

ÜBER DIE STRUKTUR DER DARSTELLUNGEN
HALBEINFACHER LIE-ALGEBREN, DIE MIT EINER
HEISENBERG-ALGEBRA VERTRÄGLICH SIND*
(On the Structure of Representations of Semisimple
Lie Algebras Which Are Compatible With a Heisenberg
Algebra)

RUTWIG CAMPOAMOR-STURBERG

Dpto. Geometría y Topología, Fac. CC. Matemáticas, Universidad Complutense
Plaza de Ciencias 3, 28040 Madrid, Spain
rutwig@mat.ucm.es

(Received June 6, 2005)

Wir charakterisieren die Darstellungen Γ einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$, die mit einer $(2N + 1)$ -dimensionalen Heisenberg-Algebra $\mathfrak{h}_N$ verträglich sind, d.h., für die es eine unzerlegbare Lie-Algebra mit der Levi-Zerlegung $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Gamma} \mathfrak{h}_N$ gibt. Besonders wird die enge Beziehung zwischen solchen irreduziblen selbstadjungierten Darstellungen und die Klassifikation reeller Darstellungen einer Lie-Algebra beobachtet. Weiter wird die Anzahl der Casimiroperatoren der Algebren $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Gamma} \mathfrak{h}_N$ sowie etlicher ihrer inhomogenen Kontraktionen analysiert, und es werden verbesserte Schranken für die Invariantenzahl der Lie-Algebren $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Gamma} \dim \Gamma L_1$ mit abelschem Radikal erhalten. Die Struktur verträglicher Darstellungen wird im letzten Teil auf die Theorie induzierter Darstellungen angewandt.

PACS numbers: 02.20.Qs, 02.20.Sv

1. Einleitung

In etlichen Problemstellungen der Geometrie, der Darstellungstheorie und der Physik, sind die zu beschreibenden relevanten Strukturen semidirekte Produkte $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R \mathfrak{r}$ einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$ und einer auflösbaren Lie-Algebra $\mathfrak{r}$, wobei die Beziehung zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r}$ von der Darstellung R beschrieben wird. In der Theorie Hamiltonscher Systeme, der Eulerschen Gleichungen von Lie-Gruppen oder für Differentialgleichungen werden diese Produkte häufig benutzt [1–5]. Die Kontraktionen zwischen

* Diese Arbeit wurde gefördert durch das Forschungsprojekt PR1/05-13283 der U.C.M.

solchen Algebren bilden einen wichtigen Anhaltspunkt, um Phasenänderungen bestimmter physikalischer Systeme zu untersuchen. Der Fall, wo $\mathfrak{t}$ zu einer Heisenberg-Algebra isomorph ist, ist von besonderer Wichtigkeit, da diese Algebren in natürlicher Weise im Operatorenformalismus der Quantenmechanik erscheinen. In der Physik (Nuklear- und Elementarteilchenphysik) treten Heisenberg-Algebren in Verbindung mit unitären Algebren auf, was wichtige Folgen für das Aufstellen der Symmetrie-Modelle im mikroskopischen Bereich hat.

In dieser Arbeit bestimmen wir die Form jener Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren $\mathfrak{s}$, die semidirekte Produkte von $\mathfrak{s}$ und einer Heisenberg-Lie-Algebra beschreiben. Solche Darstellungen werden wir verträglich nennen. Es genügt, den komplexen Fall zu untersuchen, da die Aussage für die reellen Formen sofort aus der Strukturtheorie reeller Darstellungen reeller halbeinfacher Lie-Algebren folgt. Weiter werden wir die Zahl der Invarianten der koadjungierten Darstellung berechnen, so wie einige Folgen für die Kontraktionen von Lie-Algebren, besonders für nicht-auflösbare Algebren mit abelschem Radikal. Im letzten Abschnitt entwickeln wir einige Anwendungen verträglicher Darstellungen auf die Verzweigungsregeln in Bezug auf Unteralgebren. Der wichtige Fall $\mathfrak{su}(5) \hookrightarrow \mathfrak{su}(6)$ wird als Musterbeispiel untersucht.

Jede Lie-Algebra in dieser Arbeit ist von endlicher Dimension über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Weiter bezeichnen wir eine Lie-Algebra als unzerlegbar, wenn sie sich nicht als direkte Summe echter Ideale schreiben läßt.

2. Allgemeines. Invariantenformel

Um die Invarianten einer Lie-Algebra zu erhalten, benutzen wir die analytische Methode. Ist $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ eine Basis der Algebra $\mathfrak{g}$ und ist $\{C_{ij}^k\}$ der Strukturtenor von $\mathfrak{g}$, dann definieren die Differentialoperatoren (im Raum $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$):

$$\hat{X}_i = -C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1)$$

eine Darstellung von $\mathfrak{g}$, wobei $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$ ($1 \leq i < j \leq n$) ist und $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Dualbasis von B darstellt. Eine Funktion $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ ist dann invariant, wenn das System von Differentialgleichungen

$$\left\{ \hat{X}_i F = 0, \quad 1 \leq i \leq n \right\}. \quad (2)$$

erfüllt ist (siehe z.B. [2]). Polynomiale Lösungen sind, nach Symmetrisierung ihrer Komponenten, Casimiroperatoren der Lie-Algebra [6]. Nicht-polynomiale Lösungen nennt man in der Regel verallgemeinerte Casimir-Invarianten

von $\mathfrak{g}$. Die Anzahl funktional unabhängiger Lösungen von (2) ist durch die Formel

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) := \dim \mathfrak{g} - \text{Rang} \left(C_{ij}^k x_k \right)_{1 \leq i < j \leq \dim \mathfrak{g}}, \quad (3)$$

gegeben, wobei $A(\mathfrak{g}) := \left(C_{ij}^k x_k \right)$ die Kommutatoren-Matrix von $\mathfrak{g}$ ist. Diese Formel läßt sich mit Hilfe der Maurer–Cartan-Gleichungen der Algebra bequem reformulieren: Zu diesem Zweck identifizieren wir den Dualraum $\mathfrak{g}^*$ mit den links-invarianten Pfaffschen-Formen einer Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann läßt sich folgender Operator d auf $\mathfrak{g}^*$ definieren:

$$d\omega(X_i, X_j) = -C_{ij}^k \omega(X_k), \quad \omega \in \mathfrak{g}^*. \quad (4)$$

Die Lie-Algebra läßt sich dann als ein System von 2-Formen

$$d\omega_k = -C_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j, \quad 1 \leq i < j \leq \dim(\mathfrak{g}), \quad (5)$$

schreiben, welche die Maurer–Cartan-Gleichungen von $\mathfrak{g}$ heißen.

Sei $\mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R} \{d\omega_i\}_{1 \leq i \leq \dim \mathfrak{g}}$ der lineare Unterraum von $\bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$, der von den 2-Formen $d\omega_i$ erzeugt wird. Ist $\omega = a^i d\omega_i$ ($a^i \in \mathbb{R}$) ein generisches Element in $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, so gibt es ein $j_0(\omega) \in \mathbb{N}$, so daß

$$\bigwedge_{j_0(\omega)} \omega \neq 0, \quad \bigwedge_{j_0(\omega)+1} \omega \equiv 0. \quad (6)$$

Daraus folgt, daß $r(\omega) = 2j_0(\omega)$ der Rang der 2-Form ω ist. Sei

$$j_0(\mathfrak{g}) = \max \{j_0(\omega) \mid \omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})\}. \quad (7)$$

Die Zahl $j_0(\mathfrak{g})$ hängt nicht von der Wahl der Basis ab, und definiert damit eine numerische Invariante der Isomorphieklasse von $\mathfrak{g}$ [7]. Folgender Satz erklärt die enge Beziehung zwischen $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ und $j_0(\mathfrak{g})$:

Proposition 1 [7] *Für jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gilt die Identität*

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} - 2j_0(\mathfrak{g}). \quad (8)$$

Dieser Satz zeigt weiter, daß der Rang der Matrix $A(\mathfrak{g})$ nicht von der gewählten Basis abhängt.

3. $\mathfrak{h}_N$ -verträgliche Darstellungen

In diesem Abschnitt erhalten wir eine Charakterisierung jener Darstellungen einer halbeinfachen Lie-Algebra, welche in den Produkten der Form $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus_{\Gamma \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N$ vorkommen, wobei $\mathfrak{h}_N$ eine $(2N+1)$ -dimensionale Heisenberg-Algebra ist.

Definition 1 Eine nicht-triviale Darstellung Γ der Dimension $2N$ einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$ heißt mit der $(2N+1)$ -dimensionalen Heisenberg-Lie-Algebra $\mathfrak{h}_N$ verträglich (oder einfach $\mathfrak{h}_N$ -verträglich), wenn es eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit der Levi-Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Gamma \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N \quad (9)$$

gibt, wobei Γ_0 die triviale Darstellung ist.

Sei $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R \mathfrak{h}$ eine nicht-auflösbare Lie-Algebra mit heisenbergschem Radikal $\mathfrak{h}$. Weiter sei $V = \mathfrak{h}/Z(\mathfrak{h})$. Offenbar erhält V die Struktur eines $\mathfrak{s}$ -Moduls. Sei W sei eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{s}$. Wir nennen W eine Konstituente des $\mathfrak{s}$ -Moduls V , wenn in der Zerlegung $V = \bigoplus W_i^1$ mindestens ein Summand W_i zu W isomorph ist. Weiter sei $\text{mult}_V(W)$ die Multiplizität von W in V .

Folgender Satz charakterisiert die $\mathfrak{h}_N$ -verträglichen Darstellungen für den komplexen Fall:

Satz 1 Ist W eine Konstituente der Darstellung V , dann ist $\text{mult}_V(W) = \text{mult}_V(W^*)$. Ist weiter W selbstadjungiert, so ist die Multiplizität $\text{mult}_V(W)$ gerade, außer im Fall, wo das Produkt $W \wedge W$ die triviale Darstellung Γ_0 als Untermodul besitzt.

Beweis. $\mathfrak{h}$ ist eine Heisenberg-Algebra, und damit ist die antisymmetrische bilineare Abbildung

$$f : V \wedge V \rightarrow Z(\mathfrak{h}) \quad (10)$$

nicht entartet². Weiter definiert sie einen Morphismus von $\mathfrak{s}$ -Moduln. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach $\dim V$. Sei W eine Konstituente von V . Dann ist auch der Raum $W^\perp = \{v \in V \mid f(v, w) = 0 \quad \forall w \in W\}$ ein $\mathfrak{s}$ -Untermodul von V . Zwei Fälle müssen unterschieden werden:

1. Sei $W \subsetneq W^\perp$. Da W irreduzibel ist, muß der Schnitt $W \cap W^\perp$ Null sein, und aus der nicht-Entartung von f folgt, daß $V = W \oplus W^\perp$ gilt. Dann ist der induzierte Morphismus

$$f|_W : W \wedge W \rightarrow Z(\mathfrak{h}) \quad (11)$$

ebenfalls nicht entartet, und speziell muß die Dimension von W eine gerade Zahl sein. Man kann leicht aus dieser Tatsache zeigen, daß W eine selbstadjungierte Darstellung ist.

¹ Als direkte Summe irreduzibler Darstellungen von $\mathfrak{s}$.

² Man kann offenbar die nichtzentralen Erzeugenden mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren identifizieren, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

2. Sei $W \subseteq W^\perp$. In diesem Fall induziert f einen nicht-entarteten $\mathfrak{s}$ -Morphismus

$$\tilde{f} : W \otimes (V/W^\perp) \rightarrow Z(\mathfrak{h}), \quad (12)$$

woraus der Isomorphismus $(V/W^\perp) \simeq W^*$ folgt. Sei nun U ein Komplementärraum von $W^\perp$ in V , d.h., $U \oplus W^\perp = V$. Aus (12) folgt $U \simeq W^*$, und wegen der nicht-Entartung von $\tilde{f}$ folgt die nicht-Entartung der Abbildung

$$f^* : W \otimes U \rightarrow Z(\mathfrak{h}). \quad (13)$$

Damit ist auch der Schnitt $(W \oplus U) \oplus (W \oplus U)^\perp$ gleich Null. V ist also die direkte Summe dieser Räume, d.h., $V = (W \oplus U) \oplus (W \oplus U)^\perp$. Ist W selbstadjungiert, so ergibt sich, daß die Multiplizität von W gerade ist, und im allgemeinen Fall, daß $\text{mult}_V(W) = \text{mult}_V(W^*)$. Für die restlichen Konstituenten folgt die Behauptung aus der Induktionsannahme auf $(W \oplus U)^\perp$.

■

Korollar 1 Sei $\hat{\mathfrak{s}}$ eine reelle Form der komplexen halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$ und sei R eine reelle Darstellung von $\hat{\mathfrak{s}}$. Ist R eine $\mathfrak{h}_N$ -verträgliche Darstellung von $\hat{\mathfrak{s}}$, dann ist $R \otimes \mathbb{C}$ eine $\mathfrak{h}_N$ -verträgliche Darstellung von $\mathfrak{s}$.

Der Beweis dieser Aussage folgt unmittelbar aus der allgemeinen Theorie irreduzibler reeller Darstellungen reeller halbeinfacher Lie-Algebren (siehe z.B. [8]).

Beispiel 1 Sei $L_{7,2}$ die 7-dimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3) \overrightarrow{\oplus}_{R_4^{II}} 4L_1$, wobei R_4^{II} die vierdimensionale reelle irreduzible Darstellung von $\mathfrak{so}(3)$ ist. Auf einer Basis $\{\omega_1, \dots, \omega_7\}$ sind die Maurer–Cartan-Gleichungen der Algebra durch:

$$d\omega_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j \wedge \omega_k, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3, \quad (14)$$

$$d\omega_4 = -\frac{1}{2}(\omega_1 \wedge \omega_7 + \omega_2 \wedge \omega_5 + \omega_3 \wedge \omega_6), \quad (15)$$

$$d\omega_5 = -\frac{1}{2}(\omega_1 \wedge \omega_6 - \omega_2 \wedge \omega_4 - \omega_3 \wedge \omega_7), \quad (16)$$

$$d\omega_6 = \frac{1}{2}(\omega_1 \wedge \omega_5 - \omega_2 \wedge \omega_7 + \omega_3 \wedge \omega_4), \quad (17)$$

$$d\omega_7 = \frac{1}{2}(\omega_1 \wedge \omega_4 + \omega_2 \wedge \omega_6 - \omega_3 \wedge \omega_5), \quad (18)$$

gegeben. Wird eine neue 2-Form

$$d\omega_8 = \omega_4 \wedge \omega_5 - \omega_6 \wedge \omega_7 \quad (19)$$

hinzugefügt, so läßt sich leicht zeigen, daß $\{d\omega_1, \dots, d\omega_8\}$ die Maurer–Cartan-Gleichungen einer acht-dimensionalen Lie-Algebra mit der Levi-Zerlegung

$$\mathfrak{so}(3) \xrightarrow{\oplus} R_4^{II} \oplus_{\Gamma_0} \mathfrak{h}_2 \quad (20)$$

sind. Das zeigt, daß die Darstellung R_4^{II} verträglich ist. Da R_4^{II} eine Darstellung zweiter Klasse ist, folgt sofort, daß $R_4^{II} \otimes \mathbb{C}$ reduzibel ist [8].

Wie bekannt, enthält das Tensorprodukt $W \otimes W$ einer selbstadjungierten irreduziblen Darstellung W genau eine Kopie der trivialen Darstellung, die entweder zum symmetrischen Teil $Sym^2(W)$ oder zum antisymmetrischen Teil $\bigwedge^2(W)$ gehört [1]. Satz 1 zeigt weiter, daß die selbstadjungierten irreduziblen Darstellungen einer komplexen einfachen Lie-Algebra, die $\mathfrak{h}_N$ -verträglich sind, genau die symplektischen Darstellungen sind [1]. In Tabelle I sind die $\mathfrak{h}$ -verträglichen Fundamentaldarstellungen komplexer einfacher Lie-Algebren gegeben.

TABELLE I

Selbstadjungierte Fundamentaldarstellungen Γ einfacher Lie-Algebren, welche die Bedingung $\Gamma_0 \in \bigwedge^2 \Gamma$ erfüllen.

[1mm] $\mathfrak{g}$	Darstellung Γ	$\dim \Gamma$
$A_{4q+1} \ (q \geq 0)$	Γ_{2q+1}	$\begin{pmatrix} 4q+2 \\ 2q+1 \end{pmatrix}$
$B_{4q+1} \ (q \geq 2)$	Γ_{4q+1}	2^{4q+1}
$B_{4q+2} \ (q \geq 2)$	Γ_{4q+2}	2^{4q+2}
C_n	$\Gamma_{2q+1} \ (q \geq 0)$	$\begin{pmatrix} 2n \\ 2q+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2n \\ 2q-1 \end{pmatrix}$
D_{4m+2}	Γ_{4m+1}	2^{4m+1}
	Γ_{4m+2}	2^{4m+1}
E_7	Γ_1	56
	Γ_3	27664
	Γ_7	912

4. Casimiroperatoren

Innerhalb der semidirekten Produkte $\mathfrak{s} \xrightarrow{\oplus} \mathfrak{r}$ halbeinfacher und auflösbarer Lie-Algebren, ist der Fall $\mathfrak{r} = \mathfrak{h}_N$ von besonderem Interesse, da die Anzahl der Casimiroperatoren nur von der Levi-Unteralgebra $\mathfrak{s}$ und nicht

von der Dimension der Darstellung abhängt³. Diese Tatsache, bereits in den 80er Jahren entdeckt, ist für einige wichtige Spezialfälle benutzt worden [10]. Wir beweisen hier diese Eigenschaft ohne Rücksicht auf eine konkrete Realisierung der Lie-Algebra.

Proposition 2 *Sei $\mathfrak{s}$ eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra. Für das unzerlegbare semidirekte Produkt $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus_{\Gamma \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N$ gilt die Formel*

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \text{Rang}(\mathfrak{s}) + 1.$$

Beweis. Um die Aussage zu beweisen, benutzen wir die differentialgeometrische Interpretation (8) der Formel (3). O.B.d.A. können wir annehmen, daß $\{X_1, \dots, X_{\dim \mathfrak{s}}, X_{\dim \mathfrak{s}+1}, \dots, X_{\dim \mathfrak{s}+2N}, X_{\dim \mathfrak{s}+2N+1}\}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$ ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

- (1) $\{X_1, \dots, X_{\dim \mathfrak{s}}\}$ ist eine Basis der Levi-Unteralgebra $\mathfrak{s}$,
- (2) $\{X_{\dim \mathfrak{s}+1}, \dots, X_{\dim \mathfrak{s}+2N}, X_{\dim \mathfrak{s}+2N+1}\}$ ist eine Basis der Darstellung $\Gamma \oplus \Gamma_0$,
- (3) das Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ wird von $X_{\dim \mathfrak{s}+2N+1}$ erzeugt.

Ist dann $\{\omega_1, \dots, \omega_{\dim \mathfrak{s}}, \omega_{\dim \mathfrak{s}+1}, \dots, \omega_{\dim \mathfrak{s}+2N}, \omega_{\dim \mathfrak{s}+2N+1}\}$ die Dualbasis, so haben die Maurer–Cartan-Gleichungen die Gestalt:

$$d\omega_k = -C_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j, \quad 1 \leq i < j \leq \dim(\mathfrak{g}). \quad (21)$$

Da das Radikal eine Heisenberg-Algebra ist, gilt

$$\begin{aligned} d\omega_{\dim \mathfrak{s}+2N+1} &= -C_{\dim \mathfrak{s}+i, \dim \mathfrak{s}+2N+1-i}^{\dim \mathfrak{s}+2N+1} \omega_{\dim \mathfrak{s}+i} \wedge \omega_{\dim \mathfrak{s}+2N+1-i}, \\ 1 &\leq i \leq N, \end{aligned} \quad (22)$$

wobei für alle i die Strukturkonstante $C_{\dim \mathfrak{s}+i, \dim \mathfrak{s}+2N+1-i}^{\dim \mathfrak{s}+2N+1}$ von Null verschieden ist. Daraus folgt, daß $\bigwedge^N d\omega_{\dim \mathfrak{s}+2N+1} \neq 0$ gilt. Da $\mathfrak{s}$ halbeinfach ist, existiert eine 2-Form $\theta \in \mathcal{L}(\mathfrak{s})$ mit $\bigwedge^{\frac{\dim \mathfrak{s} - \text{Rang}(\mathfrak{s})}{2}} \theta \neq 0$ [7]. Nehmen wir die 2-Form $\theta + d\omega_{\dim \mathfrak{s}+2N+1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$, so erhalten wir

$$j_0(\theta + d\omega_{\dim \mathfrak{s}+2N+1}) = \frac{\dim \mathfrak{s} - \text{Rang}(\mathfrak{s})}{2} + N. \quad (23)$$

Es ist einfach zu zeigen, daß $\theta + d\omega_{\dim \mathfrak{s}+2N+1}$ eine Form maximalen Ranges ist, d.h., $j_0(\mathfrak{g}) = \frac{\dim \mathfrak{s} - \text{Rang}(\mathfrak{s})}{2} + N$. Daraus folgt aus (8):

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{s} + 2N + 1 - 2j_0(\mathfrak{g}) = \text{Rang}(\mathfrak{s}) + 1. \quad (24)$$

■

³ Bei allgemeinen semidirekten Produkten gibt es im Prinzip keine Beziehung zwischen dem Rang der Levi-Unteralgebra und die Anzahl der Casimiroperatoren oder -invarianten (siehe z.B. [9]).

Bemerkung 1 *Bemerkenswert ist die Tatsache, daß in Satz 1 das Ergebnis nicht von der Multiplizität der Nulldarstellung in Γ abhängt, sondern nur von der nicht Entartung der Lie-Klammer im Radikal.*

Für den reellen Fall können wir ein völlig analoges Ergebnis aufstellen, dessen Beweis sofort aus Satz 1 folgt.

Korollar 2 *Sei $\widehat{\mathfrak{s}}$ eine reelle Form der halbeinfachen komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$. Weiter sei $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{s}} \oplus_{\Gamma \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N$, wobei Γ eine reelle Darstellung von $\widehat{\mathfrak{s}}$ ist. Dann gilt*

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \text{Rang}(\mathfrak{s}) + 1.$$

Anwendungen auf inhomogene Lie-Algebren

Aus der allgemeinen Theorie folgt, daß jede Lie-Algebra mit der Levi-Zerlegung $\mathfrak{s} \oplus_R \mathfrak{r}$, wobei R eine irreduzible Darstellung der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$ ist, ein abelsches Radikal haben muß d.h., $\mathfrak{r} \simeq (\dim R)L_1$ erfüllen muß wobei L_1 die abelsche Lie-Algebra der Dimension 1 ist [11]. Ist R speziell die gewöhnliche Darstellung, so wird das Produkt $\mathfrak{s} \oplus_R \mathfrak{r}$ als inhomogen bezeichnet⁴. Inhomogene Algebren spielen in den Eichtheorien der Gravitation eine gewisse Rolle (siehe z.B. die Poincaré oder inhomogene Lorentz-Algebra $\text{Iso}(3,1)$).

Es stellt sich die Frage, welche inhomogene Lie-Algebren als Kontraktion einer Lie-Algebra mit heisenbergschem Radikal erhalten werden können. Wir erinnern kurz an die Definition von Kontraktion. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\Phi_t \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ eine Menge von $\mathfrak{g}$ -Automorphismen, wobei $t \in \mathbb{N}$. Für jedes Paar $X, Y \in \mathfrak{g}$ definieren wir

$$[X, Y]_{\Phi_t} := [\Phi_t(X), \Phi_t(Y)] = \Phi_t([X, Y]). \quad (25)$$

Offenbar ist $[X, Y]_{\Phi_t}$ die Klammer der Lie-Algebra auf der transformierten Basis. Existiert der Grenzwert

$$[X, Y]_{\infty} := \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t^{-1} [\Phi_t(X), \Phi_t(Y)] \quad (26)$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$, so definiert (26) eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}'$, die Kontraktion von $\mathfrak{g}$ (in Bezug auf Φ_t) heißt. Sind $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ nicht-isomorph, so heißt die Kontraktion nicht-trivial⁵. Diese Grenzwertmethode kann auch benutzt werden, um

⁴ Andere Autoren setzten nicht voraus, daß die R die gewöhnliche Darstellung ist. Diese Einschränkung ist aber für die physikalischen Anwendungen wichtig. Für beliebig-dimensionale Darstellungen ist auch die Bezeichnung affin von Gebrauch.

⁵ Obwohl hier nicht explizit gesagt, arbeiten wir mit der Definition von verallgemeinerten Inönü-Wigner Kontraktionen. Für eine topologische Definition siehe z.B. [12].

Casimiroperatoren von Kontraktionen zu erhalten. Sei z.B. $F(X_1, \dots, X_n)$ ein Casimiroperator der Ordnung p . Schreibt man F auf der transformierten Basis $\{\Phi_t(X_1), \dots, \Phi_t(X_n)\}$, und berechnet den Grenzwert

$$F'(X_1, \dots, X_n) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^p} F(\Phi_t(X_1), \dots, \Phi_t(X_n)), \quad (27)$$

so kann man leicht zeigen, daß (27) eine Invariante der Kontraktion ist [1, 13].

Satz 2 Sei R eine Darstellung der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$, für die $\text{mult}_R(\Gamma_0) = 0$ gilt. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{R \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N$. Dann gilt für die Kontraktion $\mathfrak{g}' = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{R \oplus \Gamma_0} (\dim R + 1) L_1$ folgende Ungleichung

$$\text{Rang}(\mathfrak{s}) + 1 \leq \mathcal{N}(\mathfrak{g}') \leq \dim R + 1 - \text{Rang}(s). \quad (28)$$

Beweis. Wegen Proposition 2 gilt für die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ die Gleichung $\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \text{Rang}(s) + 1$. Da $\mathfrak{g}'$ eine Kontraktion von $\mathfrak{g}$, ist, folgt auf jeden Fall $\mathcal{N}(\mathfrak{g}) \leq \mathcal{N}(\mathfrak{g}')$ [12]. Da die Levi-Unteralgebra erhalten bleibt, gibt es zumindest eine 2-Form $\theta \in \mathcal{L}(\mathfrak{s})$ mit $j_0(\theta) = (\dim \mathfrak{s} - \text{Rang}(\mathfrak{s}))/2$. Sei $\mathfrak{r} = (\dim R + 1) L_1$ das abelsche Radikal der Kontraktion. Wegen $\text{mult}_R(\Gamma_0) = 0$ ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ perfekt⁶, und damit existieren zumindest $\text{Rang}(\mathfrak{s})$ Paare (X_j, Y_j) mit $X_j \in \mathfrak{s}$, $Y_j \in \mathfrak{h}_N$ für $1 \leq j \leq \text{Rang}(\mathfrak{s})$, welche die Bedingungen $[X_j, Y_j] \neq 0$ und $(X_i, Y_i) \neq (X_j, Y_j)$ für alle $i \neq j$ erfüllen. Im Raum $\mathcal{L}(\mathfrak{r})$ existiert eine 2-Form ω mit $j_0(\omega) = \text{Rang}(\mathfrak{s})$. Werden die Elemente X_i zum Beispiel aus einer Cartan-Unteralgebra gewählt, so kann man θ und ω derart wählen, daß

$$\bigwedge^{\frac{1}{2}(\dim \mathfrak{s} + \text{Rang}(\mathfrak{s}))} (\omega + \theta) \neq 0 \quad (29)$$

gilt, d.h., $j_0(\omega + \theta) = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{s} + \text{Rang}(\mathfrak{s}))$. Das zeigt, daß $j_0(\mathfrak{g}') \geq j_0(\omega + \theta)$ gilt, und daraus erhalten wir

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}') \leq \dim R + 1 - \text{Rang}(s). \quad (30)$$

■

Aus der Kontraktion $\mathfrak{g}' = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{R \oplus \Gamma_0} (\dim R + 1) L_1$ folgt unmittelbar, daß die Algebra $\mathfrak{g}'$ zerlegbar ist. Wir erhalten

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{R \oplus \Gamma_0} (\dim R + 1) L_1 = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R (\dim R) L_1 \oplus L_1, \quad (31)$$

da offenbar die Zentrumserzeugende von $\mathfrak{g}$ nach der Kontraktion ein zentrales Element ist, welches nicht in der Kommutatoren-Unteralgebra $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$ enthalten ist.

⁶ D.h., $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.

Korollar 3 Für die unzerlegbare Lie-Algebra $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R (\dim R) L_1$ aus Satz 2 gilt

$$\text{Rang}(\mathfrak{s}) \leq \mathcal{N}(\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R (\dim R) L_1) \leq \dim R - \text{Rang}(s) . \quad (32)$$

Bemerkung 2 Die obere Schranke aus Korollar 3 kann i.A. nicht verfeinert werden, da Lie-Algebren existieren, die genau $\dim R - \text{Rang}(\mathfrak{s})$ Casimir-operatoren besitzen. Sei zum Beispiel $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) \overrightarrow{\oplus}_{D_1} 2L_1$, wobei $D_{\frac{1}{2}}$ die gewöhnliche Darstellung ist. Für diese Algebra gilt $\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = 1 = \dim D_{\frac{1}{2}} - 1$. Weiter kann auf die Annahme, daß $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R (\dim R) L_1$ durch Kontraktion erhalten wird, nicht verzichtet werden. Ist nämlich $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R (\dim R) L_1$ keine Kontraktion einer perfekten Lie-Algebra mit heisenbergschem Radikal⁷, so braucht die Anzahl der Casimirinvarianten nicht größer als $\text{Rang}(\mathfrak{s})$ zu sein. Als Beispiel kann man die spezielle affine Lie-Algebra $\mathfrak{sa}(n, \mathbb{K}) = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{K}) \overrightarrow{\oplus}_{\Gamma(1,0)} 3L_1$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ betrachten: für alle $n \geq 2$ gilt $\mathcal{N}(\mathfrak{sa}(n, \mathbb{K})) = 1$ [6, 14].

Aus diesem Ergebnis läßt sich eine weitere Schranke herleiten, die unter Umständen genauere Aussagen erlaubt:

Proposition 3 Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R (\dim R) L_1$ eine unzerlegbare Lie-Algebra. Ist $\dim R > \dim \mathfrak{s}$ und existiert eine 2-Form $\omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ mit $j_0(\omega) = \dim \mathfrak{s}$, dann ist

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \dim R - \dim \mathfrak{s} . \quad (33)$$

Ist speziell $\mathfrak{g}$ eine Komponente der Kontraktion $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{R \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N \rightsquigarrow \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R (\dim R) L_1 \oplus L_1$, so gilt

$$\dim R \geq \text{Rang}(s) + \dim \mathfrak{s} . \quad (34)$$

Dieser Satz ist eine direkte Folge der Formel (8).

Proposition 4 Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R (\dim R) L_1$ eine unzerlegbare Lie-Algebra. Existiert eine 2-Form $\omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ mit

$$j_0(\omega) - j_0(\mathfrak{s}) \geq \frac{\dim R}{2} , \quad (35)$$

so gilt die Ungleichung

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) \leq \text{Rang}(s) . \quad (36)$$

⁷ Es genügt, eine Darstellung R zu wählen, die die Bedingungen von Satz 1 nicht erfüllt.

Beweis. Da $j_0(\mathfrak{g}) = \max \{j_0(\omega) \mid \omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})\}$, erhalten wir aus Formel (8)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathfrak{g}) &= \dim s + \dim R - 2j_0(\mathfrak{g}) \leq \dim s + \dim R - 2j_0(\omega) \\ &\leq \dim s + \dim R - 2 \left(\frac{\dim R}{2} + j_0(\mathfrak{s}) \right) \\ &= \dim \mathfrak{s} - 2j_0(\mathfrak{s}) = \text{Rang}(\mathfrak{s}) . \end{aligned} \quad (37)$$

■

Beispiel 2 Als Beispiel dieses Satzes betrachten wir die spezielle affine Lie-Algebra $\mathfrak{sa}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \overrightarrow{\oplus}_{\Gamma} nL_1$ für $n \geq 2$, wobei Γ die gewöhnliche Darstellung ist. Es gilt $\mathcal{N}(\mathfrak{sa}(n, \mathbb{R})) = 1$ für alle n [6]. Daraus berechnen wir $j_0(\mathfrak{sa}(n, \mathbb{R})) = \frac{1}{2}(n^2 + n - 2)$, und da die Levi-Unteralgebra $\mathfrak{s}$ zu $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ isomorph ist, erhalten wir

$$j_0(\mathfrak{sa}(n, \mathbb{R})) - j_0(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})) = n - 1 > \frac{\dim \Gamma}{2} = \frac{n}{2} . \quad (38)$$

Wir bemerken, daß innerhalb der inhomogenen Algebren, die mit der reellen Normalform einer komplexen einfachen Lie-Algebra in Verbindung stehen, die Algebra $\mathfrak{sa}(n, \mathbb{R})$ wegen des konstanten Wertes der Funktion $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ eine Ausnahme bilden [6, 7, 14].

Besonders wichtig ist der Fall, bei dem die Gleichung

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \text{Rang}(s) \quad (39)$$

gilt. Wir zeigen, daß diese Beziehung ebenfalls benutzt werden kann, um Schranken für die Dimension der Darstellung zu erhalten. Die meisten der klassischen inhomogenen Lie-Algebren können demnach als Spezialfälle des folgenden Satzes betrachtet werden:

Satz 3 Sei $\mathfrak{s}$ eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra und R eine Darstellung der Dimension $2N$. Weiter sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_R (2N) L_1$ eine unzerlegbare Lie-Algebra, welche

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \text{Rang}(\mathfrak{s}) \quad (40)$$

erfüllt. Dann gilt

$$N \leq \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{s} + \text{Rang}(\mathfrak{s})) . \quad (41)$$

Weiter existiert eine ganze Zahl $k_0 \in \{0, \dots, |\Phi^+|\}$ mit

$$N = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{s} + \text{Rang}(\mathfrak{s})) - k_0 , \quad (42)$$

wobei Φ^+ die Menge der positiven Wurzeln von $\mathfrak{s}$ ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{r} = (2N)L_1$ das abelsche Radikal von $\mathfrak{g}$. Da die Anzahl der Invarianten der Algebra $\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \text{Rang}(\mathfrak{s})$ ist, existiert eine 2-Form $\theta \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$, für die

$$j_0(\theta) = N + \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{s} - \text{Rang}(\mathfrak{s})) = N + |\Phi^+| \quad (43)$$

gilt. Wegen $\theta \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ gibt es 2-Formen $\theta_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{s})$ und $\theta_2 \in \mathcal{L}(\mathfrak{r})$ mit $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Zwei Fälle müssen unterschieden werden:

- (1) $\theta_1 = 0$: In diesem Fall ist θ eine lineare Kombination der Maurer–Cartan-Gleichungen des Radikals. Da $\mathfrak{r}$ abelsch ist, erhalten wir

$$\dim \mathfrak{s} \geq N + |\Phi^+|. \quad (44)$$

Weiter ist $\dim \mathfrak{s} = 2|\Phi^+| + \text{Rang}(\mathfrak{s})$, woraus

$$N \leq \text{Rang}(\mathfrak{s}) + |\Phi^+| \quad (45)$$

folgt. Wird letzte Ungleichung mit 2 multipliziert, so ergibt sich

$$\dim \mathfrak{r} = 2N \leq 2(\text{Rang}(\mathfrak{s}) + |\Phi^+|) = \dim \mathfrak{s} + \text{Rang}(\mathfrak{s}). \quad (46)$$

- (2) $\theta_1 \neq 0$: Ist die Komponente in $\mathcal{L}(\mathfrak{s})$ nicht Null, so gibt es eine Zahl $1 \leq k \leq |\Phi^+|^8$ mit

$$\bigwedge^k \theta_1 \neq 0, \quad \bigwedge^{k+1} \theta_1 = 0. \quad (47)$$

Wegen (43) muß demnach

$$\bigwedge^{N+|\Phi^+|-k} \theta_2 \neq 0, \quad \bigwedge^{N+|\Phi^+|-k+1} \theta_2 = 0 \quad (48)$$

gelten. Nun ist aber das Radikal $\mathfrak{r}$ abelsch. Das bedeutet, daß in der Zerlegung von θ_2 als Element von $\bigwedge^2(\mathfrak{g})^*$ mindestens $(N + |\Phi^+| - k)$ verschiedene Elemente aus $\mathfrak{s}$ vorkommen, die nicht in $\bigwedge^k \theta_1$ erscheinen. Folglich muß die Ungleichung

$$N + |\Phi^+| - k \leq \dim \mathfrak{s} - 2k \quad (49)$$

erfüllt werden. Vereinfachen von (49) ergibt

$$N \leq \text{Rang}(\mathfrak{s}) + |\Phi^+| - k, \quad (50)$$

woraus die Behauptung folgt.

Die zweite Aussage ist trivial. ■

⁸ Wegen $\mathcal{N}(\mathfrak{s}) = \text{Rang}(\mathfrak{s})$ hat eine 2-Form aus $\mathcal{L}(\mathfrak{s})$ höchstens $\text{Rang } 2|\Phi^+|$, also muß $k \leq |\Phi^+|$ gelten.

Für den reellen Fall ist der Satz ebenfalls gültig, nur muß hier die Anzahl der positiven Wurzeln durch diejenige der Komplexifizierung geändert werden. Dieser letzte Satz besagt auch, warum wir uns bei inhomogenen Lie-Algebren auf die Standarddarstellung beschränken. Wir interessieren uns nämlich nur für den Fall, wo ein Fundamentalsystem von Casimiroperatoren der inhomogenen Lie-Algebra mittels der Kontraktion eines Fundamentalsystems einer Lie-Algebra mit heisenbergschem Radikal erhalten werden kann [3, 15]. Damit die Kontraktion keine weiteren unabhängige Invarianten hat, muß die Dimension der definierenden Darstellung des semidirekten Produktes in Schranken gehalten werden. In Tabelle II werden einige physikalisch wichtige Lie-Algebren der Form $\mathfrak{s} \xrightarrow{\Gamma} \Gamma \oplus \Gamma_0 \mathfrak{h}_N$ und ihre inhomogene Kontraktionskomponente angegeben, so wie der Index k_0 aus Satz 3.

TABELLE II

Einige Lie-Algebren und ihre inhomogenen Kontraktionen.

$w\mathfrak{s}$	$\mathcal{N}(w\mathfrak{s})$	$\mathfrak{s} \oplus_{\Gamma} \dim(\Gamma)L_1$	$\mathcal{N}$	$\mathfrak{s} \otimes \mathbb{C}$	k_0
–	–	$\mathfrak{iso}(2p+1-q, q)$	p	$\mathfrak{so}(2p+1-q, q)$	–
–	–	$\mathfrak{iso}(2p-q, q)$	p	$\mathfrak{so}(2p-q, q)$	$p^2 - p$
$w\mathfrak{su}(p, q)$	$p+q$	$\mathfrak{isu}(p, q)$	$p+q-1$	$\mathfrak{su}(p, q)$	$ \Phi^+ - 1$
$w\mathfrak{sp}(N)$	$N+1$	$\mathfrak{isp}(2N, \mathbb{R})$	N	$\mathfrak{sp}(2N)$	$ \Phi^+ $
wE_7	8	IE_7	7	E_7	42

Anwendungen auf Verzweigungsregeln

Satz 1 kann auch für Verzweigungsregeln irreduzibler Darstellungen einer halbeinfachen Lie-Algebra benutzt werden. Wir zeigen, daß die induzierte Darstellung einer $\mathfrak{h}_N$ -verträglichen Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra eine verträgliche Darstellung der gewählten Unteralgebra ist. Das bedeutet, daß die Zerlegung der Darstellung bestimmte Eigenschaften besitzen muß. Daraus lassen sich in einigen Fällen interessante Formeln herleiten, die für alle Dimensionen gelten. Dieser Formeln werden für den wichtigen Spezialfall der Algebra $\mathfrak{su}(6)$ entwickelt. Irreduzible Darstellungen der einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{su}(N)$ mit $\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$ bezeichnet, wobei

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) = \lambda_1 \Lambda_1 + \dots + \lambda_{N-1} \Lambda_{N-1}$$

das höchste Gewicht ist [16].

Proposition 5 Seien $\mathfrak{s}', \mathfrak{s}$ komplexe halbeinfache Lie-Algebren und $i: \mathfrak{s}' \hookrightarrow \mathfrak{s}$ eine Einbettung. Ist Γ eine $\mathfrak{h}_N$ -verträgliche Darstellung von $\mathfrak{s}$, so ist $\Gamma|_{\mathfrak{s}'}$ eine $\mathfrak{h}_N$ -verträgliche Darstellung von $\mathfrak{s}'$.

Beweis. Ist die Darstellung Γ verträglich, dann existiert laut Definition 1 eine Lie-Algebra

$$\mathfrak{s} \oplus_{\Gamma \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N \quad (51)$$

für $N = \frac{1}{2} \dim \Gamma$. Da i eine Einbettung von $\mathfrak{s}'$ als Unter algebra von $\mathfrak{s}$ ist, induziert (51) die Einbettung

$$\mathfrak{s}' \oplus_{(\Gamma \oplus \Gamma_0)|_{\mathfrak{s}'}} \mathfrak{h}_N \hookrightarrow \mathfrak{s} \oplus_{\Gamma \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N. \quad (52)$$

Speziell bleibt das Radikal erhalten. Das impliziert, daß die induzierte Darstellung folgende Zerlegung hat:

$$(\Gamma \oplus \Gamma_0)|_{\mathfrak{s}'} = \Gamma|_{\mathfrak{s}'} \oplus \Gamma_0, \quad (53)$$

und daher ist die induzierte Darstellung $\Gamma|_{\mathfrak{s}'}$ mit $\mathfrak{h}_N$ verträglich. ■

Bemerkung 3 Die Umkehrung des Satzes ist falsch. Sei zum Beispiel $\mathfrak{s} = A_2$ und $\mathfrak{s}' = A_1$. Die 16-dimensionale Darstellung $\Gamma = \Gamma(1, 2) \oplus \Gamma(0, 0)$ von A_2 erfüllt die Bedingung aus Satz 1 nicht, und ist damit nicht $\mathfrak{h}_8$ -verträglich. Wird aber die reguläre Einbettung $A_1 \hookrightarrow A_2$ betrachtet, erhalten wir die Zerlegung

$$(\Gamma(1, 2) \oplus \Gamma(0, 0))|_{A_1} = D_{\frac{3}{2}} \oplus 2D_1 \oplus 2D_{\frac{1}{2}} \oplus 2D_0, \quad (54)$$

die offenbar mit einer Heisenberg-Algebra verträglich ist. Wird dagegen die nicht-reguläre Einbettung $i' : A_1 \hookrightarrow A_2$ benutzt, so ergibt sich

$$(\Gamma(1, 2) \oplus \Gamma(0, 0))|_{A_1} = D_3 \oplus D_2 \oplus D_1 \oplus D_0, \quad (55)$$

die die Bedingungen von Satz 1 auch nicht erfüllt.

Als physikalisch interessante Anwendung dieses Ergebnisses geben wir die Verzweigungsregel für die symplektischen Fundamentaldarstellungen der Lie-Algebren $\mathfrak{su}(5) \hookrightarrow \mathfrak{su}(6)$. Wie bekannt spielt die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(6)$ im Quarkmodell eine zentrale Rolle [17].

Proposition 6 Sei $\mathfrak{su}(5) \hookrightarrow \mathfrak{su}(6)$ die reguläre Einbettung. Dann gilt für die symplektische Darstellungen $\Gamma(p, 0, 2q+1, 0, p)$ mit $p, q \geq 0$ folgende Verzweigungsregel:

$$\Gamma(p, 0, 2q+1, 0, p)|_{\mathfrak{su}(5)} = \sum_{p_1+p_2=2q+1} \Gamma(\epsilon_1, p_1, p_2, \epsilon_2), \quad (56)$$

wobei $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, \dots, p\}$.

Beweis. Da die Darstellung verträglich ist, muß die induzierte Darstellung dieselbe Eigenschaft haben. Ist also $\Gamma(a, b, c, d)^9$ eine Konstituente von $\Gamma(p, 0, 2q+1, 0, p)|_{\mathfrak{su}(5)}$, so muß wegen Satz 1 die adjungierte Darstellung ebenfalls vorkommen. Wir bemerken weiter, daß $\mathfrak{su}(5)$ keine irreduziblen selbstadjungierten symplektischen Darstellungen besitzt. Das bedeutet, daß die Zerlegung eine Summe von Paaren der Gestalt $\Gamma(a, b, c, d) \oplus \Gamma(d, c, b, a)$ sein muß. Für $p = 0$ brauchen nur zu zeigen, daß für die vorkommenden Darstellungen von $\mathfrak{su}(5)$ stets $a = 0$ gilt (und demnach $d = 0$). Es ist leicht zu sehen, daß die Darstellung dem Young-Diagramm $[2q+1, 2q+1, 2q+1]$ entspricht¹⁰. Wird jetzt die Weylsche Regel angewandt [18], so folgt, daß die zulässigen Young-Diagramme der vortretenden $\mathfrak{su}(5)$ -Darstellungen die Form $[2q+1, 2q+1, t]$ mit $0 \leq t \leq 2q+1$ haben. Das bedeutet speziell, daß die Darstellungen das höchste Gewicht $\lambda = (0, t, 2q+1-t, 0)$ mit $0 \leq t \leq 2q+1$ besitzen. Wir bekommen die Zerlegung:

$$\Gamma(0, 0, 2q+1, 0, 0)|_{\mathfrak{su}(5)} = \sum_{p_1+p_2=2q+1} \Gamma(0, p_1, p_2, 0) . \quad (57)$$

Für $p = 1$ erhalten wir Young-Diagramme der Form $[2q+3, 2q+2, 2q+2, 1, 1]$. Auflösen des Ungleichungssystems der Weylschen Regel

$$1 \leq \alpha + f_4 \leq 1, \quad (58)$$

$$1 \leq \alpha + f_3 \leq 2q+2, \quad (59)$$

$$2q+1 \leq \alpha + f_2 \leq 2q+2, \quad (60)$$

$$2q+2 \leq \alpha + f_1 \leq 2q+3, \quad (61)$$

impliziert, daß die Young-Diagramme $[f_1, f_2, f_3, f_4]$ der $\mathfrak{su}(5)$ -Darstellungen die Gestalt

$$[2q+2+\epsilon, 2q+2, t, 1], \quad \epsilon = 0, 1, \quad 1 \leq t \leq 2q+2, \quad (62)$$

$$[2q+1+\epsilon, 2q+1, t, 1], \quad \epsilon = 0, 1, \quad 0 \leq t \leq 2q+1, \quad (63)$$

haben müssen, woraus die Behauptung folgt. Rekursion nach p zeigt, daß im allgemeinen Fall das System

$$p \leq \alpha + f_4 \leq p, \quad (64)$$

$$p \leq \alpha + f_3 \leq 2q+1+p, \quad (65)$$

$$2q+1+p \leq \alpha + f_2 \leq 2q+1+p, \quad (66)$$

$$2q+1+p \leq \alpha + f_1 \leq 2q+1+2p, \quad (67)$$

⁹ Die Schreibweise für die Darstellungen und die Gewichte ist aus [16, 18] entnommen.

¹⁰ Siehe ebenfalls [18] für die Young-Diagramme.

zu lösen ist. Das ergibt für jedes festgelegte $\alpha \in \{0, \dots, p\}$ die Young-Diagramme

$$YD_\alpha = [2q+1+2p-\alpha+\gamma, 2q+1+p-\alpha, p-\gamma+\delta, p-\alpha] \quad (68)$$

mit $\gamma \in \{0, \dots, p\}$ und $\delta \in \{0, \dots, 2q+1\}$. Für jedes ein solches Diagramm erhalten wir die irreduzible Darstellung

$$\Gamma(\gamma, 2q+1-\delta, \delta, p-\alpha). \quad (69)$$

Wird jetzt $\varepsilon_1 = \gamma$, $\varepsilon_2 = p-\alpha$ und $p_1 = 2q+1-\delta$, $p_2 = \delta$ gesetzt, so sieht man leicht, daß die Gewichte symmetrisch sind und folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, \dots, p\}, \quad (70)$$

$$p_1 + p_2 = 2q+1. \quad (71)$$

Die Summe über alle möglichen Werte der Parameter ergibt die Zerlegung (56). ■

Beispiel 3 Für andere Unteralgebren können mit Hilfe der Symmetrie einfache Verzweigungsregeln erhalten werden. So haben wir z.B. für die 980-dimensionale Darstellung $\Gamma(0, 0, 3, 0, 0)$ von $\mathfrak{su}(6)$ und die halbeinfache Unteralgebra $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(4)$ die Zerlegung:

$$\Gamma(0, 0, 3, 0, 0)|_{\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(4)} = \Gamma(3) \otimes \Gamma(0, 3, 0) \oplus \Gamma(1) \otimes \Gamma(1, 1, 1) \oplus W \oplus \overline{W}, \quad (72)$$

wobei

$$W = \Gamma(2) \otimes \Gamma(1, 2, 0) \oplus \Gamma(1) \otimes \Gamma(2, 1, 0) \oplus \Gamma(0) \otimes (\Gamma(3, 0, 0) \oplus \Gamma(1, 0, 2)) \quad (73)$$

ist.

5. Schlußbemerkungen

Wir haben gezeigt, daß die Kopplung einer Heisenberg mit einer halbeinfachen Lie-Algebra stark von den geometrischen Eigenschaften der beschreibenden Darstellung Γ des semidirekten Produktes $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Gamma \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N$ abhängt. Im Rahmen der Strukturtheorie kompakter reeller Formen, ist diese Verträglichkeit mit der Klassifikation der reellen Darstellungen äquivalent. Weiter zeigen die Lie-Algebren $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Gamma \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N$ eine interessante Eigenschaft, die für andere Levi-Zerlegungen nicht mehr wahr ist: die Anzahl der Casimir-Operatoren hängt nur vom Rang der Levi-Unteralgebra $\mathfrak{s}$ ab. Aus dieser Tatsache haben wir für inhomogene Lie-Algebren verbesserte Schranken für

die Zahl von Invarianten gegeben, die für bestimmte Darstellungen auch exakte Formeln ergeben. Speziell sind diese Schranken für Kontraktionen von $\mathfrak{s} \oplus_{\Gamma \oplus \Gamma_0} \mathfrak{h}_N$ von Interesse, soweit die Dimension der Darstellung Γ im Verhältnis zur Dimension von $\mathfrak{s}$ nicht zu groß ist. In der letzten Abteilung haben wir durch physikalisch relevante Beispiele gezeigt, wie man die symmetrischen Eigenschaften verträglicher Darstellungen für das Problem der Zerlegung induzierter Darstellungen benutzen kann. Es besteht weiter die Möglichkeit, für andere Einbettungen die in der Elementarteilchenphysik von Wichtigkeit sind, mit Hilfe von Satz 1 weitere Verzweigungsregeln herzuleiten.

REFERENCES

- [1] A.O. Barut, R. Raczka, *The Theory of Group Representations and Applications*, PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw 1980.
- [2] A.M. Perelomov, *Integriruemye sistemy klassicheskoi' mekhaniki i algebry Li*, Nauka, Moskva 1990.
- [3] R. Campoamor-Stursberg, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 4187 (2005).
- [4] J.L. Rubin, P. Winternitz, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26**, 1123 (1993).
- [5] L. Snobl, P. Winternitz, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 2187 (2005).
- [6] A.P. Demichev, N.F. Nelipa *Vestnik Mosk. Univ. Ser. III Fiz. Astron.* **21**, 23 (1980).
- [7] R. Campoamor-Stursberg, *Phys. Lett.* **A327**, 138 (2004).
- [8] A.L. Onishchik, *ESI Lectures in Mathematics and Physics*, Zürich 2004.
- [9] R. Campoamor-Stursberg, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 3627 (2004).
- [10] C. Quesne, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21**, L321 (1988).
- [11] P. Turkowski *Linear Alg. Appl.* **171**, 197 (1992).
- [12] R. Campoamor-Stursberg, *Acta Phys. Pol. B* **34**, 3901 (2003).
- [13] Ya.Kh. Lykhmus, *Predel'nye gruppy Li*, Tartu 1969.
- [14] J.N. Pecina Cruz, *J. Math. Phys.* **46**, (2005).
- [15] R. Campoamor-Stursberg, *Acta Phys. Pol. B* **36**, 1921 (2005).
- [16] J.F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Academic Press, New York 1984.
- [17] R. Slansky, *Phys. Rep.* **79**, 1 (1981).
- [18] C. Itzykson, M. Nauenberg, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 95 (1966).