

EXPLIZITE FORMELN FÜR DIE
CASIMIROPERATOREN DES SEMIDIREKTEN
PRODUKTES EINER HEISENBERG LIE-ALGEBRA $\mathfrak{h}$
MIT DER EINFACHEN LIE-ALGEBRA $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$
(Explicit Formulae for the Casimir Operators of Semidirect
Products of a Heisenberg Lie Algebra and the Simple Lie
Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$)*

RUTWIG CAMPOAMOR-STURSBURG

Laboratoire de Mathématiques et Applications
Faculté de Sciences et Techniques, Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse, France
e-mail R.Campoamor@uha.fr

(Received February 5, 2004)

Für die perfekten Lie-Algebren $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \overrightarrow{\oplus}_R \mathfrak{h}_m$ wird die Existenz eines Casimiroperators der Ordnung vier bewiesen. Weiter werden explizite Formeln für die nichtzentralen Casimiroperatoren der Algebren in Abhängigkeit der beschreibenden Darstellung R des Produktes gegeben.

PACS numbers: 02.20.Sv

1. Einleitung

Die Beschreibung invarianter Funktionen der koadjungierten Darstellung einer Lie-Algebra ist ein nicht nur im Rahmen der Charakterisierung irreduzibler Darstellungen wichtiges Problem, sondern spielt auch in Anwendungen, wie die allgemeine Strukturtheorie von Lie-Algebren oder das Aufstellen physikalischer Modelle, eine gewisse Rolle [5,9,11]. Wie bekannt, geben die Eigenwerte dieser Invarianten (in der Regel Casimiroperatoren, d.h., Elemente des Zentrums der universellen Einhüllenden Algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$) die Quantenzahlen eines Systems an, und aus ihrer Struktur lassen sich weitere wichtige Eigenschaften herleiten, wie zum Beispiel Energiespektren [7]. Für halbeinfache Lie Algebren ist die Bestimmung des Zentrums $Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ ein vollkommen gelöstes Problem [2,12], und die Casimiroperatoren können unter Verwendung der klassischen Theorie konstruiert werden. Weiter ist die Zahl der (funktional) unabhängigen Casimiroperatoren durch den Rang (d.h., die gemeinsame Dimension der Cartan-Unteralgebren) festgelegt. Für andere

* Diese Arbeit wurde gefördert durch ein Forschungsstipendium der R. Areces Stiftung.

Klassen von Lie-Algebren gibt es keine so gut strukturierte Beschreibung der Invarianten, und im allgemeinen ist ihre Anzahl und Form unbekannt (das ist z.B. für auflösbare Lie-Algebren [3,10] der Fall). Für perfekte Lie-Algebren, d.h., Algebren für die der Isomorphismus $\mathfrak{g} \simeq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ gilt, können einige der Eigenschaften des halbeinfachen Falles verallgemeinert werden. Die Levi-Zerlegung spielt dabei eine wichtige Rolle.

Hier interessieren wir uns für das semidirekte Produkt der einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ und einer Heisenberg-Lie-Algebra

$$\mathfrak{h}_m = \{Y_1, \dots, Y_{2m+1} | [Y_i, Y_{2m+1-i}] = Y_{2m+1}, 1 \leq i \leq m\}.$$

In [4,6] wurden Determinantenformeln für die Casimiroperatoren solcher Lie-Algebren gegeben. In dieser Arbeit zeigen wir, daß dieses Ergebnis wesentlich verbessert werden kann, indem wir eine explizite Formel für die Casimiroperatoren angeben. Speziell wird bewiesen, daß die Ordnung dieser polynomialen Invarianten für alle Dimensionen dieselbe ist.

2. Perfekte Lie-Algebren mit heisenbergschem Radikal

Wir erinnern kurz an die Methode, die meistens in der Literatur vorkommt, um die Invarianten einer Lie-Algebra zu bestimmen [8]. Ist $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ und sind $\{C_{ij}^k\}$ die Strukturkonstanten von $\mathfrak{g}$, dann läßt sich die Algebra durch Differentialoperatoren (im Raum $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$) folgendermaßen darstellen:

$$\hat{X}_i = -C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1)$$

wobei $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$ ($1 \leq i < j \leq n$) ist und $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Dualbasis von B darstellt. Eine Funktion $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ nennt man invariant, wenn das System von Differentialgleichungen

$$\{\hat{X}_i F = 0, 1 \leq i \leq n\}, \quad (2)$$

erfüllt ist. Polynomiale Lösungen sind, nach Symmetrisierung ihrer Komponenten, Casimiroperatoren der Lie-Algebra (deshalb werden wir auch im Folgenden solche Lösungen einfach als Casimiroperatoren oder -invarianten bezeichnen). Offenbar kann das System andere, nicht polynomiale Lösungen haben. Diese nennt man in der Regel verallgemeinerte Casimirinvarianten von $\mathfrak{g}$. Aus der klassischen Theorie partieller Differentialgleichungen folgt sofort, daß die Anzahl funktional unabhängiger Lösungen von (2) durch die Formel

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) := \dim \mathfrak{g} - \sup_{x_1, \dots, x_n} \left\{ \text{Rang} \left(C_{ij}^k x_k \right)_{1 \leq i < j \leq \dim \mathfrak{g}} \right\}, \quad (3)$$

gegeben ist, wobei $A(\mathfrak{g}) := (C_{ij}^k x_k)$ die Kommutatoren-Matrix von $\mathfrak{g}$ (in Bezug auf die Basis $\{X_1, \dots, X_n\}$) ist [1]. Ist die Lie-Algebra perfekt (speziell halbeinfach), so kann man zeigen, daß (3) die Anzahl der unabhängigen Casimiroperatoren angibt.

Für jedes $j \in \frac{\mathbb{N}}{2}$ werden $(2j+1)$ -dimensionale irreduzible Darstellungen der Lie-Algebra $A_1 = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ durch $\{2j\}$ bezeichnet, wobei $2j \in \mathbb{Z}$ das höchste Gewicht der Darstellung ist. Offenbar läßt sich nicht jede Darstellung von A_1 mit einer Heisenberg-Algebra derart kombinieren, daß das Ergebnis eine unzerlegbare Lie-Algebra ist. Die Gestalt der beschreibenden Darstellung R der Levi-Zerlegung $\mathfrak{s} \oplus_R \mathfrak{h}_m$ wird von der Struktur des Radikal beeinflusst. Da das Radikal nicht abelsch ist, kann die Darstellung R im besonderen nicht irreduzibel sein [13]. In [6] wurden die Darstellungen von A_1 bestimmt, die mit einer Heisenberg-Algebra vereinbar sind¹.

Lemma 1 *Sei $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_R \mathfrak{r}$ eine perfekte Lie-Algebra mit eindimensionalem Zentrum. Ist das Radikal $\mathfrak{r}$ zu einer Heisenberg-Lie-Algebra isomorph, dann hat die Darstellung R folgende Form:*

$$R = \sum_{i=1}^p (\{2l_i\} \oplus \{2l_i\}) \oplus \sum_{l=1}^q \{2k_l + 1\} \oplus \{0\}, \quad (4)$$

$(l_i, k_l \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

Bemerkung 1 *Darstellungen, die mehr als eine Kopie der trivialen Darstellung $\{0\}$ von A_1 erhalten, sind eigentlich nicht von großem Interesse, da sie einerseits eine direkte Folge des Falles $R = \sum_{i=1}^p (\{2l_i\} \oplus \{2l_i\}) \oplus \sum_{l=1}^q \{2k_l + 1\} \oplus \{0\}$ sind, und weiter weil sie keine perfekte Lie-Algebra erzeugen können.*

3. Bestimmung der Casimiroperatoren

Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_R \mathfrak{h}_m$ für $m \geq 1$ gegeben, kann man immer eine Basis $\{X_1, \dots, X_{2m+4}\}$ finden, so daß $\{X_1, X_2, X_3\}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ist, $\{X_4, \dots, X_{2m+4}\}$ eine Basis von $\mathfrak{h}_m$ ist, und das Zentrum von X_{2m+4} erzeugt wird. Weiter kann man annehmen, daß die Elemente $\{X_4, \dots, X_{2m+4}\}$ so angeordnet sind, daß die einzigen nicht trivialen Klammern des Radikals folgende sind:

$$[X_{3+k}, X_{2m+4-k}] = \lambda_k X_{2m+4}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

¹ In der Tat läßt sich das Problem der heisenbergschen Radikale ganz allgemein im Rahmen der Darstellungstheorie lösen, ohne auf spezifische Levi-Unteralgebren eingehen zu müssen

wobei $\lambda_k \neq 0$ für alle k gilt. Es genügt, diese Strukturkonstanten für die Darstellungen $R = \{2j\} \oplus \{0\}$ ($j \in \frac{2\mathbb{N}+1}{2}$) und $R = 2\{2l\} \oplus \{0\}$ ($l \in \mathbb{N}$) zu finden, um den generischen Fall zu beschreiben [6]. Die Werte dieser Konstanten sind in der Tabelle I angegeben.

TABELLE I

Strukturkonstanten des Radikals, wobei $\Gamma(z)$ die Gammafunktion bezeichnet.

Darstellung R	Koeffizienten λ_k	
$\{2l+1\} \oplus \{0\}$	$\frac{(2l+1)\Gamma(2l+1)(-1)^{k+1}}{\Gamma(k)\Gamma(2l+3-k)}$	$1 \leq k \leq l+1$
$2\{2l\} \oplus \{0\}$	$\frac{(-1)^{k+1}(2l)!}{\Gamma(k)\Gamma(2l+2-k)}$	$1 \leq k \leq 2l+1$

Lemma 2 Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_{\vec{R}} \mathfrak{h}_m$ eine perfekte Lie-Algebra. Dann besitzt $\mathfrak{g}$ genau zwei funktional unabhängige Casimiroperatoren, d.h.,

$$\mathcal{N}(\vec{\mathfrak{s}} \oplus_{\vec{R}} \mathfrak{h}_m) = 2.$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem System (2). Weiter sei bemerkt, daß eines der Casimiroperatoren von $\mathfrak{g}$ selbstverständlich die Erzeugende X_{2m+4} des Zentrums ist. Damit genügt es, eine Lösung C von (2) zu finden, die von X_{2m+4} unabhängig ist. Trotz dieser Tatsache ist das Lösen von (2) nicht trivial, da insbesondere C folgende Eigenschaft besitzt:

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} \neq 0, \quad 1 \leq i \leq 2m+4, \quad (5)$$

d.h., C hängt von allen Variablen $\{x_1, \dots, x_{2m+4}\}$ ab, einschließlich der Zentrumserzeugenden.

Eine Verallgemeinerung der Determinantenformeln von [4] wurde in [6] entwickelt, um eine Determinantenformel für den Operator C zu erhalten:

Satz 1 Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_{\vec{R}} \mathfrak{h}_m$ eine perfekte Lie-Algebra. Dann ist der Casimiroperator C , der nicht im Zentrum von $\mathfrak{g}$ liegt, durch die Formel

$$C = \sqrt{\left| \begin{pmatrix} & & & & x_1 \\ & & & & x_2 \\ & & & & x_3 \\ & & (C_{ij}^k x_k) & & \frac{1}{2}x_4 \\ & & & & \vdots \\ & & & & \frac{1}{2}x_{\dim \mathfrak{g}-1} \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & \dots & -\frac{1}{2}x_{\dim \mathfrak{g}-1} & 0 \end{pmatrix} \right|} \quad (6)$$

gegeben.

Damit erhalten wir als Casimiroperator ein Polynom der Ordnung $\frac{1}{2} \dim \mathfrak{g}$. Gezieltes Testen für Dimensionen $n \leq 10$ zeigt, daß die Determinante (6) das Produkt einer Potenz der Zentrumserzeugenden und eines irreduziblen Polynoms ist. Es liegt damit die Annahme nahe, daß diese Tatsache für beliebige Dimensionen gelten kann. Wir benötigen dazu ein kleines technisches Lemma, dessen Beweis sich durch Anwendung der Laplaceformeln für die Entwicklung von Determinanten, Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$ und die Unterscheidung der Fälle $R = \{2m+1\} \oplus \{0\}$ und $R = 2\{2l\} \oplus \{0\}$ ergibt.

Lemma 3 Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_R \mathfrak{h}_m$ ($m \geq 1$) perfekt. Weiter sei

$$P = \sum a_{i_1, i_2, i_3, j_1, \dots, j_{2m+3}} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{j_1} \dots x_{2m+4}^{j_{2m+1}}$$

der nichtzentrale Casimiroperator von $\mathfrak{g}$. Dann gilt $i_1 + i_2 + i_3 = j_{2m+1}$ für alle Summanden.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses erhalten wir einen nützlichen Ansatz zur Integration des zugehörigen Systems (2), wie im folgenden Satz bewiesen wird.

Satz 2 Sei $m \geq 2$ und $R = \{2m+1\} \oplus \{0\}$ oder $R = 2\{2l\} \oplus \{0\}$. Dann besitzt die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_R \mathfrak{h}_m$ einen Casimiroperator der Ordnung vier.

Beweis. Wir beweisen die Aussage für die Darstellungen $R = \{2m+1\} \oplus \{0\}$ (für $R = 2\{2l\} \oplus \{0\}$ ist das Argument völlig analog). Sei $R = \{2m+1\} \oplus \{0\}$. Dann lautet das zugehörige System (2):

$$\hat{X}_1 F = 2x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - 2x_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} + \sum_{j=1}^{2m+2} (2m+3-2j) x_{3+j} \frac{\partial F}{\partial x_{3+j}} = 0, \quad (7)$$

$$\hat{X}_2 F = -2x_2 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_3} + \sum_{j=2}^{2m+2} (2m+3-j) x_{2+j} \frac{\partial F}{\partial x_{3+j}} = 0, \quad (8)$$

$$\hat{X}_3 F = 2x_3 \frac{\partial F}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \sum_{j=1}^{2m+1} j x_{4+j} \frac{\partial F}{\partial x_{3+j}} = 0, \quad (9)$$

$$\hat{X}_4 F = -(2m+1) x_4 \frac{\partial F}{\partial x_1} - x_5 \frac{\partial F}{\partial x_3} + \lambda_1 x_{2m+6} \frac{\partial F}{\partial x_{2m+5}} = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{3+j}F &= (2j-3-2m)x_{3+j}\frac{\partial F}{\partial x_1} - (2m+3-j)x_{2+j}\frac{\partial F}{\partial x_2} \\ &\quad - jx_{4+j}\frac{\partial F}{\partial x_3} + x_{2m+6}\frac{\lambda_j\partial F}{\partial x_{2m+6-j}} = 0,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\widehat{X}_{2m+5}F = (2m+1)x_{2m+5}\frac{\partial F}{\partial x_1} - x_{2m+4}\frac{\partial F}{\partial x_2} - \lambda_1x_{2m+6}\frac{\partial F}{\partial x_4} = 0, \quad (12)$$

wobei $2 \leq j \leq 2m+4$ ist.

Wir führen folgende Polynome ein:

$$P_1 = x_1x_{2m+6} + \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(2m+3-2j)}{\lambda_j} x_{3+j}x_{2m+6-j}, \quad (13)$$

$$P_2 = 2x_2x_{2m+6} - 2\sum_{j=1}^m \frac{j}{\lambda_j} x_{3+j}x_{2m+5-j} - \frac{(m+1)}{\lambda_{m+1}} x_{m+4}^2, \quad (14)$$

$$P_3 = 2x_3x_{2m+6} + 2\sum_{j=1}^m \frac{j}{\lambda_j} x_{4+j}x_{2m+6-j} + \frac{(m+1)}{\lambda_{m+1}} x_{m+5}^2. \quad (15)$$

Wir bemerken, daß diese Polynome die Bedingung aus Lemma 3 erfüllen. Weiter definieren wir $P_4 = P_1^2 + P_2P_3$. Es ist leicht nachzuweisen, daß für die Ableitungen von P_4 folgende Regeln gelten:

$$\frac{\partial P_4}{\partial x_1} = 2x_1x_{2m+6}^2 + 2x_{2m+6}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{(2m+3-j)}{\lambda_j} x_{3+j}x_{2m+6-j}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial P_4}{\partial x_2} = 2x_{2m+6}P_3, \quad (17)$$

$$\frac{\partial P_4}{\partial x_3} = 2x_{2m+6}P_2, \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_4}{\partial x_{2m+6-j}} &= \frac{2j}{\lambda_j} x_{4+j}P_2 + \frac{2(2m+3-j)}{\lambda_j} x_{3+j}(x_{3+j}+x_1)x_{2m+6-j} \\ &\quad + \frac{2(2m+3-j)}{\lambda_j} x_{3+j}\sum_{k \neq j} \frac{(2m+3-k)}{\lambda_k} x_{3+k}x_{2m+6-k} \\ &\quad - \frac{2(j-1)}{\lambda_{j-1}} x_{2+j}P_3.\end{aligned}\quad (19)$$

Wird P_4 in die Gleichungen (11) eingesetzt, so verschwindet alles identisch, bis auf den Summanden

$$\widehat{X}_jP_4 = -2\left((2m+3-j) + \frac{(j-1)\lambda_j}{\lambda_{j-1}}\right)x_{2+j}x_{2m+6}P_3. \quad (20)$$

Werden nun die Koeffizienten λ_j aus der Tabelle I eingesetzt, so erhalten wir

$$(2m+3-j) + \frac{(j-1)\Gamma(j-1)\Gamma(2m+4-j)(-1)}{\Gamma(j)\Gamma(2m+3-j)} = 0. \quad (21)$$

Für die restlichen Gleichungen erweist sich P_4 ebenfalls als eine Lösung, woraus die Behauptung folgt, daß P_4 ein Casimiroperator vierter Ordnung von $\mathfrak{g}$ ist.

Für die Darstellung $R = 2\{2l\} \oplus \{0\}$ ist die Prozedur völlig analog, wobei wir die Polynome

$$P_1 = x_1 x_{2l+6} + \sum_{k=1}^{2l+1} \frac{(2l+2-2k)}{\lambda_k} x_{3+k} x_{4l+6-k}, \quad (22)$$

$$P_2 = 2x_2 x_{2l+6} - 2 \sum_{k=1}^{2l} \frac{k}{\lambda_k} x_{3+k} x_{4l+5-k}, \quad (23)$$

$$P_3 = 2x_3 x_{2l+6} + 2 \sum_{k=1}^{2l} \frac{k}{\lambda_k} x_{4+k} x_{4l+6-k}, \quad (24)$$

eingeführen. Weiter sind die Strukturkonstanten des Radikals

$$\lambda_k = (-1)^{k+1} \frac{(2l)!}{\Gamma(k)\Gamma(2l+2-k)}. \quad (25)$$

Einsetzen in das zugehörige System ergibt, daß $P_4 = P_1^2 + P_2 P_3$ eine Lösung ist. Bemerkt sei, daß für P_2 und P_3 im Unterschied zu (13)–(15) keine Quadrate einer Variablen auftreten. Diese Tatsache hat damit zu tun, daß hier zwei unabhängige Kopien einer irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ mit höchstem Gewicht $2l$ vorkommen. ■

Aus **Satz 1** folgt die explizite Formel für die Darstellung $R = \sum_{q=1}^k \{2m_q + 1\} \oplus \sum_{q=k+1}^{k+p} (\{2l_q\} \oplus \{2l_q\}) \oplus \{0\}$. In diesem Fall ist das Radikal eine Heisenberg-Lie-Algebra der Dimension $2t + 1$, wobei

$$t = \sum_{j=1}^k m_k + \sum_{j=1}^p l_q + \frac{k+p}{2}$$

ist. Um die Schreibweise zu vereinfachen, wollen wir annehmen, daß für jedes $1 \leq q \leq k$ die Menge $\{Y_1^q, \dots, Y_{2m_q+1}^q\}$ eine Basis des Moduls $\{2m_q + 1\}$ darstellt, und für jedes $1 \leq q \leq p$ die Menge $\{Y_1^{k+q}, \dots, Y_{4l_q+2}^{k+p}\}$ eine Basis von $(\{2l_q\} \oplus \{2l_q\})$ ist. Weiter sei X_z die Erzeugende des Zentrums, und für

jedes $Y_m^l \in \mathfrak{h}_t$ sei $[X_1, Y_m^l] = \mu_k^l Y_m^l$, wobei $\mu_k^l \in \mathbb{C}$ der zugehörige Eigenwert ist. Die Struktur der Darstellung (und $\mathfrak{h}_t$) implizieren, daß die einzigen von Null verschiedenen Klammern des Radikals folgende sind:

$$\begin{aligned} [Y_j^q, Y_{2m_q+2-j}^q] &= \lambda_{j,2m_q+2-j}^q X_z, \quad 1 \leq j \leq 1+m_q, \quad 1 \leq q \leq k, \\ [Y_j^{k+q}, Y_{4l_q+3-j}^{k+q}] &= \lambda_{j,4l_q+3-j}^q X_z, \quad 1 \leq j \leq 2l_q+1, \quad 1 \leq q \leq k. \end{aligned}$$

Die Formel für den nichtzentralen Casimiroperator erhalten wir dann durch wiederholte Anwendung von **Satz 4**:

Korollar 1 Für $k, p \geq 1$ ist der nichtzentrale Casimiroperator C der perfekten Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \oplus_R \mathfrak{h}_t$ mit $R = \sum_{q=1}^k \{2m_q+1\} \oplus \sum_{q=k+1}^{k+p} \{2l_q\} \oplus \{2l_q\} \oplus \{0\}$ durch $C = P_1 + 4P_2P_3$ gegeben, wobei die Polynome P_i durch

$$\begin{aligned} P_1 &= x_1x_z + \sum_{q=1}^k \sum_{j=1}^{m_q+1} \frac{\mu_j^q}{\lambda_{j,2m_q+2-j}^q} y_j^q y_{2m+2-j}^q \\ &\quad - \sum_{q=1}^p \sum_{j=1}^{2l_q+1} \frac{\mu_j^{k+q}}{\lambda_{j,4l_q+3-j}^q} y_j^{k+q} y_{4l_q+3-j}^{k+q}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= x_2x_z - \sum_{q=1}^k \sum_{j=1}^{m_q} \frac{jy_j^q y_{2m_q+1-j}^q}{\lambda_{j,2m_q+2-j}^q} - \frac{(m_q+1)}{\lambda_{m_q,m_q+1}^q} (y_{m_q}^q)^2 \\ &\quad - \sum_{q=1}^p \sum_{j=1}^{2l_q+1} \frac{jy_j^{k+q} y_{4l_q+2-j}^{k+q}}{\lambda_{j,4l_q+3-j}^q}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} P_3 &= x_3x_z + \sum_{q=1}^k \sum_{j=1}^{m_q} \frac{jy_{j+1}^q y_{2m_q+2-j}^q}{\lambda_{j,2m_q+2-j}^q} + \frac{(m_q+1)}{\lambda_{m_q,m_q+1}^q} (y_{m_q}^q)^2 \\ &\quad + \sum_{q=1}^p \sum_{j=1}^{2l_q+1} \frac{jy_{j+1}^{k+q} y_{4l_q+3-j}^{k+q}}{\lambda_{j,4l_q+3-j}^q} \end{aligned} \quad (28)$$

definiert werden.

Als weitere Folge erhalten wir die Verallgemeinerung der Determinantenzerlegung, die in niedriger Dimension beobachtet wurde.

Korollar 2 Für $\dim R \geq 4$ ist die (positive) Wurzel der Determinante (6) das Produkt von P_4 und einer Potenz der Zentrumserzeugenden I .

Bemerkung 2 Enthält R mehrere Kopien der trivialen Darstellung $\{0\}$ von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, d. h., ist zum Beispiel $R = R' \oplus \{0\} \oplus (2k \{0\})$, wobei R' keine weiteren Kopien von $\{0\}$ enthält, und ist $\{Y_1, \dots, Y_{2k}\}$ eine Basis von $2k \{0\}$, so folgt aus der Struktur des Radikals, daß für jede Lösung von (2) folgende Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq 2k$$

Damit sind diese Variablen für das Finden der Casimirooperatoren unwesentlich, und die reduzierte Darstellung $R = R' \oplus \{0\}$ genügt, um die Casimir-invarianten der Algebra zu berechnen.

LITERATUR

- [1] E.G. Beltrametti, A. Blasi, *Phys. Lett.* **20**, 62 (1966).
- [2] H. Casimir, *Proc. Roy. Acad. Amsterdam* **34**, 844 (1931).
- [3] R. Campoamor-Stursberg, *J. Math. Phys.* **43**, 771 (2003).
- [4] R. Campoamor-Stursberg, *Phys. Lett.* **A312**, 211 (2003).
- [5] R. Campoamor-Stursberg, *Acta Phys. Pol. B* **34**, 3901 (2003).
- [6] R. Campoamor-Stursberg, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 3627 (2004).
- [7] M.J. Englefield, *Group Theory and the Coulomb Problem*, Wiley-Interscience, New York 1972.
- [8] A.T. Fomenko, V.V. Trofimov, *Integrable Systems on Lie Algebras and Symmetric Spaces. Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, Gordon and Breach Science Publishers, New York 1988.
- [9] A. Klein, E.R. Marshalek, *Rev. Mod. Phys.* **63**, 375 (1991).
- [10] J.P. Ndogmo, *Canad. Math. Bull.* **43**, 459 (2000).
- [11] W. Pfeifer, *The Lie Algebras $su(N)$. An Introduction*, Birkhäuser Verlag, Basel 2003.
- [12] G. Racah, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **8**, 108 (1950).
- [13] P. Turkowski, *Linear Algebra Appl.* **171**, 197 (1992).