К ПРОБЛЕМЕ ДВУХ ТЕЛ В ТЕОРИИ ПРЯМОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ. II

On Two-Body Problem in the Theory of Direct Gravitational Interaction. II

В. И. Жданов, К. А. Пирагас

Институт теоретической физики АН УССР, Киев*

(*Поступила в редакцию 14 апреля 1972 г.*)

A circular motion of two gravitating bodies is considered. The interaction is described by means of the Fokker action. Particular attention is paid to the problem of stability. When speeds are sufficiently small the circular motion is found unstable. The system of the first approximation is considered for rather general form of the Fokker action. The theorem concerning stability of the system is proved for unperturbed retardations.

В данной работе, являющейся продолжением работы [1], мы рассмотрим задачу о движении двух гравитирующих тел равной массы движущихся по круговым орбитам, в частности, вопрос об устойчивости такого образования. Аналогичная задача в рамках электродинамики решалась Старушкевичем [2]. Решение этого вопроса имеет интерес с точки зрения проблемы устойчивости образований типа двойных звёзд. Кроме того, интерес к этим образованиям возрос в последние годы в связи с проблемой гравитационной радиации и возможностью использования этих объектов в качестве источников гравитационной радиации [3—4]. Принятые ниже предположения относительно равенства масс гравитирующих тел и движение по круговым орбитам дают некоторые математические облегчения и для большинства двойных звёзд, имеющих интерес с выше указанной точки зрения, эта абстракция вполне приемлема [3].

Нетрудно проверить, что система (I.2.9)[1] при условии $m_a = m_b = m$ допускает решение в виде:

$$\vec{\zeta}_a(t_a) = (r\cos\omega t_a, r\sin\omega t_a, 0)$$

$$\vec{\zeta}_b(t_b) = (-r\cos\omega t_b, -r\sin\omega t_b, 0) \tag{1}$$

* Address: Institute for Theoretical Physics, Academy of Sciences, Ukrainian SSR, Kiev 130, Metrologicheskaya St. 14-b, USSR.

[1] Ссылаясь на формулы работы [1], мы будем перед номером формулы ставить римскую цифру I.

при условии, что

$$\frac{1}{\varkappa m\omega} = f(v)$$

где $v = \omega r$

$$f(v) = \frac{1}{(\tau+v^2 \sin\tau)(1-v^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{(1+\cos\tau)(1+v^2\cos\tau)\left[2(1+v^2\cos\tau)^2-(1-v^2)^2\right]}{(\tau+v^2\sin\tau)^2} + \right.$$

$$+\frac{\sin\tau}{\tau+v^2\sin\tau}\left[2(1+v^2\cos\tau)^2-(1-v^2)^2+4v^2(1+\cos\tau)(1+v^2\cos\tau)\right]-$$

$$\left. -\left[2(1-v^2\cos\tau)^2+\ 1-v^2)^2\right]\cdot\frac{1}{1-v^2}-4(1+v^2\cos\tau)\cos\tau \right\}. \tag{2}$$

Здесь τ — корень уравнения $\tau = 2v\cos\tau/2$.

Нетрудно убедиться, что каждая круговая орбита является неустойчивой в смысле Ляпунова. Действительно, при малом изменении параметра v величина ω будет мало отличаться от опорного значения ω_0, т.к. $f(v)$ является функцией аналитической в окрестности каждой точки v при $0 < v < 1$ и можно подобрать такое δv, что $\omega - \omega_0 \neq 0$. Таким образом, на некотором отрезке времени мы получаем две несовпадающие орбиты, которые могут быть расположены сколь угодно близко. Этот отрезок времени может быть выбран в качестве начального множества, на котором задаются начальные данные. Очевидно, что радиус-вектор возмущенной траектории будет отклоняться по азимуту от радиуса-вектора невозмущенного движения и выйдет за пределы наперёд заданной ε — окрестности опорного движения при сколь угодно малом значении $\omega - \omega_0$. Этот вид неустойчивости не представляет особого интереса и мы далее будем исследовать орбитальную устойчивость опорного движения определяемого соотношением (1).

Напомним определение орбитальной неустойчивости (устойчивости) применительно к нашему случаю. Пусть $\vec{x}_0(t)$ решение системы (I.2.9) определенные начальными данными $\vec{\varphi}_0(t)$, $t \in M$ (M — начальное множество) и пусть $\vec{x}(t)$ новое решение этой системы, определённое начальными данными $\vec{\varphi}(t)$, $t \in M$. Отклонение начальных данных рассматриваем в метрике G^2_M:

$$\|\vec{\varphi}-\vec{\varphi}_0\|_M = \sup_{t\,\in\,M}\left\{|\vec{\varphi}(t)-\vec{\varphi}_0(t)|+|\dot{\vec{\varphi}}(t)-\dot{\vec{\varphi}}_0(t)|+|\ddot{\vec{\varphi}}(t)-\ddot{\vec{\varphi}}_0(t)|\right\}.$$

Пусть $\vec{x}_0(t)$ задано при $t \geqslant t_0$, обозначим:

$$\varrho(\vec{x}, \vec{x}_0) = \inf_{t \geqslant t_0} |\vec{x}-\vec{x}_0(t)|.$$

Определение: Будем говорить, что решение $\vec{x}_0(t)$ системы (I.2.16) орбитально неустойчиво в метрике C^0, если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, \delta > 0$ существует решение

$\vec{x}(t)$ системы (I.2.16), определяемое на $[t_0, t_1]$ начальными данными $\vec{\varphi}(t)$, $t \in M$, для которых $||\vec{\varphi} - \vec{\varphi}_0|| < \delta$, такое, что

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} \varrho(\vec{x}(t), \vec{x}_0) > \varepsilon.$$

Аналогичным образом можно определить и орбитальную устойчивость.

Нетрудно видеть, что в случае круговой орбиты определяемой параметрами r, ω вместо $\varrho(\vec{x}, \vec{x}_0)$ можно рассматривать величину $\varrho(t) = |r(t) - r_0(t)|$, где $r(t)$ — модуль радиуса-вектора возмущенного движения. Таким образом, задача сводится к исследованию устойчивости по r. При исследовании гамильтоновых систем в этом случае часто сводят задачу к уравнению, в которое явно не входит азимут φ. В нашем случае эта процедура представляется затруднительной. Непосредственно применить второй метод Ляпунова здесь тоже не удаётся, не говоря уже о трудностях построения функционала Ляпунова в этом случае. В связи с этим мы воспользуемся приемом, который позволяет судить о неустойчивости по свойствам решений обращенной во времени системы, зная решения системы первого приближения. При этом, однако, возникает следующая трудность: поправка, на которую точная система уравнений отличается от системы первого приближения, содержит члены, которые при оценках повышают порядок системы (ниже мы покажем это подробно). Это является следствием того, что запаздывания зависят от искомых функций. Поэтому мы рассмотрим упрощенную систему, в которой запаздывания определяются по функциям невозмущенного движения. Вопрос об устойчивости круговых орбит точной системы таким образом остается открытым. Впрочем, можно попытаться исследовать решения точной системы, зная результат для системы с апроксимированными запаздываниями, методами, аналогичными тем, которые применяются при использовании разложения по степеням запаздывания.

Перейдём к исследованию системы первого приближения. Как отмечалось в первой части статьи, мы воспользуемся приближением $|\dot{\vec{\zeta}}| \leqslant 1$. Оказывается, что в этом приближении получаются результаты, одинаковые для широкого класса функционалов, которые приводят к уравнениям нейтрального типа. Рассмотрим в связи с этим действие Фоккера в виде:

$$S = S_0 + \varkappa m_a m_b \iint dt_a dt_b \delta[(t_a - t_b)^2 - (\vec{\zeta}_a - \vec{\zeta}_b)^2] \tilde{\mathscr{F}}(\dot{\vec{\zeta}}_a, \dot{\vec{\zeta}}_b). \qquad (3)$$

Из общих соображений следует, что $\tilde{\mathscr{F}}$ имеет вид $\tilde{\mathscr{F}}(\dot{\vec{\zeta}}_a, \dot{\vec{\zeta}}_b) = \mathscr{F}[\dot{\vec{\zeta}}_a \dot{\vec{\zeta}}_b, \dot{\vec{\zeta}}_a^2, \dot{\vec{\zeta}}_b^2]$ причем $\mathscr{F}[x, y, z] = \mathscr{F}[x, z, y]$. Предположим, что $\mathscr{F}[x, y, z]$ аналитична при $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$.

Пусть $\mathscr{F}[0, 0, 0] \neq 0$, т.е. при $|\dot{\vec{\zeta}}| \to 0$ взаимодействие не исчезает (в противном случае мы бы не получили ньютоновского предела). Поскольку у нас ещё имеется константа $\varkappa$, мы, не теряя общности, можем положить $\mathscr{F}[0, 0, 0] = 1$. Обозначим $\mathscr{F}_1[0, 0, 0] = A$, $2\mathscr{F}_2[0, 0, 0] = B$, где $\mathscr{F}_1[x, y, z] = \mathscr{F}'_x[x, y, z]$; $\mathscr{F}_2[x, y, z] = \mathscr{F}'_y[x, y, z]$.

Функционал (3) приводит к уравнениям движения:[2]

$$\ddot{\vec{\zeta}}_a = m_b \varkappa \int dt_b \delta[(t_a - t_b)^2 - (\vec{\zeta}_a - \vec{\zeta}_b)^2] \left\{ -A\ddot{\vec{\zeta}}_b - B\ddot{\vec{\zeta}}_a + \frac{(\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_a)\,[1 - (\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_a)\ddot{\vec{\zeta}}_b]}{|\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_a|^2} + C \right\} \tag{4}$$

где через C обозначим члены вида $O(\dot{\vec{\zeta}}) \cdot f(\vec{\zeta}, \dot{\vec{\zeta}}, \ddot{\vec{\zeta}})$ ($O(\dot{\vec{\zeta}})$ — величина одного порядка с $|\dot{\vec{\zeta}}|$).

Аналогично тому, как было сделано для системы (I.2.9), систему (4) можно переписать в виде:

$$A\ddot{\vec{\zeta}}_b + (\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_a)\frac{((\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_a)\ddot{\vec{\zeta}}_b)}{|\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_a|^2} = D_{\vec{\zeta}}. \tag{5}$$

Здесь в левой части функции $\vec{\zeta}_b$ имеют в качестве аргумента функции опережения α_2^b (см. I.2.11b). Разрешая (5) сначала относительно $((\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_a)\ddot{\vec{\zeta}}_b)$, получим:

$$\ddot{\vec{\zeta}}_b = \frac{1}{A}\left\{\vec{D}_{\vec{\zeta}} - \frac{\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_a}{A+1} \cdot \frac{((\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_a)D_{\vec{\zeta}})}{|\vec{\zeta}_b - \vec{\zeta}_a|}\right. . \tag{6}$$

Предположим, что $A(A+1) \neq 0$[3]. Как будет показано ниже, при этих условиях система первого приближения является невырожденной системой нейтрального типа. Поскольку содержащиеся в $\vec{D}_{\vec{\zeta}}$ линейным образом функции $\ddot{\vec{\zeta}}_b(\alpha_2^b(t))$ имеют в качестве коэффициентов функции одного порядка с $|\dot{\vec{\zeta}}|$, а остальные высшие производные в $\vec{D}_{\vec{\zeta}}$ не содержат опережающих аргументов (это видно непосредственно из (4) и (5), то при $|\dot{\vec{\zeta}}| \ll 1$ нетрудно убедиться, используя метод итераций, в том, что система линейных уравнений относительно $\ddot{\vec{\zeta}}_b(\alpha_2^b(t))$ разрешима. Аналогично рассматривается система, полученная заменой индекса $a \rightleftarrows b$. Таким образом, задача существования и единственности сводится к рассмотренной ранее [1].

Уравнения опорного движения перепишем, перейдя к вращающейся системе координат с ортами:

$$\vec{e}_x = (\cos \omega t_a, \sin \omega t_a)$$

$$\vec{e}_y = (-\sin \omega t_a, \cos \omega t_a).$$

[2] Можно рассматривать ещё более общее уравнение, а именно, вместо функций запаздывания, определяемых уравнением вида $\alpha(t) - t = \pm|\vec{\zeta}_a(\alpha(t)) - \vec{\zeta}_b(t)|$ можно рассматривать соотношение $\alpha(t) - t = \pm\varphi[\vec{\zeta}_a(\alpha(t)), \vec{\zeta}_b(t)]$. Оказывается, что если наложить на $\varphi[\vec{x}, \vec{y}]$ условие дифференцируемости в каждой точке при $\vec{x} \neq \vec{y}$, причем $|\nabla_{\vec{x}}\varphi| \leqslant 1$ и $\varphi[\vec{x}, \vec{x}] = 0$, а также $\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \geqslant 0$ и ограниченность $|\nabla_{\vec{y}}\varphi|$ при $\vec{x} \neq \vec{y}$, то справедлива теорема, аналогичная доказанной в части I для функций запаздывания-опережения. Доказательство при этом немного усложняется.

[3] При этом из рассмотрения выпадает важный случай электромагнитного поля (см. [2]), где $A = -1$.

Используя то, что функции $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ в точных уравнениях (4), получившихся из (3), содержат под аргументом лишь $\vec{\zeta}_a^0 \vec{\zeta}_b^0 = -v^2 \cos\tau$, $\vec{\zeta}_a^0 - \vec{\zeta}_b = v^2$, где $\tau = \omega(t_b - t_a)$ нетрудно проверить, что круговые орбиты возможны в случае точной системы (3) при условии $\varkappa m\omega = \Psi(v)$, где $\Psi(v) = 4v^2(1+\tilde{O}(v))$.

При $v \ll 1$ получаем классическое соотношение между скоростью и радиусом.

Перейдём к исследованию системы первого приближения. В качестве переменных возмущения выберем $\varrho_{a,b}$ и $\varphi_{a,b}$, где

$$\zeta_a = (r+\varrho_a)\cos(\omega t_a + \varphi_a), (r+\varrho_a)\sin(\omega t_a+\varphi_a))$$

$$\vec{\zeta}_b = (-(r+\varrho_a)\cos(\omega t_b+\varphi_b),\ -(r+\varrho_a)\sin(\omega t_a+\varphi_b)). \tag{7}$$

Ниже мы используем метод отыскания асимптотического расположения нулей фундаментального квазиполинома, для которого потребуется знать лишь коэффициенты при высших производных. Мы также записываем лишь асимптотические значения всех коэффициентов при $v \to 0$, имея в виду, что в конечных выражениях надо будет учесть члены высших порядков малости по v, точный вид которых, однако, не играет роли.

Подставляя (7) в (4), получим в первом приближении

$$\ddot{\varrho}_a(t) - 2v^2(1+A)\frac{\ddot{\varrho}_b\left(t+\frac{\tau}{\omega}\right)+\ddot{\varrho}_b\left(t-\frac{\tau}{\omega}\right)}{2} +$$

$$+2v^3(1+2A)r\frac{\ddot{\varphi}_b\left(t+\frac{\tau}{\omega}\right)-\ddot{\varphi}_b\left(t-\frac{\tau}{\omega}\right)}{2} + \ldots = 0$$

$$\underset{a\leftrightarrow b}{r\varphi_a(t)} - 2v^3(2A+1)\frac{\ddot{\varrho}_b\left(t+\frac{\tau}{\omega}\right)-\ddot{\varrho}_b\left(t-\frac{\tau}{\omega}\right)}{2} -$$

$$-2Av^2r\frac{\ddot{\varphi}_b\left(t+\frac{\tau}{\omega}\right)+\ddot{\varphi}_b\left(t-\frac{\tau}{\omega}\right)}{2} + \ldots \equiv 0 \tag{8}$$

где многоточие обозначает члены не содержащие высших производных, линейные по неизвестным функциям.

Найдём условия, при которых система нейтрального типа (8) является невырожденной. Систему (8) можно переписать в виде:

$$\hat{A}_1\ddot{x}\left(t+\frac{\tau}{\omega}\right)+\hat{A}_2\ddot{x}(t)+\hat{A}_3\ddot{x}\left(t-\frac{\tau}{\omega}\right)+\ldots = 0$$

где

$$x\ t) = (\varrho_a(t),\ \varphi_a(t),\ \varrho_b(t),\ \varphi_b(t)).$$

Не выписывая явно члены высших порядков по v, получим:

$$\det \hat{A}_1 + v^8 O(v) = \det \hat{A}_3 + v^8 O'(v) = [2A(1+A)]^2 v^8.$$

Таким образом, условие невырожденности $A(A+1) \neq 0$ совпадает с условием разрешимости системы относительно высших производных.

Ищем экспоненциальные решения системы (8) в виде $x(t) = xe^{i\lambda t}$. Характеристическое уравнение для определения асимптотического расположения нулей фундаментального квазиполинома (см. [5], [6]) системы (8) имеет вид:

$$\varrho_a - 2v^2(1+A)\cos\frac{\lambda\tau}{\omega}\cdot\varrho_b + 2v^3(1+2A)ri\sin\frac{\lambda\tau}{\omega}\cdot\varphi_b = 0$$

$$r\varphi_a - 2v^3(1+2A)i\sin\frac{\lambda\tau}{\omega}\cdot\varrho_b - 2A\cos\frac{\lambda\tau}{\omega}\cdot v^2 r\varphi_b = 0.$$

Отсюда получаем фундаментальный квазиполином, равенство нулю которого даёт значение λ.

$$[(B-A)(E-F)+DC]\,[(B+A)(E+F)-DC] = 0 \tag{9}$$

где

$$A = E = 1, \quad B = -2v^2(1+A)\cos\frac{\lambda\tau}{\omega}, \quad C = 2v^2(1+2A)i\sin\frac{\lambda\tau}{\omega},$$

$$D = -2v^3 i(1+2A)\sin\frac{\lambda\tau}{\omega}, \quad F = -2Av^2\cos\frac{\lambda\tau}{\omega}.$$

Из (9) получим при $A(A+1) \neq 0$

$$\cos\frac{\lambda\tau}{\omega} = \pm\frac{1+O(v)}{2v^2(1+A)}; \quad \cos\frac{\lambda\tau}{\omega} = \pm\frac{1+O(v)}{2Av^2}.$$

Здесь в $O(v)$ включены такие величины порядка v, которые не учитывались явно при написании уравнений в приближении $v \sim 0$.

Мы видим, что при достаточно малых v для всех корней λ будет выполняться $\left|\cos\frac{\lambda\tau}{\omega}\right| > 1$, т.е. корни будут иметь мнимую часть. Из уравнения вида $\cos\frac{\lambda\tau}{\omega} = \frac{\gamma}{v^2}$ при $\frac{\gamma}{v^2} < 1$, учитывая $\varkappa\tau\omega = 4v^3$ получим, что мнимая часть

$$\operatorname{Im}\lambda = \pm\frac{2v^2}{\kappa}\ln\frac{2|v|}{v^2}.$$

Корни квазиполинома будут образовывать, таким образом, при $|\lambda| \to \infty$ восемь цепочек, ни одна иа которых не лежит на действительной оси. Очевидно, при $v \to 0$ будет $\operatorname{Im}\lambda \to 0$.

В рассмотренном нами случае нетрудно видеть, что $A = -4$ и, подставляя это значение в полученные формулы, получаем:

$$\cos\frac{\lambda\tau}{\omega} = \pm\frac{(7\pm 1)+O(v)}{48v^2}.$$

Отсюда видно, что все корни в цепочках будут простые. В общем случае это выполняется при $A \neq -1/2$.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости по системе первого приближения. Используя уравнения (I.2.11a,b) для функций запаздывания-опережения, можно показать, что система (6) или, в частности, (I.2.9) допускает сдвиги по времени, т.е. если $\vec{\zeta}(t)$ является решением, то и $\vec{\zeta}(t+t_2)$ тоже является решением системы (6) на соответствующем интервале. Это же справедливо для обращенной во времени к (6) системы.

Лемма 1

Пусть $\vec{\zeta}_0(t) = (\zeta_{0_1}(t), \ldots, \zeta_{0_n}(t))$ — решение системы (6) на $(-\infty, \infty)$, $\vec{\zeta}(t) = (\zeta_1(t), \ldots, \zeta_n(t))$ — решение системы, полученной из (6) обращением времени $t \to -t$, заданное при $t \geqslant t_0$, причем $\zeta_1(t) \neq 0$,

$$\{|\vec{\zeta}(t)-\vec{\zeta}'_0(t)|+|\dot{\vec{\zeta}}(t)-\dot{\vec{\zeta}}'_0(t)|+|\ddot{\vec{\zeta}}(t)-\ddot{\vec{\zeta}}'_0(t))|\} \to 0$$

при $t \to \infty$, где $\vec{\zeta}'_0(t) \equiv \vec{\zeta}_0(-t)$.

Тогда решение $\vec{\zeta}_0(t)$ системы (6) неустойчиво в метрике C^0 по компоненте ζ_1.

Доказательство: Пусть $t_1 > t_0$. Выберем $t', \varepsilon : t' < t_1, |\zeta_1(t')| > \varepsilon$. В силу условий леммы: $\forall\delta > 0\ \exists\, t_2$:

$$\{|\vec{\zeta}(t)-\vec{\zeta}'_0(t)|+|\dot{\vec{\zeta}}(t)-\dot{\vec{\zeta}}'_0(t)|+|\ddot{\vec{\zeta}}(t)-\ddot{\vec{\zeta}}'_0(t)|\} < \delta$$

при $t < t_2$.

Тогда для исходной системы (6) существует решение: $\vec{\zeta}(-(t-t_2))$ которое при $t > t_2-t_1$ задается начальными данными $\varphi(t)$, причем

$$|\vec{\varphi}(t)-\vec{\zeta}_0(t))|+|\dot{\vec{\varphi}}(t)-\dot{\vec{\zeta}}_0(t)|+|\ddot{\vec{\varphi}}(t)-\ddot{\vec{\zeta}}_0(t)| < \delta$$

и которое при $t > t_2-t_1$ выходит за пределы ε — окрестности решения $\vec{\zeta}_0(t)$ по первой компоненте $\zeta_1(t)$ в метрике C^0, что и требовалось показать.

Таким образом, задача об устойчивости решения системы (6) сводится к исследованию решений обращенной во времени системы.

Систему (6) можно привести к виду

$$A\vec{x} = \vec{\mathscr{F}}_1\,[\vec{x}, t]$$

где $\vec{x} = \vec{\zeta}-\vec{\zeta}_0$ — возмущение относительно круговой орбиты. Здесь

$$A\vec{x} = A_1\ddot{\vec{x}}(t)+A_2\ddot{\vec{x}}(t-\tau)+A_3\ddot{\vec{x}}(t-2\tau)+B_1\dot{\vec{x}}(t)+B_2\dot{\vec{x}}(t-\tau)+B_3\dot{\vec{x}}(t-2\tau)+$$
$$+C_1\vec{x}(t)+C_2\vec{x}(t-\tau)+C_3\vec{x}(t-2\tau)$$

— оператор системы первого приближения, где A_i, B_i, C_i — матрицы с постоянными членами, $\vec{\mathscr{F}}_1$ — остаток. Используя результаты, полученные при исследовании системы (8), имеем, что $\det A_1 \neq 0$, $\det A_3 \neq 0$ при $A(A+1) \neq 0$.

Затем, что в $\vec{\mathscr{F}}_1$ войдут члены вида

$$\vec{\varphi}(\vec{x}) = \dddot{\vec{x}}(A(\vec{\zeta}(t))) - \dddot{\vec{x}}(A(\vec{\zeta}_0(t)))$$

которые оцениваются через третьи производные от $\vec{x}$ и являются членами второго порядка малости лишь в C^2. Более того, нетрудно видеть, что в оценке вида

$$|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{x}')| \leqslant K\{||\vec{x} - \vec{x}'||_{C^0} + ||\dddot{\vec{x}} - \dddot{\vec{x}}||_{C^0}\}$$

константа K будет зависеть ещё и от четвёртых производных. Потому, как отмечалось выше, мы далее рассмотрим систему с аппроксимированными запаздываниями, т.е. вместо $A(\zeta(t))$ рассматриваем во всех членах $A(\zeta_0(t))$. Отметим, что необязательно для указанных целей делать такую замену во всех членах $\vec{x}(A(t))$. Можно также рассматривать последовательность решений $\{\vec{x}_n\}$, такую, что каждое $\vec{x}_n$ определяется из уравнения с запаздыванием вида $A(\zeta_{n-1}(t))$, сходимость которой, однако, нам не удалось установить.

Таким образом, приходим к системе с невозмущенными отклонениями аргумента

$$A\vec{x} = \mathscr{F}_2[\vec{x}, t] \tag{10}$$

где для $\mathscr{F}_2$ имеет место

$$|\mathscr{F}_2[\vec{x}, t] - \mathscr{F}_2[\vec{x}', t]| \leqslant L(\Delta)||\vec{x} - \vec{x}'||_{t-T}^{t}$$

при

$$||\vec{x}||_{t-T}^{t} \leqslant \Delta, \qquad ||\vec{x}'||_{t-T}^{t} \leqslant \Delta$$

где

$$||y||_{t-T}^{t} = \sup_{t' \in [t-T, t]} \{|\vec{y}(t')| + |\dot{\vec{y}}(t')| + |\ddot{\vec{y}}(t')|\}$$

причем $L(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$.

Нетрудно видеть, что для обращенной во времени системы линейная часть имеет вид

$$A\vec{x} = \sum_{\kappa=0}^{2} A_{\kappa+1}\vec{x}(t+\kappa\tau) - \sum_{\kappa=0}^{2} B_{\kappa+1}\dot{\vec{x}}(t+\kappa\tau) + \sum_{\kappa=0}^{2} C_{\kappa+1}\ddot{\vec{x}}(t+\kappa\tau)$$

Очевидно экспоненциально растущие решения системы линейного приближения для (10) являются экспоненциально убывающими решенями обращенной во времени системы. Заметим, что из практических соображений удобнее не понижать порядок производных системы.

Оператор, получающийся из $\vec{\mathscr{F}}_2$ при обращении времени будет удовлетворять тем оценкам, что и $\vec{\mathscr{F}}$, следует только вместе нормы $||\vec{y}||_{t-T}^{t}$ использовать норму $||\vec{y}||_{t}^{t+T}$.

Исследуем свойства величин, связанных с линейной системой.

Лемма 2

Пуст A_i, B_i, C_i — матрицы порядка $m(i = 1, ..., n)$; $\det A_1 \neq 0$, $\det A_n \neq 0$. Пусть числа τ_i соизмеримы, т.е. $\exists\, \tau : \tau_i = \kappa_i \tau$ (κ_i — целые числа); $\tau_1 > \tau_2 > \ldots > \tau_n$ для определённости.

Пусть все корни $\det \sum_{\kappa=0}^{n} A_\kappa e^{ip\tau_\kappa}$ как функции от p простые. Тогда вне некоторой ограниченной области корни функции $\det A(p)$, где

$$A(p) = -\sum_{\kappa=1}^{n} p^2 A_\kappa e^{ip\tau_\kappa} + ip \sum_{\kappa=1}^{n} B_\kappa e^{ip\tau_\kappa} + \sum_{\kappa=1}^{n} C_\kappa e^{ip\tau_\kappa}$$

группируются в конечное число цепочек, причем корни p_κ каждой цепочки имеют вид:

$$p_\kappa = p^0 + \frac{2\pi}{\tau}\kappa + \frac{A_0}{\kappa} + \frac{f}{\kappa^2}$$

при достаточно больших значениях целых чисел $|\kappa|$, причём $|f_\kappa| < f_0$; p^0, f_0, A_0 — константы, разные для разных цепочек и значения $p^0 + \frac{2\pi}{\gamma}\kappa$ являются корнями из соответствующей цепочки для $\det \{\sum_{\kappa=1}^{n} A_\kappa e^{ip\tau_\kappa}\}$.

Доказательсто: Из условий $\det A_1 \neq 0$, $\det A_n \neq 0$ следует, что детерминант $\det \{\sum_{\kappa=1}^{n} A_\kappa e^{ip\tau_\kappa}\}$ отличен от нуля и имеет корни в открытой комплексной плоскости. Нетрудно видеть, что корни группируются в конечное число цепочек вида $p_\kappa^0 = p^0 + \frac{2\pi}{\tau}\kappa$, т.к. записанное выражение является полиномом от периодической функции $e^{ip\tau}$.

Рассмотрим функцию $(ip)^{-2} \det A(p)$, корни которой при $p \neq 0$ совпадают с корнями $\det A(p)$. Нетрудно видеть, что при $\operatorname{Im} p \to \pm\infty$ доминирующими членами этой функции являются соответственно $\det A\, e^{imp\tau_n}$ и $\det A_1\, e^{imp\tau_1}$, т.е. возможные нули $\det A(p)$ равномерно ограничены по мнимой части. Используя этот факт и теорему Руше и следуя рассуждениям, аналогичным [6] (стр. 440), получим, что $\det A(p)$ имеет корни, групирующиеся в цепочки с асимптотикой при больших $|p_\kappa|$

$$p_\kappa - p_\kappa^0 = \varepsilon_\kappa, \qquad \text{где} \qquad \varepsilon_\kappa \to 0, \quad |\kappa| \to \infty$$

Функцию $(ip)^{-2m} \det A(p)$ можно записать в виде

$$z(p) = z_0(p) + \frac{1}{p} z_1(p) + \frac{1}{p^2} z_2(p)$$

где $z_0(p) = \det\{\sum_{\kappa=1}^{n} A_\kappa e^{ip\tau_\kappa}\}$; $z_1(p)$ — периодическая с периодом $\frac{2\pi}{\tau}$ функция, $z_2(p)$ — ограничена при $|\mathrm{Im}\, p| < C_1$, $|p| > C_2$ (C_1, C_2 — некоторые положительные константы).

Проведем рассуждение для одной из цепочек корней $p_\kappa^0 = p^0 + \frac{\pi 2}{\tau}\kappa$. В окрестности каждой точки (p_κ^0) имеем:

$$z_0(p) = z(p_\kappa^0) + \varphi_\kappa(p)(p - p_\kappa^0) = \varphi_\kappa(p)(p - p_\kappa^0).$$

Поскольку по предположению леммы все корни $z_0(p)$ простые,

$$\varphi_\kappa(p_\kappa^0) = z_0'(p_\kappa^0) + \varphi_\kappa(p)(p - p_\kappa^0) = \varphi_\kappa(p)(p - p_\kappa^0).$$

Из периодичности $z_0(p)$ следует, что $[\varphi_\kappa(p)]^{-1}$ ограничена в окрестности p_κ^0 равномерно по κ. Пользуясь равномерной ограниченностью по κ функций $z_1(p)$, $z_2(p)$, $\varphi_\kappa(p)]^{-1}$ в окрестности p_κ^0 учитывая $\varepsilon_\kappa \to 0$, нетрудно показать, что

$$\exists C_3 : |p_\kappa - p_\kappa^0| < \frac{C_3}{p_\kappa^0} \quad \text{при} \quad |p_\kappa| > C_2.$$

Аналогично, записывая в окрестности p_κ^0

$$z_0(p) = z_0(p_\kappa^0) + z_0'(p_\kappa^0)(p - p_\kappa^0) + \Psi_1^\kappa(p)(p - p_\kappa^0)^2$$

и

$$z_1(p) = z_1(p_\kappa^0) + \Psi_2^\kappa(p)(p - p_\kappa^0)$$

используя периодичность этих функций и полученную оценку для $|p_\kappa - p_\kappa^0|$, имеем, что при достаточно больших $|\kappa|$ выполняется равенство:

$$p_\kappa = p_\kappa^0 + \frac{2\pi}{\tau}\kappa + \frac{A_0}{\kappa} + \frac{f_\kappa}{\kappa^2}$$

вместе с условиями на f_κ, p_κ^0, указанными в лемме.

Сформулируем дополнительные условия, которые будут использованы в дальнейшем.

(α). Корни $z_0(p)$ не лежат на действительной оси.

Отсюда следует, что в силу леммы 2 и аналитичности $\det A(p)$ на действительной оси может лежать лишь конечное число нулей этой функции. В силу этих же причин можно утверждать, что существует также $\alpha_0 > 0$, что все корни $\det A(p)$ разбиваются на две части

$$\{p_r\}: \begin{array}{l} 1)\ \mathrm{Im}\, p_r \geqslant \alpha_0 \\ 2)\ \mathrm{Im}\, p_r \leqslant 0. \end{array}$$

(β). Полагаем $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau_n \leqslant 0$. Очевидно можно всегда добиться выполнения этого условия, производя в исходной системе сдвиг во времени.

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 2 и имеет место (β). Пусть $\{p_r\}$ — корни функции

$$z_0(p) = \det\{\sum_{\kappa=1}^{n} A_\kappa e^{ip\tau_\kappa}\}.$$

Тогда $\forall\, \delta < 0$ (достаточно малого) $\exists\, C_\delta$:

$$|B_{ij}(p)| < \frac{C_\delta}{|p|^2} \quad \text{при} \quad |p-p_r| \geqslant \delta, \forall r$$

где

$$B(p) = A^{-1}(p).$$

Доказательство: Мы имеем $B_{ij} = \dfrac{\tilde{A}_{ij}(p)}{\det A(p)}$ где $\tilde{A}_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента A_{ji} в определителе $\det A(p)$. В лемме 2 было показано, что при достаточно большой константе C, $\operatorname{Im} p \geqslant C$ порядок роста $\det A(p)$ при $|p| \to \infty$ определяется членами

$$p^{2m} e^{im\tau_1 p} \det A_1, \;\; p^{2m} e^{im\tau_n p} \det A_n.$$

Для $\tilde{A}_{ij}(p)$ порядок роста не выше порядка роста функции

$$|p^{2(m-1)} e^{i(m-1)\tau_1 p}| + |p^{2(m-1)} e^{i(m-1)\tau_n p}|.$$

Учитывая (β), нетрудно видеть, что предположение леммы имеет место при $|\operatorname{Im} p| \geqslant C$.

При $|\operatorname{Im} p| \leqslant C$ аналогичные оценки нетрудно сделать, пользуясь периодичностью $z_0(p)$ и свойством $|p-p_\kappa^0|^2 \to 0$. Полученные оценки доказывают лемму.

В дальнейшем нам будет удобно работать с обобщенными функциями над пространством основных функций Шварца. Чтобы иметь возможность пользоваться теорией обобщенных функций, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. Пусть $\mathscr{I}$ — матричный функционал над S_p (пространство основных функций Шварца), который задается соотношением

$$(\mathscr{I}(p), \varphi(p)) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} A^{-1}(p+i\varepsilon)\varphi(p)dp.$$

Пусть выполнены условия лемм 2, 3 и условие (α). Тогда записанный функционал существует и является обобщенной функцией над S_p.

Доказательство: Заметим, что $A^{-1}(p)$ — мероморфная функция.

В силу (α) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция $A^{-1}(p+i\varepsilon)$, $p \in (-\infty, \infty)$ не имеет особенностей. В силу леммы 3 $A^{-1}(p+i\varepsilon)$ ограничена. Тогда $\forall \varphi(p) \in S_p$ интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} A^{-1}(p+i\varepsilon)\varphi(p)dp$ имеет смысл. Разобьём его на две части

$$\int_{p \,\bar{\in}\, [l_1, l_2]} A^{-1}(p+i\varepsilon)\varphi(p)dp + \int_{l_1}^{l_2} A^{-1}(p+i\varepsilon)\varphi(p)dp$$

так, чтобы все полюса $A^{-1}(p)$, находящиеся на действительной оси были бы на (l_1, l_2). Сходимость первого слагаемого при $\varepsilon \to +0$ устанавливается тривиально. Во втором достаточно рассмотреть случай, когда на (l_1, l_2) находится один полюс порядка n в точке l_0. Запишем

$$A^{-1}(p) = \frac{\Psi(p)}{(p-l_0)^n}, \qquad l_0 \in (l_1, l_2)$$

где $\Psi(p)$ — аналитична в некоторой комплексной окрестности отрезка $[l_1, l_2]$ (поскольку $A^{-2}(p)$ мероморфна). Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(p) = \Psi(p+i\varepsilon)\,\varphi(p).$$

Нетрудно видеть, что при достаточно малых $\varepsilon_0 > 0$ все производные $f_\varepsilon(p)$ равномерно ограничены на $\{(\varepsilon, p) \in [0, \varepsilon_0] \times [l_1, l_2]\}$.

Представим эту функцию в виде

$$f_\varepsilon(p) = f_\varepsilon(l_0) + f'_\varepsilon(l_0)\,(p-l_0) + \ldots + \frac{1}{n-1} f_\varepsilon^{(n-1)}(l_0)\,(p-l_0)^{n-1} + \mathscr{F}_\varepsilon(p)\,(p-l_0)^n.$$

Тогда:

$$\int A^{-1}(p+i\varepsilon)\varphi(p)dp = \int_{l_1}^{l_2} \frac{f_\varepsilon(p)dp}{(p-l_0+i\varepsilon)^n} = \int_{l_1}^{l_2} \mathscr{F}_\varepsilon(p)\left(\frac{p-l_0}{p-l_0+i\varepsilon}\right)^n dp -$$

$$-\frac{f_\varepsilon(l_0)}{n-1}\left[\frac{1}{(l_2-l_0+i\varepsilon)^{n-1}} - \frac{1}{(l_1-l_0+i\varepsilon)^{n-1}}\right] - \ldots -$$

$$-\frac{f_\varepsilon^{(n-1)}(l_0)}{(n-1)!}\left[\frac{1}{l_2-l_1+i\varepsilon} - \frac{1}{l_1-l_0+i\varepsilon}\right].$$

Действительные функции $\operatorname{Re}\mathscr{F}_\varepsilon(p)$, $\operatorname{Im}\mathscr{F}_\varepsilon(p)$ можно оценить по функциям для достаточного члена через $\operatorname{Re} f_\varepsilon^{(n)}(p)$ $\operatorname{Im} f_\varepsilon^{(n)}(p)$. После этих оценок существование предела при $\varepsilon \to +0$ устанавливается без затруднений.

Таким образом, функционал $(\mathscr{I}(p), \varphi(p))$ существует. Остается показать его непрерывность, т.е.

$$(\mathscr{I}(p), \varphi(p)) \to 0 \quad \text{при} \quad \varphi_n(p) \xrightarrow[n\to\infty]{S} 0.$$

Для этого снова разбиваем функционал на части

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int A^{-1}(p+i\varepsilon)\varphi_n(p)dp + \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-l}^{l} A^{-1}(p+i\varepsilon)\varphi_n(p)dp$$

где l выбрано так, что при $|p| \geqslant l$ функция $A^{-1}(p)$ не содержит особенностей. В непрерывности первого слагаемого нетрудно убедиться. Чтобы рассмотреть второе, распишем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp\, A^{-1}(p+i\varepsilon)\, \varphi(p)$ аналогично тому, как это сделано выше при доказательстве существования предела при $\varepsilon \to 0$, и вычислим этот предел. Учитывая равномерную сходимость всех производных от $\varphi_n(p)$ при $n \to \infty$ к нулю на $[-l, l]$, что следует из определения сходимости в S_p, нетрудно убедиться в том, что и этот член стремится к нулю при $n \to \infty$. Этим наша лемма доказана.

Рассмотрим обычное преобразование Фурье

$$\mathscr{I}_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} A^{-1}(p+i\varepsilon) e^{ipt} dp.$$

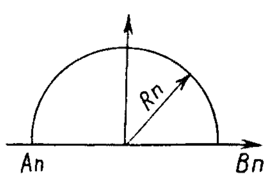
(Для обозначения Фурье-образов и прообразов используются те же буквы, меняются лишь обозначения аргумента).

Число $\varepsilon > 0$ считаем везде достаточно малым.

В силу свойств величины $A^{-1}(p)$, установленных в лемме 3, $\mathscr{I}_\varepsilon(t)$ существует. Используя рассуждения, аналогичные приведенным в последней лемме, нетрудно показать равномерную сходимость на каждом конечном отрезке t-оси:

$$\mathscr{I}_\varepsilon(t) \Rightarrow \mathscr{I}(t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \mathscr{I}_\varepsilon(t).$$

Вычислим $\mathscr{I}(t)$ при $t \geqslant 0$. Получаем последовательность контуров $(A\,B, C_R)_n$ (см. рис.), так что $R_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и чтобы все контуры не имели общих точек с δ-окрестностью полюсов подинтегрального выражения $A^{-1}(p)$. Этого можно



добиться, выбрав δ достаточно малым. На указанных контурах в силу леммы 3 имеем:

$$|A^{-1}(p+i\varepsilon)||e^{ipt}| < \frac{C_\delta}{|p+i\varepsilon|^2}.$$

Поэтому можно выразить $\mathscr{I}_\varepsilon(t)$ через вычеты в верхней полуплоскости:

$$\mathscr{I}_\varepsilon(t) = \sum_{n\to\infty} \operatorname{res}\,\{iA^{-1}(p+i\varepsilon)e^{ipt}\}.$$

Сумма $\sum\limits_n \operatorname{res}$ берется по вычетам в области, ограниченной контуром $(AB, C_R)_n$, $\sum\limits_{n\to\infty} \operatorname{res}$ — означает её предельное значение при $n \to \infty$ существование которого следует из сходимости интегралов. В дальнейшем мы будем подразумевать, что суммирование производится по всем вычетам в верхней полуплоскости (без действительной оси). Это не приведет к путанице, ибо, как будет видно дальше, ряды сходятся абсолютно и порядок суммирования произволен.

Запишем

$$\mathcal{I}_\varepsilon(t) = \sum_{p+i\varepsilon=p_\kappa\in D} \operatorname{res}\{iA^{-1}(p+i\varepsilon)e^{ipt}\} + \sum_{p+i\varepsilon=p_\kappa\bar{\in}D} \operatorname{res}\{iA^{-1}(p+i\varepsilon)e^{ipt}\}. \quad (11)$$

Здесь D — ограниченная область, вне которой полюса p_κ группируются в цепочки. Сумма по $p_\kappa \in D$ содержит конечное число членов вида $c_\kappa e^{ip_\kappa t} t^{n_\kappa-1}$, где n_κ — порядок полюса в p_κ ; её предел при $\varepsilon \to 0+0$, $t \geqslant 0$ мажорируется величиной $c_\alpha e^{-\alpha t}$, где c_α — некоторая константа, а $\alpha < \alpha_0, \alpha > 0$.

Вторая сумма в (11) имеет вид

$$\sum_{r=1}^{r_0} \zeta_\varepsilon^r(t), \quad (12)$$

$$\zeta_\varepsilon^r(t) = \sum_{|\kappa|>\kappa_0} \frac{R(p_\kappa'^r)}{(p_\kappa'^r)^2} e^{ip'^r{}_\kappa t} \quad (13)$$

где r — индекс цепочки полюсов p_κ^r, r_0 — количество цепочек, κ_0 — достаточно большое, $p_\kappa'^r = p_\kappa^r - i\varepsilon$ где p_κ^r — κ-й полюс r-й цепочки.

Учитывая асимптотику p_κ^r и вид $A^{-1}(p)$, несложно доказать, что

$$R(p_\kappa) = c_0 + \frac{c_1}{\kappa} + \frac{c_2(\kappa)}{\kappa^2}, \qquad |c_2(\kappa)| < c_3$$

где c_0, c_1, c_3 — некоторые константы.

Отсюда видно, что ряд (13) абсолютно сходится к непрерывной ограниченной функции $\zeta_\varepsilon^r(t)$, $t \geqslant 0$, которая ограничена равномерно по ε и равномерно стремится при $\varepsilon \to +0$ в сумме сходящегося ряда

$$\sum_{|\kappa|>\kappa_0} \frac{R(p_\kappa'^r)}{(p_\kappa^r)^2} e^{ip^r{}_\kappa t} = \zeta^r(t), \qquad \operatorname{Im} p_\kappa^r \geqslant \alpha_0 > 0$$

на каждом конечном отрезке t-оси. Функция $\zeta_r(t)$ также непрерывна.

При $t \leqslant 0$, рассуждая аналогичным образом, выражаем $\mathcal{I}(t)$ через сумму вычетов в нижней полуплоскости (включая действительную ось) и получаем, что $\mathcal{I}(t)$ при $t \leqslant 0$ также непрерывна. Нетрудно видеть, что сумма вычетов от $\mathcal{I}(p)$ в верхней полуплоскости равна сумме вычетов в нижней вместе с действительной осью. Отсюда следует непрерывность $\mathcal{I}(t)$ и в точке $t = 0$.

Поскольку на действительной оси возможны полюса порядка >1 то $\mathcal{I}(t)$ может быть неограниченной при $t \to -\infty$. Однако нетрудно видеть, что $\mathcal{I}_\varepsilon(t)$ равномерно по ε (а значит и $\mathcal{I}(t)$) мажорируется полиномом от t конечной степени. Причем, как и при $t \geqslant 0$ имеем

$$\mathcal{I}_\varepsilon(t) \Rightarrow \mathcal{I}(t)$$

равномерно на каждом конечном отрезке. Используя это, получаем, что $\forall\varphi\in S_t$

$$(\mathscr{I}(t),\,\varphi(t)) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{I}_\varepsilon(t)\varphi(t)dt.$$

Используя равенство Парсеваля, условия которого выполнены в случае $A^{-1}(p+i\varepsilon)\ \forall\varepsilon>0,\,p\in(-\infty,\infty)$ имеем

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{I}_\varepsilon(t)\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}A^{-1}(p+i\varepsilon)\varphi(-p)dp$$

где

$$\varphi(p) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{ipt}\varphi(t)dt.$$

Отсюда

$$2\pi(\mathscr{I}(t),\,\varphi(t)) = (\mathscr{I}(p),\,\varphi(-p))$$

т.е. обобщенное и „обычное“ (обратное) преобразование Фурье от $\mathscr{I}(p)$ совпадают.

При $t\geqslant 0$

$$\mathscr{I}(t) = \sum_{p_\kappa\in D,\ \mathrm{Im}\,p_\kappa\geqslant\alpha_0} c_{p_\kappa}e^{ip_\kappa t}t^{n_\kappa-1} + \sum_{p_\kappa\bar{\in} D,\ \mathrm{Im}\,p_\kappa\geqslant\alpha_0}\frac{R(p^r_\kappa)e^{ip^r{}_\kappa t}}{(p^r_\kappa)^2}. \tag{14}$$

При $t\leqslant 0$

$$\mathscr{I}(t) = \sum_{p_\kappa\in D,\ \mathrm{Im}\,p_\kappa\leqslant 0} e^{ip_\kappa t}c_{p_\kappa}t^{n_\kappa-1} + \sum_{p_\kappa\bar{\in} D,\ \mathrm{Im}\,p_\kappa\leqslant 0}\frac{R(p^r_\kappa)e^{ip^r{}_\kappa t}}{(p^r_\kappa)^2}. \tag{15}$$

Первая сумма в (14), содержащая конечное число членов, мажорируется величиной $c^\alpha e^{-\alpha t}(\alpha<\alpha_0)$, $t\geqslant 0$, для некоторой константы. Это же справедливо для двух её производных.

При $t\leqslant 0$ в (15) аналогичной мажорантой для первого слагаемого является функция вида $c_1+c_2t^n$, $n\geqslant 0$.

Рассмотрим вторую сумму в (14). Очевидно достаточно рассмотреть

$$\zeta^r(t) = \sum_{|\kappa|>\kappa_0}\frac{R(p^r_\kappa)}{(p^r_\kappa)^2}\,e^{ip^r{}_\kappa t},\qquad t\geqslant 0.$$

Далее индекс r опускаем.

Записывая $e^{ip_\kappa t} = e^{ip_\kappa{}^0 t}+ite^{ip_\kappa{}^0 t}(p_\kappa-p^0_\kappa)+\chi_\kappa(t)\dfrac{(p_\kappa-p^0_\kappa)^2}{2}$ и учитывая, что функция

$$\frac{e^{i\gamma t}-1-i\gamma t}{(\gamma t)^2}$$

аналитична и имеет порядок роста при $t \to \infty$ не выше $e^{|\gamma| t}$, используя асимптотику для $R(p_\kappa)$, можно показать, что

$$\frac{R(p_\kappa)}{(p_\kappa)^2} e^{ip_\kappa t} = \frac{c_0}{\kappa^2} e^{i\left(p^0 + \frac{2\pi}{\tau}\kappa\right)t} + \frac{c_1 e^{i\left(p^0 + \frac{2\pi}{\tau}\kappa\right)t}}{\kappa^3} + \frac{\tilde{\chi}_\kappa}{\kappa^4} \tag{16}$$

где

$$|\tilde{\chi}_\kappa(t)| < \tilde{c} e^{-\alpha t}, \ \alpha < \alpha_0, \ |\kappa| > \kappa_0$$

$$|\tilde{\chi}'_\kappa(t)| < \tilde{c}|\kappa| e^{-\alpha t}, \ |\tilde{\chi}''| < \kappa^2 \tilde{c} e^{-\alpha t}$$

$\tilde{c}$ — некоторая положительная константа.

Следовательно ряд $\sum\limits_\kappa \tilde{\chi}_\kappa(t)\kappa^{-4}$ можно дважды дифференцировать почленно. Остается рассмотреть суммы

$$c_1 t e^{ip^0 t} \sum_{|\kappa| > \kappa_0} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\tau}\kappa t}}{\kappa^3} \quad \text{и} \quad e^{ip^0 t} c_0 \sum_{|\kappa| > \kappa_0} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\tau}\kappa t}}{\kappa^2}.$$

Достаточно рассмотреть для наших целей суммы:

$$\sum_{|\kappa| > \kappa_0} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\tau}t}}{\kappa^3} \quad \text{и} \quad \sum_{|\kappa| > \kappa_0} \frac{e^{i\frac{2\pi}{\tau}t}}{\kappa^2}.$$

Очевидно первый ряд можно дифференцировать почленно, причем результат будет пропорционален второму ряду. Поэтому мы рассмотрим лишь две обобщенные производные от второго ряда, который отличается на конечное число членов вида $c_\kappa e^{i\frac{2\pi\kappa}{\tau}t}$ и постоянным множителем от $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} \kappa^{-2} \cos\frac{2\pi}{\gamma}\kappa t$. Но последний ряд есть ряд Фурье от функции, периодически продолженной (с периодом τ) с отрезка $[0, \tau]$, где она равна $\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \pi\right)^2$. Производная вычисляется непосредственно и является разрывной функцией. Отсюда видно, что $\zeta^r(t)$ и $\zeta''^r(t)$ при $t \geqslant 0$ имеют мажоранту вида $c_\alpha e^{-\alpha t}$.

В результате получим, что производная $\mathscr{I}'(t)$ может быть записана в виде

$$\mathscr{I}'(t) = -(\mathscr{I}_1(t) + \mathscr{I}_2(t)) \tag{17}$$

где $\mathscr{I}'_1(t)$ — разрывная часть, а $\mathscr{I}'_2(t)$ — непрерывная, которая, аналогично $\mathscr{I}(t)$ имеет разрывную производную, обладающую свойствами функции $\mathscr{I}'(t)$, причем

$$\mathscr{I}'_1(t) = \sum_{r=1}^{r_0} \Psi_r(t) + \sum_{r=1}^{\tilde{r}_0} \tilde{\Psi}_r(t)$$

где

$$\Psi_r(t) = \begin{cases} B_{1r} + B_{2r} e^{ip^0{}_r t} \beta(t), \; t \geqslant 0 \\ \qquad \operatorname{Im} p_r^0 \geqslant \alpha_0 > 0 \\ 0, \; t \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\Psi_r(t) = \begin{cases} 0, \; t > 0 \\ \tilde{B}_{1r} + \tilde{B}_{2r} e^{i\tilde{p}^0{}_r t} \beta(t), \; t < 0 \\ \qquad \operatorname{Im} \tilde{p}_r^0 < 0. \end{cases}$$

Здесь $\beta(t)$ периодическая с периодом τ функция, равная на $[0, \tau]$ функции $\frac{2t}{\tau} - 1$; $B_{1r}, B_{2r}, \tilde{B}_{1r}, \tilde{B}_{2r}$ — константы.

Легко видеть

$$\exists\, c_\alpha : \begin{cases} |\mathscr{I}'(t)| < c_\alpha & \text{при } t \leqslant 0 \\ |\mathscr{I}_1'(t)| < c_\alpha e^{-\alpha t} & \text{при } t \geqslant 0, \alpha_0 > \alpha. \end{cases} \tag{18}$$

Обобщенная производная от $\mathscr{I}_1'$ определяется по формулам

$$-(\mathscr{I}''(t), \varphi(t)) = (\mathscr{I}_1'(t), \varphi(t)) = -\sum_{r=1}^{r_0} \int_0^\infty B_{2r} e^{ip^0{}_r t} \left[i p_r^0 \beta(t) + \frac{2}{\tau} \right] \varphi(t) dt -$$

$$-\sum_{r=1}^{\tilde{r}_0} \int_0^\infty B_{2r} e^{i\tilde{p}^0{}_r t} \left[i\tilde{p}_r^0 \beta(t) + \frac{2}{\tau} \right] \varphi(t) dt - (\gamma(t), \varphi(t)) \tag{19}$$

где сингулярная часть $\gamma(t)$ определяется из соотношения:

$$-(\gamma(t), \varphi(t)) = \sum_{r=1}^{\tilde{r}_0} 2B_{2r} \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{ip^0{}_r \kappa\tau} \varphi(\kappa\tau) + \sum_{r=1}^{\tilde{r}_0} 2B_{2r} \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{i\tilde{p}^0{}_r \kappa\tau} \varphi(-\kappa\tau) + B_0 \varphi(0)$$

где

$$B_0 = \sum_{r=1}^{\tilde{r}_0} \tilde{\Psi}_r(0) - \sum_{r=1}^{r_0} \Psi_r(0).$$

Полученные результаты мы используем при доказательстве следующей леммы.

Лемма 5. Пусть $\varphi \in S_t$, $|\varphi(t)| \leqslant c e^{-\alpha_1 t}$ при $t \geqslant 0$, где $\alpha_1 < \alpha_0$, $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$, $\mathscr{I}(t)$ — рассмотренная обобщенная функция.

Тогда $\exists B$:

$$|(\mathscr{I}*\varphi)(t)| \leqslant cBe^{-\alpha t}, \ |(\mathscr{I}'*\varphi)(t)| \leqslant cBe^{-\alpha t},$$

$$|(\mathscr{I}''*\varphi)(t)| \leqslant cBe^{-\alpha t} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0$$

где B определяется функциями $\mathscr{I}, \mathscr{I}', \mathscr{I}''$ и не зависит от φ[4].

Доказательство: Как известно, свертка обобщенной функции с основной из S бесконечно дифференцируема, но, вообще говоря, не принадлежит S.

Из предыдущих рассмотрений следует

$$\exists B_1, n, B_2 : |\mathscr{I}(t)| \leqslant \begin{cases} B_1 e^{-\alpha t} & \text{при } t \geqslant 0 \\ B_1 t^n + B_2 & \text{при } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Выберем $\varepsilon < \alpha_1$, тогда $(\Psi(t) = (\mathscr{I} * \varphi)(t))$:

$$|\Psi(t)| \leqslant cB_1 e^{-\alpha t} \cdot \frac{e^{(\alpha-\alpha_1)t}-1}{\alpha-\alpha_1} + c_1 B_\varepsilon e^{-\alpha t} \cdot \frac{1}{\alpha_1 - \varepsilon}.$$

Обозначая

$$\max_{t \geqslant 0} \left\{ B_1 \frac{1-e^{-(\alpha-\alpha_1)t}}{\alpha-\alpha_1} + B_\varepsilon \frac{1}{\alpha_1-\varepsilon} \right\} = B'$$

получим

$$|\Psi(t)| \leqslant B' c e^{-\alpha_1 t}.$$

Совершенно аналогично делается оценка для $(\mathscr{I}' * \varphi)$.

Рассмотрим теперь $(\mathscr{I}'' * \varphi)$. Поскольку можно записать $\mathscr{I}'' = \gamma(t) + H(t)$ (см. (16)), где $H(t)$ — регулярная часть, обладающая теми же свойствами, что и $\mathscr{I}'(t)$, достаточно рассмотреть

$$(\gamma(s), \varphi(t-s)) = \sum_{r=1}^{r_0} 2B_{2r} \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{ip_r{}^0 \kappa\tau} \varphi(t-\kappa\tau) -$$

$$- \sum_{r=1}^{\tilde{r}_0} 2\tilde{B}_{2r} \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{-i\tilde{p}_r{}^0 \kappa\tau} \varphi(t+\kappa\tau) - B_0 \varphi(t).$$

Учитывая, что $\operatorname{Im} p_r^0 \geqslant \alpha_0$, $\operatorname{Im} \tilde{p}_r^0 < 0$; $\varphi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ получаем

$$|\gamma(t), \varphi(t-s)| \leqslant c \sum_{\kappa=1}^{r_0} 2|B_{2r}| e^{-\alpha_1 t} \frac{1}{e^{(\alpha-\alpha_1)t}-1} + c \sum_{r=1}^{\tilde{r}_0} 2|\tilde{B}_{2r}| \frac{e^{-\alpha_1 t}}{e^{\alpha_1 \tau}-1}.$$

---

[4] Здесь $(\mathscr{I} * \varphi)(t) = (\mathscr{I}(s), \varphi(t-s))$ — свертка обобщенной функции $\mathscr{I}$ с основной φ.

Обозначая

$$B'' = \left\{ \sum_{r=1}^{r_0} 2|B_{2r}| \frac{1}{e^{(\alpha-\alpha_1)\tau}-1} + \sum_{r=1}^{\tilde{r}_0} \frac{2|\tilde{B}_{2r}|}{e^{\alpha_1\tau}-1} \right\}$$

получим

$$|(\gamma * \varphi)(t)| \leqslant B'' e^{-\alpha_1 t}.$$

Из приведенных оценок вытекает справедливость утверждения леммы.

Нетрудно видеть по построению, что введенная выше обобщенная функция $\mathscr{I}$ является фундаментальным решением оператора A, где

$$A\vec{x} = \sum_{\kappa=1}^{n} A_\kappa \ddot{\vec{x}}(t+\tau_\kappa) + \sum_{\kappa=1}^{n} B_\kappa \dot{\vec{x}}(t+\tau_\kappa) + \sum_{\kappa=1}^{n} C_\kappa \vec{x}(t+\tau_\kappa) \tag{20}$$

с использованием обозначений леммы 2.

Теперь мы имеем возможность доказать заключительное утверждение.

Теорема 3

Пусть оператор A определяется соотношением (20), причем матрицы A_κ удовлетворяют условиям леммы 2, а также (α). Пусть все $\tau_\kappa \geqslant 0$ (последнее продиктовано соображениями удобства, причем можно всегда добиться, чтобы это условие выполнялось). Пусть в уравнении

$$A\vec{x} = \vec{\mathscr{F}}[\vec{x}, t] \tag{21}$$

оператор $\vec{\mathscr{F}}$ удовлетворяет оценкам

$$|\vec{\mathscr{F}}[\vec{x}_1, t] - \vec{\mathscr{F}}[\vec{x}_2, t]| \leqslant L(\Delta) \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|_t^{t+T}$$

при

$$\|\vec{x}_1\|_t^{t+T} \leqslant \Delta, \qquad \|\vec{x}_2\|_t^{t+T} \leqslant \Delta$$

причем $L(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$, $\vec{\mathscr{F}}[0, t] \equiv 0$. Оператор $\vec{\mathscr{F}}$ определен при достаточно малых Δ на $\vec{x} \in C^2$, причем функция $\vec{\mathscr{F}}[\vec{x}, t]$ бесконечно дифференцируема, если это выполняется для $\vec{x}(t)$ и $\vec{\mathscr{F}}[\vec{x}, t]$ полностью определяется значениями $\vec{x}(t')$ при $t' \geqslant t$.

Пусть линейная часть (21), определяемая оператором A, имеет решение

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{ip_0 t}, \qquad \operatorname{Im} p_0 \geqslant \alpha_0 > 0$$

причем первая компонента $x_1(t)$ вектора $\vec{x}(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]$ не обращается тождественно в нуль.

Тогда система (21) имеет (для некоторого t_0) решение $\vec{y}(t) = [y_1(t), \ldots, y_n(t)]$ на $[t_0, \infty)$, для которого $y_1(t) \neq 0$ и

$$|\vec{y}(t)| + |\dot{\vec{y}}(t)| + |\ddot{\vec{y}}(t)| \to 0$$

экспоненциально.

Доказательство: Пусть $\eta(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, причем

$$\eta(t) = \begin{cases} \equiv 1, & t \geqslant 1 \\ \left.\begin{matrix} \leqslant 1 \\ \geqslant 0 \end{matrix}\right\} & t \in [0, 1] \\ \equiv 0 & t \leqslant 0. \end{cases}$$

Рассмотрим вместо (21) систему

$$A\vec{x} = \vec{\mathscr{F}}_0\,[\vec{x}, t] \tag{22}$$

где $\vec{\mathscr{F}}_0[\vec{x}, t] = \eta(t)\,\vec{\mathscr{F}}[\vec{x}, t]$.

Очевидно при $t \geqslant 1$ решение (22) будет решением (21).

Пусть $\mathscr{I}(t)$ — фундаментальное решение оператора A. Строим последовательность

$$\vec{x}_\kappa(t) = \vec{x}_0 e^{ip_0 t} + (\mathscr{I} * \vec{\mathscr{F}}_0[\vec{x}_{\kappa-1}, t])\,(t).$$

Отметим, что в случае необходимости мы можем прийти к действительным выражениям, рассматривая в качестве фундаментального решения функцию $\operatorname{Re} \mathscr{I}(t)$.

Рассмотрим сходимость этой последовательности. При $\kappa = 1$ имеем

$$\vec{x}_1(t) = \vec{x}_0 e^{ip_0 t} + (\mathscr{I} * \vec{\mathscr{F}}_0[\vec{x}_0(t), t])\,(t).$$

В силу свойств $\vec{\mathscr{F}}[\vec{x}, t]$ и результатов леммы 5, имеем

$$\{\vec{x}_1(t) - \vec{x}_0(t)| + |\dot{\vec{x}}_1(t) - \dot{\vec{x}}_0(t)| + |\ddot{\vec{x}}_1(t) - \ddot{\vec{x}}_0(t)| \leqslant 3L(\varDelta)|\vec{x}_0|(1 + |p_0| + |p_0|^2)\,Be^{-\alpha_1 t}$$

где

$$\alpha_1 < \alpha_0 \leqslant \operatorname{Im} p_0.$$

Поскольку оператор A линеен, можно выбрать $|\vec{x}_0|$ сколь угодно малым, например, $|\vec{x}_0| < \varDelta/2$, где $\varDelta$ — такое, что

$$3L(\varDelta)|\vec{x}_0|(1 + |p_0| + |p_0|^2)B \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{|x_0^1|}{2}.$$

Здесь x_0' — первая компонента вектора $\vec{x}_0 = [\vec{x}_0^1, \ldots, x_0^n]$.

Пусть по индукции

$$|\vec{x}_\kappa(t) - \vec{x}_{\kappa-1}(t)| + |\dot{\vec{x}}_\kappa(t) - \dot{\vec{x}}_{\kappa-1}(t)| + |\ddot{\vec{x}}_\kappa(t) - \ddot{\vec{x}}_{\kappa-1}(t)| \leqslant \frac{|x_0^1|}{2 \cdot 2^\kappa}\, e^{-\alpha_1 t}.$$

Тогда нетрудно получить

$$|\vec{x}_{\kappa+1}(t) - \vec{x}_\kappa(t)| + |\dot{\vec{x}}_{\kappa+1}(t) - \dot{\vec{x}}_\kappa(t)| + |\ddot{\vec{x}}_{\kappa+1}(t) - \ddot{\vec{x}}_\kappa(t)| < \frac{|x_0^1|}{2 \cdot 2^{\kappa+1}}\, e^{-\alpha_1 t}.$$

Отсюда видно, что все приближения имеют смысл и $\vec{\mathscr{F}}_0[\vec{x}_\kappa, t]$ при $\forall \kappa$ удовлетворяет условиям, наложенным в лемме 5 на функцию $\varphi(t)$. Таким образом, последовательность $\{\vec{x}_\kappa\}$ сходится в метрике C^2 к некоторой функции $\vec{y}(t) \in C^2_{[0, \infty)}$.

В силу того, что $\mathscr{I}(t)$ — фундаментальное решение оператора A, имеем

$$A\vec{x}_\kappa(t) = \vec{\mathscr{F}}_0[\vec{x}_{\kappa-1}, t].$$

Но тогда

$$A\vec{y} - \vec{\mathscr{F}}_0[\vec{y}, t] - A\vec{x}_\kappa + \vec{\mathscr{F}}_0[\vec{x}_{\kappa-1}, t] \Rightarrow 0, \qquad \kappa \to \infty .$$

Таким образом, мы имеем решение уравнения (22)

$$\vec{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)], \text{ причем } |\vec{y}(t)| \leqslant \Delta e^{-\alpha_1 t}.$$

Кроме того, $y_1(t) \neq 0$, что следует из

$$|y_1(t) - x_0^1(t)| \leqslant |\vec{y}(t) - \vec{x}_0(t)| \leqslant \sum_{\kappa=1}^{\infty} |\vec{x}_\kappa(t) - \vec{x}(t)_{\kappa-1}| \leqslant \frac{|x_0^1|}{2} e^{-\alpha_1 t}.$$

Кроме того, $\vec{y}(t)$ является решением (21) при $t \geqslant 1$. Этим доказательство теоремы завершено.

Пользуясь леммой 1, устанавливаем, что решения системы (I.2.9) или (6) при $A(A+\frac{1}{2})(A+1) \neq 0$ с невозмущенными запаздываниями, соответствующие круговым орбитам при достаточно малых v, орбитально неустойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Жданов, К. Пирагас, *Acta Phys. Polon.*, **B3**, 585 (1972).

[2] A. Staruszkiewicz, *Acta Phys. Polon.*, **33**, 1007 (1968).

[3] В. Брагинский, *УФН*, **86**, 433 (1965).

[4] К. Пирагас, *Препринт ИТФ*-71-114*Р*, Киев 1971.

[5] Л. Эльсгольц, С. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, Москва 1971.

[6] Р. Беллман, К. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, Москва 1967.