ERWEITERUNGEN INHOMOGENER LIE-ALGEBREN UND DEREN CASIMIR-INVARIANTEN. ANWENDUNGEN AUF DIE INHOMOGENE WEYL-ALGEBRA
(Extension of Inhomogenous Lie Algebras and Their Casimir Invariants. Application to the Inhomogenous Weyl Algebra)*

Rutwig Campoamor-Stursberg

Dpto. Geometría y Topología, Fac. CC. Matemáticas
Universidad Complutense, Plaza de Ciencias, 3
E-28040 Madrid, Spain
rutwig@mat.ucm.es

(Received September 3, 2007)

Wir untersuchen die Struktur der Casimiroperatoren inhomogener Lie-Algebren $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\overrightarrow{\oplus}_{\Lambda}nL_1$ in bezug auf die Variablen des Radikals. Es wird die Existenz einer Erweiterung gezeigt, dessen Invarianten als rationale Funktionen der Casimiroperatoren von $\mathfrak{g}$ darstellbar sind. Spezifisch wird bewiesen, daß die Casimiroperatoren der inhomogenen Lie-Algebren $\mathfrak{s}\overrightarrow{\oplus}_{\Lambda}nL_1$ homogene Polynome in den Translationsvariablen sind. Daraus folgt ein Unabhängigkeitskriterium für Casimiroperatoren inhomogener Algebren. Als weitere Anwendung wird gezeigt, daß die Invarianten der inhomogenen Weyl-Algebra $W(p,q)$ der Feldtheorie als einfache Quotienten der Casimiroperatoren von $I\mathfrak{so}(p,q)$ gewählt werden können.

PACS numbers: 02.20.Sv

1. Einleitung

Inhomogene Lie-Algebren spielen in der Physik eine besondere Rolle, da sie genau die Verknüpfung von inneren und äußeren Symmetrien eines Systems wiedergeben. In der Regel handelt es sich um semidirekte Produkte von halbeinfachen und abelschen Lie-Algebren, wobei die Elemente des Radikals[1] als Translationen interpretiert werden. Das Interesse an inhomogene Gruppen ist hauptsächlich auf die Suche von "verallgemeinerten

* Diese Arbeit würde gefördert durch das Forschungsprojekt MCM2006-09152 des Ministerio de Educación y Ciencia.

[1] Jede Lie-Algebra besitzt ein maximales auflösbares Ideal, Radikal gennant.

Poincaré-Gruppen" zurückzuführen [1], wie die inhomogene Algebra $I\mathfrak{sl}(6,\mathbb{R})$ im Zusammenhang mit der relativistischen Verallgemeinerung der Symmetriegruppe SU(6). Die Anwendung inhomogener Strukturen ist seitdem auf etliche andere Modelle der Elementarteilchenphysik und verwandte Gebiete erweitert worden [2]. Es hat sich aber gezeigt, daß man oft mit inhomogenen Gruppen und Algebren nicht auskommt, so wie zum Beispiel in der konformen Feldtheorie [3, 4]. Die als Eichgruppen in Frage kommenden Strukturen sind im allgemeinen mit Erweiterungen von inhomogenen Algebren verbunden, die durch Einführung eines Dilatationsoperators gewonnen werden. Dabei ist es wichtig, die invarianten Operatoren der Erweiterungen möglichst als Funktion der schon bekannten Operatoren zu gewinnen. Besonders wichtig ist die Bestimmung der Casimir-Invarianten solcher Algebren. Obwohl für den allgemeinen Fall keine einheitlichen Formeln gefunden werden können, sind für wichtige Gruppen und Algebren, meistens in niedriger Dimension, diese Invarianten und Beziehungen schon untersucht worden[2].

In dieser Arbeit erhalten wir einige wichtige Eigenschaften der Casimiroperatoren von Lie-Algebren mit der Levi-Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{s}\overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} nL_1$, wobei $\mathfrak{s}$ halbeinfach ist und Λ eine Darstellung, die nicht die triviale Darstellung D_0 von $\mathfrak{s}$ enthält. Diese Klasse von Algebren entspricht der allgemeinen Form von inhomogenen Lie-Algebren [5]. Insbesondere wird gezeigt, daß solche Algebren immer auf nicht trivialer Weise erweitert werden können. Weiter wird gezeigt, daß die Invarianten dieser Erweiterungen immer Funktionen der Casimiroperatoren der inhomogenen Algebra $\mathfrak{g}$ sind. Im dritten Abschnitt wird bewiesen, daß jeder Casimiroperator einer inhomogenen Algebra $\mathfrak{s}\overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} nL_1$ mit obiger Levi-Zerlegung ein homogenes Polynom in den Translationsvariablen ist[3]. Das bedeutet, daß jede Invariante der Erweiterung eine rationale Funktion der Casimiroperatoren von $\mathfrak{g}$ ist. Diese Eigenschaft war bis jetzt nur für bestimmte Algebren in niedriger Dimension bewiesen worden.

Als Anwendung werden die (rationalen) Invarianten der inhomogenen Weyl-Algebra $W(p, q)$ explizit erhalten. In der Arbeit [7] wurde die Zahl der Invarianten bestimmt, und es wurde ebenfalls gezeigt, daß die Casimiroperatoren der inhomogenen Algebra $I\mathfrak{so}(p, q)$ Halb-Invarianten von $W(p, q)$ sind. Mit Hilfe einer Determinantenformel zeigen wir, daß die Casimiroperatoren von $I\mathfrak{so}(p, q)$ in den Translationsvariablen denselben Homogenitätsgrad haben. Insbesondere folgt daraus, daß die invarianten Funktionen der erweiterten Weyl-Algebra einfach durch Quotienten der Casimiroperatoren der inhomogenen pseudo-orthogonalen Lie-Algebra $I\mathfrak{so}(p, q)$ erhalten wer-

[2] Für eine Übersicht sei z.B [5,6] empfohlen.

[3] Da das Radikal abelsch ist, werden diese Elemente im folgenden als Translationen bezeichnet.

den. Damit wird das in [7] angedeutete Problem der Homogenitätsgrade in geschlossener Form gelöst.

Jede Lie-Algebra in dieser Arbeit ist von endlicher Dimension über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Abelsche Lie-Algebren der Dimension n werden mit nL_1 bezeichnet.

2. Allgemeines. Invariantenformel

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $B = \{X_1, \dots, X_n\}$ eine gegebene Basis. Durch das Symbol $\mathfrak{g}^*$ wird der duale Raum bezeichnet, und weiter sei $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ der Raum analytischer Funktionen über $\mathfrak{g}^*$. Mit Hilfe dieser Objekte läßt sich die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ durch folgende Differentialoperatoren realisieren [8]:

$$\widehat{X}_i = C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}\,, \qquad 1 \leq i \leq n\,, \tag{1}$$

wobei $\left\{C_{ij}^k\right\}$ der Strukturtensor auf der gegebenen Basis ist und $\{x_1, \dots, x_n\}$ die kommutierenden Variablen aus $\mathfrak{g}^*$, die dual zu den Basiselementen aus B sind. Eine analytische Funktion F aus $\mathfrak{g}^*$ heißt Invariante der koadjungierten Darstellung von $\mathfrak{g}$, wenn folgendes System von partiellen Differentialgleichungen erfüllt ist:

$$\widehat{X}_i F(x_1, \dots, x_n) = C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j} F\left(x_1, \dots, x_n\right) = 0\,, \quad 1 \leq i \leq n\,. \tag{2}$$

Polynomiale Lösungen von (2) entsprechen nach Symmetriesierung der Komponenten den klassischen Casimiroperatoren. Der analytische Ansatz ist aber allgemeiner, da rationale und elementare Funktionen als Lösungen erscheinen können, die im Rahmen der einhüllenden Algebren keine Interpretation haben [5]. Die Anzahl $\mathcal{N}(\mathfrak{g})$ der funktional unabhängigen Funktionen, die das System erfüllen, ist weiter aus einfachen analytischen Methoden herzuleiten, und ist gegeben durch:

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} - \operatorname{rank}\left(C_{ij}^k x_k\right), \tag{3}$$

wobei $A(\mathfrak{g}) = (C_{ik}^k x_k)$ die Kommutatorenmatrix ist. Diese Formel ergibt ebenfalls eine obere Schranke für die Anzahl der Casimiroperatoren (sofern diese existieren)[4]. Eine äquivalente Formulierung kann man mit Hilfe von Differentialformen gewinnen. Wird auf $\mathfrak{g}^*$ der Operator d wie folgt definiert,

$$d\omega\left(X_i, X_j\right) = -C_{ij}^k \omega\left(X_k\right),\ \omega \in \mathfrak{g}^*. \tag{4}$$

[4] Für Lie-Algebren einer algebraischen Gruppe kann man zeigen, daß obige Formel die Anzahl der Casimiroperatoren ergibt [9].

so läßt sich die Algebra als System von 2-Formen

$$d\omega_k = -C_{ij}^k \omega_i \wedge \omega_j \,, \quad 1 \leq i < j \leq \dim (\mathfrak{g}) \,, \tag{5}$$

schreiben, die Maurer–Cartan-Gleichungen von $\mathfrak{g}$ heißen. Weiter sei $\mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}\{d\omega_i\}_{1\leq i\leq \dim \mathfrak{g}}$ der lineare Unterraum von $\bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$, der von den 2-Formen $d\omega_i$ erzeugt wird. Ist $\omega = a^i d\omega_i$ $\left(a^i \in \mathbb{R}\right)$ ein generisches Element in $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, so gibt es genau ein $j_0(\omega) \in \mathbb{N}$, so daß

$$\bigwedge^{j_0(\omega)} \omega \neq 0 \,, \qquad \bigwedge^{j_0(\omega)+1} \omega \equiv 0 \,. \tag{6}$$

Daraus folgt, daß $r(\omega) = 2 j_0(\omega)$ der Rang der 2-Form ω ist. Sei

$$j_0(\mathfrak{g}) = \max\{j_0(\omega) \ | \ \omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})\} \,. \tag{7}$$

Die Zahl $j_0(\mathfrak{g})$ ist eine numerische Invariante der Isomorphieklasse von $\mathfrak{g}$ [10], womit sich Formel (3) als

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} - 2 j_0(\mathfrak{g}) \tag{8}$$

umschreiben läßt.

Es hat sich gezeigt, daß für bestimmte Gruppen (z.B. Borelsche Unter-Algebren halbeinfacher Lie-Algebren oder auflösbare Lie-Algebren) der Begriff der Invarianten nicht ausreicht. Es ist daher zweckmäßig, eine schwächere Definition von Invarianz einzuführen [11]:

Definition 1 *Eine analytische Funktion $F(x_1, \ldots, x_n)$ aus $\mathfrak{g}^*$ heißt Halb-Invariante der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, wenn das System*

$$\widehat{X}_i F = \lambda_i F \,, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R} \,, \qquad 1 \leq i \leq n \tag{9}$$

für alle Erzeugenden erfüllt ist.

Halb-Invarianten sind, in gewisser Hinsicht, mit der Methode der Charakteristiken der Differentialgleichungen verbunden.

Lemma 1 *Sei $\widehat{X} = \alpha^i C_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j}$ ein Differentialoperator aus der Realisierung (1), und $F_1, F_2 \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ analytische Funktionen, für die die Gleichungen*

$$\widehat{X}(F_1) = \lambda_1 F_1 \,, \quad \widehat{X}(F_2) = \lambda_2 F_2 \tag{10}$$

gelten. Dann ist die rationale Funktion $F_1^{\lambda_2} F_2^{-\lambda_1}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\widehat{X}(F) = 0 \,. \tag{11}$$

Beweis. Für jede Variable x_i ergibt sich die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(F_1^{\lambda_2}F_2^{-\lambda_1}\right)=\left(F_1^{\lambda_2}F_2^{-\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_i}-\frac{\lambda_1}{F_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_i}\right). \tag{12}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (11) ergibt

$$\begin{aligned}\widehat{X}\left(F_1^{\lambda_2}F_2^{-\lambda_1}\right) &= \alpha^i C_{ij}^k x_k\left(F_1^{\lambda_2}F_2^{-\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_j}-\frac{\lambda_1}{F_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_j}\right)\\ &= \lambda_2 F_1^{\lambda_2-1}F_2^{-\lambda_1}\left(\alpha^i C_{ij}^k x_k\frac{\partial F_1}{\partial x_j}\right)\\ &\quad -\lambda_1 F_1^{\lambda_2}F_2^{-\lambda_1-1}\left(\alpha^i C_{ij}^k x_k\frac{\partial F_2}{\partial x_j}\right)\\ &= \lambda_2 F_1^{\lambda_2-1}F_2^{-\lambda_1}(\lambda_1 F_1)-\lambda_1 F_1^{\lambda_2}F_2^{-\lambda_1-1}(\lambda_2 F_2)=0\,.\end{aligned}$$

■

Daraus folgt, daß rationale Funktionen von Casimiroperatoren dazu dienen können, um Invarianten von bestimmten Erweiterungen berechnen zu können. Dieser Ansatz ist typisch für die Bestimmung von Invarianten auflösbarer Lie-Algebren [12].

3. Erweiterungen inhomogener Lie-Algebren

Sei $\mathfrak{s}$ eine halbeinfache Lie-Algebra und Λ eine Darstellung von $\mathfrak{s}$, die keine Kopie der trivialen Darstellung enthält. Damit ist versichert, daß die Algebra $\mathfrak{g}$ mit der Levi-Zerlegung $\mathfrak{s}\overrightarrow{\oplus}_{\Lambda}(\dim\Lambda)L_1$ perfekt ist, d.h., die Bedingung $\mathfrak{g}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ erfüllt. Solche Lie-Algebren besitzen immer eine Invariantenbasis, die von Casimiroperatoren erzeugt wird [9]. Ein wichtiges Problem dieser Algebren ist, diejenigen zu klassifizieren, die als Kontraktion einer halbeinfachen Lie-Algebra stammen [13]. Solche inhomogenen Algebren haben eine wichtige Eigenschaft, nämlich, daß sie alle auf bestimmte Art erweitert werden können.

Lemma 2 *Sei* $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\overrightarrow{\oplus}_{\Lambda}(\dim\Lambda)L_1$. *Dann existiert eine Abbildung* $f:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ *derart, daß* $f|_{\mathfrak{s}}\equiv 0$, $f|_{(\dim\Lambda)L_1}=\mathrm{Id}_{(\dim\Lambda)L_1}$ *und* $f[X,Y]=[f(X),Y]+[X,f(Y)]$ *erfüllt sind*[5].

Der Beweis ist trivial und folgt sofort aus der Jacobi-Gleichung. Eine direkte Folge dieser Eigenschaft ist die Existenz einer Erweiterung $\widehat{\mathfrak{g}}$ von $\mathfrak{g}$ derart, daß $[\widehat{\mathfrak{g}},\widehat{\mathfrak{g}}]=\mathfrak{g}$ gilt. Die geometrische und physikalische Interpretation

[5] In anderen Worten, f ist eine Derivation der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Siehe [5].

dieser Erweiterung ist, daß man der Lie-Algebra einen Dilatationsoperator hinzufügt, der nur auf dem Translationsraum agiert, und damit die innere Symmetrie invariant läßt.

Lemma 3 *Für die Erweiterung $\widehat{\mathfrak{g}}$ gilt $\mathcal{N}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \mathcal{N}(\mathfrak{g}) - 1$.*

Beweis. Sei $\{\omega_1, \ldots, \omega_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_m, \theta\}$ eine Basis von $\widehat{\mathfrak{g}}^*$, die zur Basis $\{X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m, Z\}$ dual ist. Sind $\{d\omega_k, d\sigma_l\}$ die Maurer–Cartan-Gleichungen (5) von $\mathfrak{g}$, so sind jene der Erweiterung einfach

$$\begin{aligned} d\widehat{\omega}_k &= d\omega_k\,, & 1 \leq k \leq n\,, \\ d\widehat{\sigma}_k &= d\sigma_k + \sigma_k \wedge \eta\,, & 1 \leq k \leq m\,, \\ d\theta &= 0\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Insbesondere beachte man, daß wir aufgrund der Bedingung $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ für jedes $1 \leq k \leq m$ auch $d\sigma_k \neq 0$ erhalten. Sei $p = \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} - \mathcal{N}\left(\mathfrak{g}\right)\right) = j_0\left(\mathfrak{g}\right)$. Dann gibt es eine 2-Form $\eta = a^i d\omega_i + b^j d\sigma_j \in \mathcal{L}\left(\mathfrak{g}\right)$ mit $\bigwedge^p \eta \neq 0$ und $\bigwedge^{p+1} \eta \equiv 0$. In $\mathcal{L}\left(\widehat{\mathfrak{g}}\right)$ wird die 2-Form

$$\widehat{\eta} = a^i d\widehat{\omega}_i + b^j d\widehat{\sigma}_j = a^i d\omega_i + b^j d\sigma_j + \sum_{l=1}^{m} \sigma_l \wedge \theta \tag{14}$$

gewählt. Durch Induktion kann man leicht zeigen, daß für jedes $q \geq 1$ die Identität

$$\bigwedge^{q} \widehat{\eta} = \bigwedge^{q} \eta + q \bigwedge^{q-1} \eta \wedge \left(\sum_{l=1}^{m} \sigma_l \wedge \theta \right) \tag{15}$$

gültig ist. Speziell folgt für $q = p + 1$

$$\bigwedge^{p+1} \widehat{\eta} = (p+1) \left(\bigwedge^{p} \eta \right) \wedge \left(\sum_{l=1}^{m} \sigma_l \wedge \theta \right) \neq 0\,, \tag{16}$$

womit

$$\mathcal{N}\left(\widehat{\mathfrak{g}}\right) = \dim \mathfrak{g} + 1 - 2\left(j_0\left(\mathfrak{g}\right) + 1\right) = \mathcal{N}\left(\mathfrak{g}\right) - 1 \tag{17}$$

folgt. ■

Proposition 1 *Sei $\widehat{\mathfrak{g}}$ eine Lie-Algebra und $\mathfrak{g}$ eine Unterlagebra der Kodimension Eins, so daß die Identität $\mathcal{N}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \mathcal{N}(\mathfrak{g}) - 1$ gültig ist. Dann ist jede Invariante von $\widehat{\mathfrak{g}}$ ebenfalls eine Invariante der Unteralgebra $\mathfrak{g}$. Speziell gibt es ein Element $X \notin \mathfrak{g}$, so daß*

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

für jede Invariante C von $\mathfrak{g}$ gilt .

Beweis. Aus der Theorie induzierter Darstellungen folgt, daß für die Reduktioneskette $\mathfrak{g} \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}$ neben den Invarianten von $\widehat{\mathfrak{g}}$ und $\mathfrak{g}$ genau

$$\begin{aligned} n &= \tfrac{1}{2}\left(\dim \widehat{\mathfrak{g}} - \mathcal{N}(\widehat{\mathfrak{g}}) - \dim \mathfrak{g} - \mathcal{N}(\mathfrak{g})\right) + l' \\ &= (1 - \mathcal{N}(\mathfrak{g})) + l' \geq 0 \end{aligned}$$

weitere Operatoren[6] in der einhüllenden Algebra von $\widehat{\mathfrak{g}}$ nötig sind, um die Multiplizitäten der induzierten Darstellungen zu unterscheiden, wobei l' die Anzahl der Invarianten von $\widehat{\mathfrak{g}}$ ist, die nur von den Erzeugenden der Unteralgebra $\mathfrak{g}$ abhängen. Da obige Ungleichung $l' \geq \mathcal{N}(\mathfrak{g}) - 1$ impliziert, ist l' in der Tat maximal, so daß jede Invariante von $\widehat{\mathfrak{g}}$ nur von den Erzeugenden der Unteralgebra $\mathfrak{g}$ abhängt. Daher existiert ein nicht-verschwindendes Element $X \in \widehat{\mathfrak{g}}$, welches nicht zur Unteralgebra gehört, und für welches die Bedingung

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \tag{19}$$

für jede Invariante C von $\mathfrak{g}$ erfüllt wird. ■

Aus diesem Satz erhalten wir als Folge, daß sich die Invarianten dieser Art von Erweiterungen einfach aus Funktionen der Casimiroperatoren der inhomogenen Lie-Algebren $\mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} nL_1$ ergeben. Wir wollen noch die präzise Form dieser Funktionen bestimmen. Folgender Satz beinhaltet eine wichtige Eigenschaft von Lie-Algebren $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} (\dim \Lambda) L_1$ mit abelschem Radikal und einer Darstellung Λ, die nicht die triviale Darstellung enthält.

Satz 1 *Sei* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} (\dim \Lambda) L_1$. *Dann ist jeder Casimiroperator* C *von* $\mathfrak{g}$ *ein homogenes Polynom in den Variablen des Radikals* $(\dim \Lambda) L_1$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage mit Hilfe von Kontraktionen von Lie-Algebren und Invarianten [14]. Wir definieren folgenden Isomorphismus $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$:

$$f|_{\mathfrak{s}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{s}}\,, \quad f|_{\Lambda(\dim \Lambda) L_1} = \frac{1}{t} \mathrm{Id}_{(\dim \Lambda) L_1}\,.$$

Es läßt sich sofort nachweisen, daß die Transformation f die Klammer von $\mathfrak{g}$ für jedes t erhält. Speziell ist

$$\lim_{t \to \infty} f^{-1}\left[f(Z_1), f(Z_2)\right] = [Z_1, Z_2]\,, \qquad \forall Z_1, Z_2 \in \mathfrak{g}\,. \tag{20}$$

[6] Diese Operatoren werden auch Untergruppenskalare gennant, da sie nur mit den Erzeugenden der Untergruppe kommutieren. Solche Operatoren wurden zuerst von G. Racah in der Spektroskopie erkannt [8].

Anders ausgedrückt, ist die von f erzeugte Kontraktion von Lie-Algebren trivial[7]. Sei nun C ein Casimiroperator der Ordnung p von $\mathfrak{g}$. Explizit läßt sich diese Invariante als

$$C(Z_1,\dots,Z_n)=\alpha^{i_1\dots i_p}Z_{i_1}\dots Z_{i_p}$$

in den Erzeugenden von $\mathfrak{g}$ schreiben. Auf der transformierten Basis erhalten wir dann

$$C(f(Z_1),\dots,f(Z_n))=t^{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}}\alpha^{i_1\dots i_p}Z_{i_1}\dots Z_{i_p}\,, \tag{21}$$

wobei

$$n_{i_l}=\begin{cases}1, & \text{falls } Z_{i_l}\in(\dim\Lambda)\,L_1\,,\\ 0, & \text{falls } Z_{i_l}\in\mathfrak{s}\end{cases}$$

gilt. Sei

$$M=\max\left\{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}\quad|\quad\alpha^{i_1\dots i_p}\neq 0\right\}. \tag{22}$$

M ist damit die maximale Ordnung von C als Polynom in der Translationsvariablen betrachtet. Wir definieren nun den Grenzwert

$$C'=\lim_{t\to\infty}t^{-M}C(f(Z_1),\dots,f(Z_n))=\sum_{n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}=M}\alpha^{i_1\dots i_p}Z_{i_1}\dots Z_{i_p}\,. \tag{23}$$

Es folgt unmittelbar, daß C' eine Invariante der kontrahierten Lie-Algebra ist [14, 15]. Da aber wegen (20) die Kontraktion trivial ist, und sogar die Klammer invariant läßt, so muß folgende Identität gelten:

$$C'=C\,.$$

D.h., der Casimiroperator bleibt ebenfalls erhalten. Das bedeutet, daß C ein homogenes Polynom der Ordnung $\deg_\Lambda C$ in den Variablen des Radikals sein muß, wodurch die Behauptung bewiesen ist. ■

Dieses Ergebnis verallgemeinert die von Rosen in [16] benutzte Expansionsmethode auf willkürliche inhomogene Lie-Algebren. Weiter bemerken wir, daß die Aussage im allgemeinen falsch ist, wenn das Radikal nicht-abelsch ist oder Λ die triviale Darstellung D_0 von $\mathfrak{s}$ enthält.

[7] Wir erinnern kurz an die Definition von Kontraktion. Sei $\Phi_t\in End(\mathfrak{g})$ eine Menge von linearen Isomorphismen, wobei $t\in\mathbb{N}$. Für jedes Paar $X,Y\in\mathfrak{g}$ definieren wir $[X,Y]_{\Phi_t}=[\Phi_t(X),\Phi_t(Y)]$. Dann ist $[X,Y]_{\Phi_t}$ die Klammer der Lie-Algebra auf der transformierten Basis. Existiert der Grenzwert $[X,Y]_\infty:=\lim_{t\to\infty}\Phi_t^{-1}\,[\Phi_t(X),\Phi_t(Y)]$ für alle $X,Y\in\mathfrak{g}$, so ergibt sich eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}'$, die Kontraktion von $\mathfrak{g}$ heißt. Sind $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ nicht-isomorph, so heißt die Kontraktion nicht-trivial.

Korollar 1 *Für jeden Casimiroperator* C *von* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} (\dim \Lambda) L_1$ *gilt die Ungleichung* $\deg_{\Lambda} C \geq 1$.

Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Struktur des Systems von partiellen Differentialgleichungen (2). Wäre nämlich $\deg_{\Lambda} C = 0$, so würde der Operator nur von den Erzeugenden der Levi-Unteralgebra abhängen, und da $\mathrm{mult}_{\Lambda} D_0 = 0$ ist, kann es keine Lösung von (2) sein. Ist im Gegensatz $\deg_{\Lambda} C = \deg C$, so hängt C nur von den Variablen des Radikals ab. Diese Pathologie ist typisch für Darstellungen sehr hoher Dimension [17].

Lemma 4 *Sei* $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} (\dim \Lambda) L_1$ *und* $\widehat{\mathfrak{g}}$ *die Erweiterung von* $\mathfrak{g}$ *durch die Derivation* f *aus Lemma 2. Dann ist jeder Casimiroperator von* $\mathfrak{g}$ *eine Halb-Invariante von* $\widehat{\mathfrak{g}}$. *Insbesondere besitzt* $\widehat{\mathfrak{g}}$ *keine klassischen Casimir-Operatoren.*

Beweis. Sei $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m, Z\}$ eine Basis von $\widehat{\mathfrak{g}}$, so daß $\{X_1, \dots, X_n\}$ eine Basis von $\mathfrak{s}$, $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ eine Basis des abelschen Radikals $(\dim \Lambda)\, L_1$ und Z die Erweiterungserzeugende ist. Ist C ein Casimiroperator der Ordnung d, so folgt aus dem System von Differentialgleichungen (2) die Gleichung für die Erweiterungserzeugende:

$$\widehat{Z}\,(C) = \sum_{j=1}^{m} y_j \frac{\partial C}{\partial y_j}\,.$$

Da weiter C wegen Satz 1 in den Variablen $\{y_1, \dots, y_m\}$ homogen der Ordnung $\deg_{\Lambda} C$ ist, erhalten wir nach dem Eulerschen Satz

$$\sum_{,j=1}^{m} y_j \frac{\partial C}{\partial y_j} = (\deg_{\Lambda}\, C)\, C\,,$$

und daher ist C eine Halb-Invariante von $\widehat{\mathfrak{g}}$. Weiter folgt aus Lemma 1, daß die rationalen Funktionen

$$F_{ij} = C_i^{-\deg_{\Lambda} C_j} C_j^{\deg_{\Lambda} C_i}$$

eine Basis von Invarianten von $\widehat{\mathfrak{g}}$ bilden. Da weiter wegen Korollar 1 für jeden Casimiroperator C der erweiterten Algebra $\deg_{\Lambda} C \geq 1$ gilt, kann es keine polynomiale Invarianten von $\widehat{\mathfrak{g}}$ geben. ■

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß diese Ergebnisse für die Untersuchung der Unabhängigkeit von kontrahierten Casimiroperatoren und -Invarianten ebenfalls von Interesse sind [15], da sie erlauben, neben der Ordnung des Operators noch eine den Homogenitätsgrad in den Translationsvariablen als zweite numerische Kennzahl einzuführen.

Proposition 2 *Sei* $\mathfrak{s}$ *eine einfache Lie-Algebra und* $\mathfrak{s} \rightsquigarrow \mathfrak{s}'\overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} nL_1$ *eine Kontraktion. Sind* C_1, C_2 *zwei Casimiroperatoren von* $\mathfrak{s}$*, so sind die kontrahierten Invarianten* C_1', C_2' *unabhängig, wenn die Gleichung*

$$\deg_{\{Y_1,\dots,Y_n\}} C_k' = m_0\,, \qquad k = 1, 2\,,$$

gilt, wobei $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ *eine Basis von* nL_1 *ist.*

Beweis. Sei $\{X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r\}$ eine Basis von $\mathfrak{s}$, so daß $\{X_1, \dots, X_r\}$ die Unteralgebra $\mathfrak{s}'$ erzeugt und $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ eine Basis von nL_1 ist. Auf dieser Basis können die Casimiroperatoren wie folgt geschrieben werden:

$$C_1 = \sum_{k=1}^{m_1} \Phi_{1,k}\,, \qquad C_2 = \sum_{k=1}^{m_2} \Phi_{2,k}\,,$$

wobei $\Phi_{i,k}$ jeweils ein homogenes Polynom der Ordnung k in den Variablen $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ ist. Die Kontraktion $\mathfrak{s} \rightsquigarrow \mathfrak{s}'\overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} nL_1$ ist durch die Endomorphismen

$$\begin{aligned} F_t\,(X_i) &= X_i\,, \quad 1 \le i \le r\,, \\ F_t\,(Y_j) &= \tfrac{1}{t} Y_j\,, \quad 1 \le j \le n \end{aligned}$$

definiert. Werden die Invarianten auf der transformierten Basis geschrieben, und betrachten wir den Grenzwert nach t, so ergeben sich Invarianten der Kontraktion $\mathfrak{s}'\overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} nL_1$ als [15]:

$$C_i' = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{m_i}} C_i = \Phi_{i,m_i}\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

Da nach Voraussetzung $m_1 = m_2 = m_0$ ist und $\deg C_1 \neq \deg C_2$ gilt (wegen Einfachheit von $\mathfrak{s}$), so sind C_1' und C_2' funktional unabhängig. ∎

Aus diesem Satz ergibt sich ein weiteres interessantes Problem, nämlich die Bestimmung der Homogenitätsgrade der Casimiroperatoren inhomogener Lie-Algebren, die man als Kontraktion einer halbeinfachen Algebra erhält.

4. Casimiroperatoren von $I\mathfrak{so}(p,q)$ und Invarianten der inhomogenen Weyl-Algebra $W(p,q)$

In diesem Absatz zeigen wir, daß man die Invarianten der inhomogenen Weyl-Algebra als Quotient von Casimiroperatoren der inhomogenen pseudoorthogonalen Lie-Algebra erhalten kann. Damit ist die in [7] unbeantwortete Frage des Homogenitätsgrades der Invarianten gelöst. Zu diesem Zweck entwickeln wir, als Anwendung obiger Ergebnisse über allgemeine inhomogene Algebren, eine zum Satz von Gel'fand [18] analoge Aussage für die

Lie-Algebra $I\mathfrak{so}(p,q)$. Wie bekannt besteht diese aus $\frac{1}{2}N(N+1)$ schiefsymmetrischen Erzeugenden $E_{\mu\nu}=-E_{\nu\mu}, P_\mu$, die folgende Kommutationsregeln erfüllen:

$$\begin{aligned}[E_{\mu\nu},E_{\lambda\sigma}] &= g_{\mu\lambda}E_{\nu\sigma}+g_{\mu\sigma}E_{\lambda\nu}-g_{\nu\lambda}E_{\mu\sigma}-g_{\nu\sigma}E_{\lambda\mu}\,,\\ [E_{\mu\nu},P_\rho] &= g_{\mu\rho}P_\nu-g_{\nu\rho}P_\mu\,,\end{aligned}$$

wobei

$$g=\mathrm{diag}\,(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)\;.$$

die Diagonalmatrix der Pseudometrik darstellt und $N=p+q$ ist. Aus verschiedenen Arbeiten (siehe z.B. [7, 20]) ist bekannt, daß $\mathcal{N}\,(I\mathfrak{so}\,(p,q))=\left[\frac{p+q+1}{2}\right]$ gilt. Wird die in [16] zum ersten mal beobachtete Kontraktion $\mathfrak{so}(p,q+1)\rightsquigarrow I\mathfrak{so}(p,q)$ im Zusammenhang mit dem Grenzwert von Casimiroperatoren benutzt, so kann man die Invarianten der Kontraktion aus denen der orthogonalen Algebra $\mathfrak{so}(p,q+1)$ erhalten. Folgende Proposition ist ein Spezialfall der Kontraktionsmethode von Casimiroperatoren einfacher Lie-Algebren mittels Determinantenformeln, die in der Arbeit [19] entwickelt wurde, aus dessen Grund wir hier auf einen detaillierten Beweis verzichten.

Proposition 3 *Ein maximales System unabhängiger unsymmetrisierter Casimiroperatoren der Lie-Algebra $I\mathfrak{so}(p,q)$ ist durch die Koeffizienten C_k des charakteristischen Polynoms $P(T)$*

$$P(T):=|A_{p,q}-T\mathrm{Id}_N|+T\left|(A_{p,q})_{(N+1,N+1)}-T\mathrm{Id}_{N-1}\right|, \qquad (24)$$

gegeben, wobei

$$A_{p,q}:=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & -g_{jj}e_{1j} & \ldots & -g_{NN}e_{1,N} & p_1T\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ e_{1j}g_{11} & \ldots & 0 & \ldots & -g_{NN}e_{j,N} & p_jT\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ e_{1,N}g_{11} & \ldots & g_{jj}e_{j,N} & \ldots & 0 & p_NT\\ -p_1g_{11} & & -p_jg_{jj} & & -p_Ng_{NN} & 0\end{pmatrix} \qquad (25)$$

und $(A_{p,q})_{(N+1,N+1)}$ die Untermatrix N-ter Ordnung ist, die durch streichen der letzten Spalte und Reihe aus $A_{p,q}$ entsteht.

Die inhomogene Weyl-Algebra $W(p,q)$, im Rahmen der Feldtheorie als Verallgemeinerung der Poincaré-Algebren eingeführt, ist nicht weiteres als eine Erweiterung der Algebra $I\mathfrak{so}(p,q)$, wie sie im Abschnitt 3 besprochen wurden. Daher sind die Kommutatoren von $W(p,q)$ jene von $I\mathfrak{so}(p,q)$, zu denen noch die Klammer

$$[D,P_\rho] \;=\; -P_\rho\,,\quad 1\le\rho\le N$$

hinzugefügt wird. Der Dilatationsoperator D kommutiert also mit der Levi-Unteralgebra. Wegen Satz 1 erhalten wir also für jeden Casimiroperator C_i von $I\mathfrak{so}(p,q)$ die Beziehung

$$[D, C_i] = \lambda_i C_i \,,$$

wobei hier λ_i die Ordnung von C_i als homogenes Polynom in der Variablen P_μ bezeichnet. Insbesondere gilt für jeden Casimiroperator von $I\mathfrak{so}(p,q)$ die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial d} = 0 \,.$$

Aus Lemma 1 folgt dann, daß die rationalen Ausdrücke $C_i^{\lambda_j} C_j^{-\lambda_i}$ die Gleichung

$$\widehat{D}(F) := \sum_{i=1}^{N} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i} = 0 \,. \tag{26}$$

erfüllen, und damit die Invarianten der Weylschen Algebra $W(p,q)$ ergeben. Wegen Lemma 3 gilt weiter

$$\mathcal{N}(W(p,q)) = \left[\frac{p+q-1}{2}\right] . \tag{27}$$

Um die Invarianten der Lie-Algebra $W(p,q)$ in geschlossener Form angeben zu können, müssen wir für jede Signatur (p,q) die Homogenitätsgrade λ_i berechnen. Da bis jetzt keine geschlossene Formel für die Invarianten der pseudo-orthogonalen Algebren vorlag, konnten die Zahlen λ_i bis auf die einfachsten Fälle nicht bestimmt werden. Mit Hilfe der Determinantenformel (24) zeigen wir nun, daß die λ_i nicht von der Dimension und der Ordnung der Casimiroperatoren abhängen, sondern für alle Fälle konstant sind.

Proposition 4 *Für jeden Casimiroperator C_i von $I\mathfrak{so}(p,q)$ gilt $\lambda_i = 2$.*

Beweis. Nach obiger Konstruktion der Casimiroperatoren, genügt es zu zeigen, daß für alle $1 \leq i,j,k \leq N$ die dritte Ableitung von $P(T)$ nach den Translationsvariablen verschwindet, d.h.,

$$\frac{\partial^3}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k} P\,(T) = 0 \,.$$

Aus Formel (24) ergibt sich

$$P(T) := \left| A_{p,q} - T\mathrm{Id}_N \right| + T \left| (A_{p,q})_{(N+1,N+1)} - T\mathrm{Id}_{N-1} \right| \,.$$

Da die Determinante $\left|(A_{p,q})_{(N+1,N+1)} - T\mathrm{Id}_{N-1}\right|$ auf der rechten Seite nicht von den Variablen p_i abhängt, erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial P\,(T)}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \begin{vmatrix} -T & \dots & -g_{jj}e_{1j} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & p_1 T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ e_{1j}g_{11} & \dots & -T & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & p_j T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & g_{jj}e_{j,N} & \dots & -T & p_N T \\ -p_1 g_{11} & & -p_j g_{jj} & & -p_N g_{NN} & -T \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Reduzieren wir jetzt die Spalten der Matrix $A_{p,q} - T\mathrm{Id}_N$ mit Hilfe der elementaren Matrizenoperationen, so können wir dieser Ergebnis in folgender Weise umschreiben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(T)}{\partial p_i} &= \begin{vmatrix} -T & \dots & 0 & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & p_1 T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{11}e_{1j} & \dots & 0 & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & p_j T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & 0 & \dots & -T & p_N T \\ -p_1 g_{11} & & -\delta_{ij} g_{jj} & & -p_N g_{NN} & -T \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} -T & \dots & -g_{jj}e_{1j} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_{1j}g_{11} & \dots & -T & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & \delta_{ij} T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & g_{jj}e_{j,N} & \dots & -T & 0 \\ -p_1 g_{11} & & -p_j g_{jj} & & -p_N g_{NN} & 0 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Wird diese Funktion erneut nach der Variablen p_k differenziert, so ergibt sich der Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P(T)}{\partial p_i \partial p_k} &= \frac{\partial}{\partial p_k} \begin{vmatrix} -T & \dots & 0 & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & p_1 T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{11}e_{1j} & \dots & 0 & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & p_j T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{11}e_{1,N} & \dots & 0 & \dots & -T & p_N T \\ -p_1 g_{11} & & -\delta_{ij} g_{jj} & & -p_N g_{NN} & -T \end{vmatrix} \\ &+ \frac{\partial}{\partial p_k} \begin{vmatrix} -T & \dots & -g_{jj}e_{1j} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{11}e_{1j} & \dots & -T & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & \delta_{ij} T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{11}e_{1,N} & \dots & g_{jj}e_{j,N} & \dots & -T & 0 \\ -p_1 g_{11} & & -p_j g_{jj} & & -p_N g_{NN} & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$= 2\begin{vmatrix} -T & \dots & 0 & \dots & -g_{ll}e_{1l} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_{1j}g_{11} & \dots & 0 & \dots & -T & \dots & -g_{NN}e_{j,N} & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_{1l}g_{11} & \dots & 0 & \dots & g_{ll}e_{kl} & \dots & -g_{NN}e_{lN} & \delta_{kl}T \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & 0 & \dots & g_{ll}e_{lN} & \dots & -T & 0 \\ -p_1g_{11} & & -\delta_{ij}g_{jj} & \dots & -p_lg_{ll} & \dots & -p_Ng_{NN} & 0 \end{vmatrix}.$$

Entwickeln wir nun diese Determinante nach der j-schen und letzten Spalte, so ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{\partial^2 P(T)}{\partial p_i \partial p_k} = 2\delta_{ik}T \begin{vmatrix} -T & \dots & \dots & -g_{ll}e_{1l} & \dots & -g_{NN}e_{1,N} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ e_{1j}g_{11} & \dots & \dots & -T & \dots & -g_{NN}e_{j,N} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ e_{1,N}g_{11} & \dots & \dots & g_{ll}e_{lN} & \dots & -T \end{vmatrix}.$$

Daraus folgt, daß die Funktion $\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_k} P(T)$ nicht mehr von der Variablen p_i abhängt. Daher folgt unmittelbar

$$\frac{\partial^3 P(T)}{\partial p_i \partial p_k \partial p_m} = 0$$

und der Homogenitätsgrad aller Casimiroperatoren ist gleich zwei. ■

Korollar 2 *Eine Basis von rationalen Invarianten der inhomogenen Weyl-Algebra $W(p,q)$ ist durch die Quotienten $F_i = C_i C_1^{-1}$ der Casimiroperatoren aus (24) gegeben.*

Als Beispiel betrachten wir die 11-dimensionale inhomogene Weyl-Algebra $W(1,3)$, die von besonderer Wichtigkeit ist, da sie der konformen Gravitationstheorie von Weyl unterliegt [3]. Obwohl sich in diesem Falle die Invariante der Weyl-Algebra leicht aus den klassischen Methoden ergibt, liefert obige Formel einen praktischen Ausdruck. Die Invarianten der inhomogenen Algebren $I\mathfrak{so}(1,3)$ ergeben sich aus der Determinantenformel (24) als:

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{\mu=1}^{4} g_{\mu\mu}p_\mu^2 \\ C_2 &= -2\sum_{\mu<\nu<\rho} g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}g_{\rho\rho}\left(\epsilon_{\mu\nu\rho}p_\mu p_\nu e_{\mu\rho}e_{\nu\rho} + \epsilon_{\mu\rho\nu}p_\mu p_\rho e_{\mu\nu}e_{\nu\rho} + \epsilon_{\nu\rho\mu}p_\nu p_\rho e_{\nu\rho}e_{\mu\rho}\right) \\ &\quad + \sum_{\mu<\nu} g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}e_{\mu\nu}^2 \left(\sum_{\rho\neq\mu,\nu} g_{\rho\rho}p_\rho^2\right), \end{aligned}$$

wobei $g = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$ ist. Die rationale Invariante der Erweiterung ist damit $C = C_2 C_1^{-1}$. Es ist zu beachten, daß C, als Funktion der Translationsvariablen p_i, den Homogenitätsgrad Null hat.

Schlußbemerkungen

Wir haben bewiesen, daß die Casimiroperatoren einer inhomogenen Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \overrightarrow{\oplus}_{\Lambda} nL_1$ homogene Polynome in den Translationsvariablen sind, sofern die Darstellung Λ keine Kopien der trivialen Darstellung von $\mathfrak{s}$ besitzt. Aus der Existenz einer Derivation, die als Identität auf dem Radikal agiert, ergibt sich eine Erweiterung von $\mathfrak{g}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Casimiroperator von $\mathfrak{g}$ eine Halb-Invariante ist. Diese Art von Erweiterungen sind für Verallgemeinerung der Eichtheorien von Interesse, da die Information der erweiterten Algebra stets in Form von rationalen Funktionen erhalten bleibt. Mit Hilfe dieser Tatsache konnten wir weiter ein Kriterium für die Unabhängigkeit von kontrahierten Casimiroperatoren erhalten.

Als Anwendung der Methoden haben wir gezeigt, daß die Casimiroperatoren der inhomogenen pseudo-orthogonalen Algebra alle denselben Homogenitätsgrad in den Variablen des abelschen Radikals haben, wodurch sich leicht ergibt, daß die rationalen Invarianten der inhomogenen Weyl-Algebra als Quotienten dieser Operatoren zu erhalten sind.

Aus Satz 1 ergibt sich weiter ein Problem, daß bis jetzt in allgemeiner Form nur für inhomogene Algebren mit Levi-Unteralgebra vom Rang Eins gelöst worden ist [17], nämlich die Bestimmung der Homogenitätsgrade der Casimiroperatoren. Dies trifft besonders für jene Darstellungen Λ einer einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{s}$ zu, für welche die Ungleichung $\dim \Lambda < \dim \mathfrak{s}$ gilt. Die genaue Struktur der Casimiroperatoren solcher Algebren ist nicht bestimmt worden, obwohl diese Operatoren für die Analyse der Verzweigungsregeln irreduzibler Darstellungen in bezug auf Reduktionsketten $\mathfrak{s} \supset \mathfrak{s}'$ halbeinfacher Lie-Algebren von großer Wichtigkeit sind [6]. In dieser Hinsicht wäre es wünschenswert, über eine allgemeine Klassifizierung der inhomogenen Algebren zu verfügen, die sich aus Kontraktionen von einfachen Lie-Algebren ergeben. Das Problem hängt mit der Klassifierung maximaler halbeinfacher Unteralgebren eng zusammen. Ergebnisse in dieser Richtung existieren derzeit nur bis zur Dimension acht [13].

REFERENCES

[1] B. Sakita, *Phys. Rev.* **B136**, 1756 (1964); W. Rühl, CERN Preprint (Th. 505); H. Bacry, A. Kihlberg *Commun. Math. Phys.* **1**, 150 (1965).

[2] R. Mirman, *J. Math. Phys.* **9**, 37 (1968); N. Aizawa, *Rep. Math. Phys.* **49**, 77 (2001).

[3] F. Mansouri, *Phys. Rev.* **D24**, 1056 (1981); *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1021 (1979).

[4] J.T. Wheeler, *J. Math. Phys.* **39**, 299 (1998).

[5] A.O. Barut, R. Raczka, *The Theory of Group Representations and Applications*, PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw 1980.

[6] F. Iachello, *Lie Algebras and Applications, Lecture Notes in Physics* 708, Speinger Verlag, N.Y. 2006.

[7] A.P. Demichev, N.F. Nelipa, *Vestnik Mosk. Univ. Ser. III Fiz. Astron.* **21**, 23 (1980).

[8] G. Racah, *Group Theory and Spectroscopy*, Princeton Univ. Press, N.J. 1951; U. Mutze, *Z. Phys.* **229**, 224 (1969).

[9] L. Abellanas, L.M. Alonso, *J. Math. Phys.* **16**, 1580 (1975).

[10] R. Campoamor-Stursberg, *Phys. Lett.* **A327**, 138 (2004).

[11] V.V. Trofimov, *Vvedenie v geometriyu mnogoobrazii' s simmetriyami*, Izdat MGU, Moskva 1989.

[12] V. Boyko, J. Patera, R. Popovych, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 5749 (2006); *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 113 (2007).

[13] R. Campoamor-Stursberg, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 5355 (2007).

[14] Ya.Kh. Lykhmus, *Predel'nye Gruppy Li*, (Institut fiziki i astronomii AN Estonskoi' SSR), Tartu 1969; R. Campoamor-Stursberg, *Acta Phys. Pol. B* **34**, 3901 (2003).

[15] E. Weimar-Woods, In *Proc. XXI Int. Colloq. Group Theoretical Methods in Physics (Goslar)*, vol 1, World Scientific, Singapore 1996, p. 132.

[16] J. Rosen, *J. Math. Phys.* **9**, 1305 (1968).

[17] R. Campoamor-Stursberg, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 1357 (2003).

[18] I.M. Gel'fand, *Mat. Sbornik* **26**, 103 (1950).

[19] R. Campoamor-Stursberg, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 2325 (2006).

[20] F.J. Herranz, M. Santander, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 5411 (1997); F.J. Herranz, J.C. Perez Bueno, M. Santander, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 5327 (1998).