_b(A_2^a(t)), \vec{\zeta}_b(A_2^a(t))]. \tag{2.16}$$

Здесь $\vec{\zeta}_a$ — уже другие векторы-функции: $\vec{\zeta} = (\vec{x}, \vec{y})$;

$$A_1^a(t) = \alpha_1^a[\alpha_1^b(t)], \quad A_2^a(t) = \alpha_1^b(t).$$

Используя соотношения, полученные для $\alpha(t)$, нетрудно убедиться, что для $A_1(t)$ справедливы оценки типа (2.13)—(2.15). Отметим, что в правой части оценок для $A_1(t)$ и $A_2(t)$ аналогичных (2.13) будут стоять вариации $\delta\vec{\zeta}_a(t')$ с аргументами $t' \leqslant t$, т.е. в предположении, что $\delta\vec{\zeta}_a(t)$ и $\delta\vec{\zeta}_b(t)$ равны нулю при t меньшем некоторого t_0, можно сделать оценку вида

$$|\delta A(t)| \leqslant C \sup_{t' \in [t_0,t]} \{|\delta\vec{\zeta}_a(t')| + |\delta\vec{\zeta}(t')|\}.$$

Сделанные оценки позволяют решить вопрос о существовании и единственности решения системы (2.16).

Рассмотрим на $[t_0, t_2]$ систему (2.16) с начальными условиями, заданными на $[t_1, t_0]$. Величина отрезка $[t_0, t_2]$ выбирается в ходе доказательства. Пусть $\vec{\mathscr{F}} = \vec{\mathscr{F}}[\vec{\zeta}_1, \vec{\zeta}_2, \ldots, \vec{\zeta}_5]$ функция класса C^1 в замкнутой ограниченной области $\mathscr{I}$, где $\vec{\zeta}_i = (\vec{x}_i, \vec{y}_i)$ причем $\forall\, \vec{\zeta} \in \mathscr{I}\, |\vec{y}_i| \leqslant \alpha_0$ (2.17a) и равенство (2.17a) может достигаться только на границе $\mathscr{I}$.

Пусть, кроме того, из $\vec{\zeta}_1 = \vec{\mathscr{F}}[\vec{\zeta}_2, \vec{\zeta}_3, \ldots \vec{\zeta}_6]$ где $\vec{\zeta}_i = (\vec{x}_i, y_i)$ следует

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2. \tag{2.17a}$$

(Это условие вполне естественно поскольку получаемая из (2.9) система приводится к (2.16) заменой производных на новые неизвестные функции $\vec{y}_i$ при понижении порядка системы).

$$A(t) = A[(\vec{x}_1, \vec{x}_2)(t)], \quad D(A) \xrightarrow{A} C^1_{[t_1,t'_0]}(t'_0 \geqslant t_0) \tag{2.17b}$$

где область определения $AD(A) \subset K_{\alpha_0} \times K_{\alpha_0}$,
K_{α_0} — множество функций $\vec{x}(t)$, $K_{\alpha_0} \subset C^1_{[t_1,t''_0]}(\forall t''_0 > t_0)$

$$\forall \vec{x} \subset K_{\alpha_0}\colon |\vec{x}(t)| \leqslant \alpha_0 < 1. \tag{2.17c}$$

Кроме того, в $D(A)$ включаются только те пары x', x'' для которых функции $\vec{\zeta}'$, $\vec{\zeta}''$ могут быть подставлены в $\mathscr{F}[\vec{\zeta}_1, \ldots, \zeta_5]$ вместо $\vec{\zeta}_1 \vec{\zeta}_4$ и $\vec{\zeta}_3, \vec{\zeta}_4$ так, чтобы величины $\vec{\zeta}_i$ оставались в области $\mathscr{I}$. (2.17d)

$A(t)$ обладает свойствами:

$$||A[(\vec{x}_1', \vec{x}_2')(t)] - A[(\vec{x}_1, \vec{x}_2)(t)]||_T \leqslant C_1\{||\vec{x}_1 - \vec{x}_1'||_T + ||\vec{x}_2 - \vec{x}_2'||_T\}$$
$$\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_1', \vec{x}_2 \in D(A), C_1 > 0 \tag{2.17e}$$

здесь $||\vec{x}||_T = \sup|\vec{x}(t)|$

$$t \in [t_1, T],\ T \leqslant t_0''.$$

Для фиксированных $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D(A)$

$$\left|\frac{d}{dt} A[(x_1, x_2)(t)]\right| < C_2, \quad C_2 > 0 \tag{2.17f}$$

$$t - C_4 \leqslant A[(\vec{x}_1, \vec{x}_2)(t)] \leqslant t - C_3,\ C_3 > 0 \tag{2.17g}$$

$A(t)$ — монотонна.

Здесь предполагается, что отрезок $[t_1, t_0]$ достаточно велик, чтобы по $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ можно было определить $\vec{x}(A(t))$ при $t \geqslant t_0$. В нашем случае, в силу (2.17g) достаточно выбрать $t_1 \leqslant t_0 - C_4$.

Пусть начальные данные $\vec{\varphi}_{a\leftrightarrow b}$ удовлетворяют следующим условиям на $[t_1, t_0]$: $\varphi_{a\leftrightarrow b} \in C^2_{[t_1, t_0]}$ причем значения $\varphi_{a\leftrightarrow b}(t)$ являются внутренними в области $\mathscr{I}$:

$$\vec{\varphi}_{a\leftrightarrow b} = (\vec{\varphi}_{\underset{a\leftrightarrow b}{x}}, \vec{\varphi}_{\underset{a\leftrightarrow b}{y}}), \qquad \dot{\vec{\varphi}}_y = \vec{\varphi}_x;$$

$$\dot{\vec{\varphi}}_{\underset{a\leftrightarrow b}{a}}(t_0) = \mathscr{F}[\vec{\zeta}_a(t), \ldots]|_{\vec{\zeta}_{a\leftrightarrow b} = \vec{\varphi}_{a\leftrightarrow b},\ t = t_0}$$

$$\ddot{\vec{\varphi}}_{\underset{a\leftrightarrow b}{a}}(t_0) = \frac{d}{dt}\mathscr{F}[\vec{\zeta}_a(t), \ldots]|_{\vec{\zeta}_{a\leftrightarrow b} = \vec{\varphi}_{a\leftrightarrow b},\ t = t_0}. \tag{2.17h}$$

В соответствующих местах в последних равенствах подразумеваются односторонние производные.

Ставится задача: найти в $C^2_{[t_1, t_0]}(t_2 > t_0)$ функции $\vec{\zeta}(t)$, принадлежащие области пределения (2.16) и превращающие эту систему в тождества на $[t_1, t_2]$, причем

$$\vec{\zeta}_{a\leftrightarrow b}(t) \equiv \vec{\varphi}_{a\leftrightarrow b}(t), \qquad t \in [t_1, t_0].$$

Эта задача имеет единственное решение, причем минимальные размеры отрезка существования $[t_0, t_2]$ определяются величиной C_3/C_2 и расстоянием от $(\vec{\varphi}_a(t_0), \vec{\varphi}_b(t_0))$ до границ области $\mathscr{I}$ и, таким образом, не зависит от вторых производных начальных функций. Последнее имеет значение при исследовании устойчивости.

Заметим, что утверждение можно сформулировать в несколько более общем виде и при более широких условиях. Мы приводим формулировку, которая пригодна для нашего случая, например, условия, наложенные на $A(t)$ есть не что иное, как сводка проделанных ранее оценок. При указанном обобщении теоремы доказательство, однако, несколько усложняется, а для системы типа (2.9) приведенного рассмотрения вполне достаточно.

Докажем наше утверждение. Методом шагов сведем доказательство к использованию принципа сжатых отображений.

Рассмотрим вместо (2.16) систему

$$\underset{a\leftrightarrow b}{\dot{\vec{\zeta}}_a(t)} = \vec{\mathscr{F}}[\vec{\zeta}_a(t), \dot{\vec{\varphi}}(A_1^a(t)), \vec{\varphi}_a(A_1^a(t)), \dot{\vec{\varphi}}_b(A_2^a(t)), \vec{\varphi}_b(A_2^a(t))] \tag{2.18}$$

где A_1, A_2 заданы на $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D(A)$, совпадающих с начальными условиями. При необходимости $\varphi_{a\leftrightarrow b}$ можно C^2 — непрерывно продолжить на значения $t > t_0$, это несущественно. Сделаем оценки, позволяющие применить теорему Банаха о сжатых отображениях к системе:

$$\underset{a\leftrightarrow b}{\vec{\zeta}_a(t)} = \vec{\varphi}_a(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{\mathscr{F}}[\vec{\zeta}_a(t), \dot{\vec{\varphi}}(A_1^a(t)), \vec{\varphi}_a(A_1^a(t)), \dot{\vec{\varphi}}_b(A_2^a(t)), \vec{\varphi}_b(A_2^a(t))]dt. \tag{2.19}$$

Здесь правая часть не содержит производных от неизвестных функций. Пусть $\mathscr{K}$ — множество функций из C^2 на некотором отрезке $[t_0\ t_2]$, принадлежащих области определения оператора правой части (2.19), который обозначим через R, т.е. удовлетворяющих условиям (2.17a, c, d). Покажем, что R не выводит из $\mathscr{K}$ при соответствующем выборе t_2. Пуст введено для краткости:

$$\vec{\zeta} = (\vec{\zeta}_a, \vec{\zeta}_b) = (\vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{x}_b, \vec{y}_b).$$

Пусть $\vec{\zeta}$ — любые функции из $\mathscr{K}$.
Рассмотрим $\vec{\zeta}' = R\vec{\zeta}$.

В замкнутой ограниченной области в силу непрерывности существует $\max|\vec{\mathscr{F}}| = M$. Пусть α — расстояние от $(\vec{\varphi}_a(t_0), \vec{\varphi}_b(t_0))$ до границы $\mathscr{I}$.

Из (2.19) нетрудно видеть, что при достаточно малом $t_2 - t_0$ величины $\vec{\zeta}'(t)$ будут мало отклоняться от $(\vec{\varphi}_a(t_0), \vec{\varphi}_b(t_0))$, а значит не будут выходить из $\mathscr{I}$. При этом величина $t_2 - t_0$ определяется соотношением

$$t_2 - t_0 < \frac{\alpha_0}{M}.$$

Учитывая это, а также учитывая (2.17b), получаем, что R не выводит из $\mathscr{K}$.
Произведем оценку величины:

$$\|\vec{\zeta}_1' - \vec{\zeta}_2'\| = \|R\vec{\zeta}_1 - R\vec{\zeta}_2\|.$$

В силу условий для $\vec{\varphi}_{a\leftrightarrow b}(t)\ \exists\ M_1 : \underset{t\in[t_1,\,t_0]}{\ddot{\vec{\varphi}}|(t)|} \leqslant M_1$ и $\exists\ M_2 : \underset{t\in[t_1,\,t_0]}{|\dot{\vec{\varphi}}(t)|} \leqslant M_2$.

Тогда, используя (2.17e), имеем:

$$\|\dot{\vec{\varphi}}(A(\zeta_1)) - \dot{\vec{\varphi}}(A(\vec{\zeta}_2))\| \leqslant C_1 M_1 \|\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2\|$$

$$\|\vec{\varphi}(A(\zeta_1)) - \vec{\varphi}(A(\vec{\zeta}_2))\| \leqslant C_1 M_2 \|\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2\|$$

(индексы везде опущены). Т.к. $\mathscr{F} \in C^1(\mathscr{I})$, $\exists\, M_3$ такая, что

$$|\vec{\mathscr{F}}(\ldots \vec{\zeta}_{i_1} \ldots) - \vec{\mathscr{F}}(\ldots \vec{\zeta}_{i_2} \ldots)| \leqslant M_3 \sum_{i=1}^{5} |\vec{\zeta}_{i_1} - \vec{\zeta}_{i_2}|.$$

Из этих соотношений следует, что при малом $t_2 - t_0$

$$||\vec{\zeta}'_1 - \vec{\zeta}'_2|| \leqslant N ||\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2||, N < 1$$

где $t_2 - t_1$ определяется константами M_1, M_2, M_3, C_1; таким образом, сходимость ряда последовательных приближений обеспечена. Нетрудно видеть, что предельные функции будут принадлежать области определения оператора R, а, кроме того, дважды непрерывно дифференцируемы.

Учитывая условия (2.17f, g), мы видим, что при $t - t_0 < C_3/C_2$ $t \in [t_0, t_2]$ выполняется $A(t) < t_0$ и видим, что при этом система (2.18) эквивалентна (2.16). Таким образом, существование и единственность доказаны. Причем полученные функции в силу (2.17h) C^2 — непрерывно сшиваются с начальными условиями. Однако размеры отрезка $[t_0, t_2]$ зависят от константы M_1, которая определяется второй производной. Поэтому рассматриваем ещё раз ту же задачу, но с начальными условиями уже на $[t_1, t_2]$, используя в качестве значений на $[t_0, t_2]$ полученные функции. Нетрудно видеть, что все константы те же, а поэтому оценки для отрезка $[t_2, t_{2_1}]$, на котором ищется решение новой задачи, тоже будут теми же. Если при этом мы не выйдем за границы области $\mathscr{I}$, мы повторим эту операцию достаточно большое количество раз, пока выполняется неравенство $A(t) \leqslant t_0$; за конечное число шагов, таким образом, построим решение на отрезке $[t_0, \tilde{t}_2]$, размеры которого определяются только условием $A(\tilde{t}_2) \leqslant t_0$, т.е. в силу (2.17f) (2.17g) $\tilde{t}_2 - t_0 \leqslant C_3/C_2$ а также тем, что решение не выходит из области $\mathscr{I}$. Все константы, зависящие от вторых производных, в оценки для $[t_0, \tilde{t}_2]$ теперь не входят. Наше утверждение доказано.

Из этого утверждения следует, что два решения с одинаковыми начальными условиями должны совпадать на всем интервале существования. Для доказательства достаточно рассмотреть окрестность точки, начиная с которой решения не совпадают.

В связи с проведенными рассуждениями, сделаем следующее замечание. Предположим, что нам надо исследовать устойчивость движения по некоторой траектории, которая удовлетворяет уравнениям (2.16). Будем рассматривать теорему существования и единственности совместно с теоремами об устойчивости, т.е. рассматривать альтернативу: 1) решение возмущенного движения существует, единственно и устойчиво при всех $t > t_0$. 2) решения для возмущенного движения существуют, единственны, но неустойчивы или не всегда существуют для $\forall t \geqslant t_0$. Тогда в случае 1) очевидно условие устойчивости гарантирует продолжаемость решения на любой отрезок $[t_0, T]$, $T > t_0$. Действительно, если у нас известно решение на $[t_0, t_i]$, мы можем продолжить его на $[t_i, t_{i+1}]$ по доказанной теореме. Если имеет место устойчивость, возмущенные траектории будут отклоняться достаточно мало поэтому условия, наложенные на $\vec{\varphi}_{a \leftrightarrow b}(t)$ в теореме будут выполняться и для решений на $[t_0, t_i]$. Условия сшивки будут выполняться автоматически. При этом надо иметь ввиду, что устойчивость для уравнений нейтрального типа рассматривается в метрике C^n, где n — порядок высших производных.

Отсюда ясно, что размеры отрезков $[t_k, t_{k+1}]$ можно выбрать одинаковыми и конечными и, строя последовательность $\{t_k\}$, прийти к любой точке $T > t_0$.

Приведенные рассуждения нетрудно выполнить с надлежащей строгостью

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffmann, *Ann. Math.*, **39**, 65 (1938).
[2] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Москва-Ленинград 1961.
[3] Л. Инфельд, Е. Плебанский, *Движение и релятивизм*, ИИЛ, Москва 1962.
[4] H. Tetrode, *Z. Phys.*, **10**, 317 (1922).
[5] A. D. Fokker, *Z. Phys.*, **58**, 386 (1929).
[6] J. Wheeler, R. Feynman, *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 157 (1945).
[7] J. Wheeler, R. Feynman, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 425 (1949).
[8] A. Staruszkiewicz *Acta Phys. Polon.*, **33**, 1007 (1968).
[9] A. Staruszkiewicz, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **14**, 69 (1971).
[10] Л. Грановский, А. Пантюшин, *Изв. АН Каз. ССР, сер. физ.-мат. наук*, **2**, 65 (1965).
[11] A. Volkov, *Canad. J. Phys.*, **49**, 201 (1971).
[12] A. Volkov, *Canad. J. Phys.*, **49**, 1697 (1971).
[13] А. Пантюшин, Сб. *Гравитация и теория относительности*, вып. 6, Казань 1969.
[14] А. Пантюшин, Ливенцов, Сб. *Гравитация и теория относительности*, вып. 7, Казань 1970.
[15] H. Fagundes, H. Ziemerman, *Nuovo Cimento*, **33**, 60 (1971).
[16] Дж. Синг, *Классическая динамика*, Физматгиз, Москва 1963.
[17] D. J. Currie, T. F. Jordan, E. C. Sudarshan, *Rev. Mod. Phys.*, **35**, 330 (1963).
[18] B. Barker, S. Gupta, R. Haracz, *Phys. Rev.*, **149**, 1027 (1966).
[19] A. Staruszkiewicz, *Ann. Phys.*, **25**, 362 (1970).
[20] P. Havas, *Statistical Mechanics of Equillibrium and Non Equillibrium*, ed. J. Meixner, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1965.
[21] R. D. Driver, *Ann. Phys.*, **21**, 122 (1963).