GRUPPENSTRUKTUR UND FELDGLEICHUNGEN IM EINSTEIN-KOSMOS

Group Structure and Field Equations in Einstein Universe

von D. Kramer

Sektion Physik der Universität Jena*

(*Eingegangen am 19. Februar 1972*)

Die Isometriegruppe des Einsteinkosmos hat zwei Casimiroperatoren, deren Eigenwertgleichungen mit den physikalischen Feldgleichungen verglichen werden. Es ergibt sich ein diskretes Spektrum von Eigenwerten der Energie.

1. *Einleitung*

Untersucht werden freie Felder (Klein-Gordon-, Dirac- und Maxwell-Feld) in einem Riemannschen Raum (Einstein-Kosmos) mit vorgegebener Metrik, d. h. die Rückwirkung dieser Felder auf die Raumkrümmung wird vernachlässigt. Singularitätenfreie Lösungen der Feldgleichungen, die Eigenfunktionen der Energie sind, wurden in [1] bestimmt. Im folgenden interessieren wir uns nur für die zugehörigen Eigenwerte. In Analogie etwa zu den diskreten Energiewerten eines Elektrons in einem Kasten erwarten wir auch hier ein diskretes Spektrum; denn der physikalische Ortsraum ist geschlossen, sein Volumen ist endlich. Grundsätzlich anders sind die Verhältnisse im flachen Raum, wo freie Teilchen (ebene Wellen) ein kontinuierliches Energiespectrum aufweisen.

Bei der expliziten Berechnung der Eigenwerte benutzen wir weitgehend gruppentheoretische Hilfsmittel — im Unterschied zu der in [1] angewandten Polynommethode. Wir bringen die Casimir-Operatoren (Gruppeninvarianten) mit den Differentialoperatoren physikalischer Feldgleichungen in Verbindung und gewinnen aus diesem Zusammenhang in den einzelnen Fällen unmittelbar das (diskrete) Eigenwertspektrum.

In analoger Weise werden in [2] freie Felder im de Sitter-Raum behandelt.

---

* Adresse: Sektion Physik der Universität Jena, DDR-69 Jena, Max-Wien-Platz 1, DDR.

2. *Lie-Ableitungen*

Einer Bewegungsgruppe G_r in einem Riemannschen Raum V_n entsprechen r linear unabhängige Killing-Vektoren ξ_a^μ ($a = 1 \dots r$, $\mu = 1 \dots n$). Die Gruppenoperatoren

$$X_a \equiv \xi_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

sind Invarianten in bezug auf beliebige Koordinatentransformationen in V_n und erfüllen die Kommutatorrelation

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c \tag{1}$$

mit den Strukturkonstanten C_{ab}^c. Jeder Satz von Operatoren, der ebenfalls diesen Vertauschungsregeln genügt, wird Lie-Algebra gennant. Wichtig für uns ist der folgende Satz:

Die Lie-Ableitungen eines beliebigen geometrischen Objektes in Richtung der Killingvektorfelder ξ_a^μ bilden eine Lie-Algebra [3]. Es gilt also

$$[\pounds_a, \pounds_b] = C_{ab}^c \pounds_c, \qquad \pounds_a \equiv \underset{\xi_a{}^\mu}{\pounds} \tag{2}$$

mit denselben Strukturkonstanten wie in (1).

Leicht zu verifizieren ist diese Aussage etwa für die Lie-Ableitungen eines Tensors 1. Stufe

$$\pounds_a T^\mu = (\delta_\nu^\mu X_a - \xi^\mu_{a,\nu}) T^\nu.$$

Ein Casimir-Operator C ist dadurch definiert, daß er mit sämtlichen Operatoren der Lie-Algebra kommutiert,

$$[C, \pounds_a] = 0. \tag{3}$$

Wenn wir die Komponenten des geometrischen Objektes als Spaltenmatrix auffassen, so sind die Operatoren $\pounds_a$ Matrizen, die sich additiv aus 2 Anteilen zusammensetzen:

$$\pounds_a = I X_a + \mathscr{S}_a.$$

Dabei bezeichnet I die Einheitsmatrix und $\mathscr{S}_a$ den Spinanteil, der vom Transformationsgesetz des jeweiligen geometrischen Objektes abhängt. Für spezielle physikalische Felder im Einstein-Kosmos werden diese Matrizen in Abschnitt 4 explizit angegeben. Die Operatoren $\mathscr{S}_a$ allein bilden keine Lie-Algebra.

Die Lie-Ableitungen eines geometrischen Objektes sind geeignete Konstruktionselemente für die Erhaltungsgrößen physikalischer Theorien. Aus der Forminvarianz einer Lagrangefunktion L bei einer Isometrietransformation,

$$\pounds_a g_{\mu\nu} = \xi_{a\mu;\nu} + \xi_{a\nu;\mu} = 0, \tag{4}$$

folgt die Identität

$$\left[L\xi_a^\mu - \frac{\partial L}{\partial U_{\Omega,\mu}} \pounds_a U_\Omega \right]_{,\mu} = \frac{\delta L}{\delta U_\Omega} \pounds_a U_\Omega, \tag{5}$$

sofern L von den zweiten (und höheren) partiellen Ableitungen der nicht-metrischen Feldgrößen U_Ω nicht abhängt und sofern in spinorellen Theorien auch die Lie-Ableitung der Pauli- oder Dirac-Matrizen verschwindet.

Wenn die Feldgleichungen erfüllt sind, $\dfrac{\delta L}{\delta U_\Omega} = 0$, gewinnt man aus (5) nach Abspalten des 3-dimensionalen Divergenzanteils und Integration über den Ortsraum die integralen Erhaltungsgrößen (Noether-Theorem).

Als Beispiel betrachten wir das Dirac-Feld

$$L = -\frac{\hbar c}{2}\sqrt{g}\left(\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi_{;\mu} - \bar{\Psi}_{;\mu}\gamma^\mu \Psi + \frac{2mc}{\hbar}\bar{\Psi}\Psi\right).$$

Mit geeigneten Ähnlichkeitstransformationen läßt sich stets erreichen, daß bei einer Isometrietransformation (4) auch die Dirac-Matrizen γ_μ ungeändert bleiben:

$$£_a \gamma_\mu = 0.$$

Jedem Killingvektor ξ_a^μ entspricht dann eine integrale Erhaltungsgröße

$$\mathscr{E}^a = \int \Psi^+ £_a \Psi dv$$

(Ψ^+: hermitesch konjugierter Bispinor).

3. *Gruppenstruktur im Einstein-Kosmos*

Die zeitorthogonale Metrik des Einstein-Kosmos

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\sigma^2 \tag{6}$$

weist zunächst einen (hyperflächennormalen) zeitartigen Killingvektor η^μ auf, der den Erhaltungssatz für die Energie ausdrückt. Jede Hyperfläche $t =$ const ist ein 3-dimensionaler Raum S_3 mit konstanter positiver Krümmung. Das Linienelement hat in quasikartesischen Koordinaten x_i die Form[1]

$$d\sigma^2 = \frac{dx_i dx_i}{A^2}, \quad A \equiv \left(1 + \frac{r^2}{4K^2}\right) \quad \begin{array}{l} r^2 \equiv x_i x_i \\ K = \text{const} \end{array} \tag{7}$$

S_3 kann in einen fiktiven 4-dimensionalen Euklidischen Raum E_4 (Koordinaten Z_i, Z_4) eingebettet werden:

$$Z_i = \frac{x_i}{A} \quad Z_4 = \frac{K}{A}\left(1 - \frac{r^2}{4K^2}\right), \quad Z_i Z_i + Z_4^2 = K^2.$$

Daraus ergibt sich: Die Bewegungsgruppe von S_3 ist die 4-dimensionale reelle Rotationsgruppe N_4. Den Rotationen um Achsen durch den Nullpunkt von E_4 sind in S_3 insgesamt 6 linear unabhängige raumartige Killingvektoren $\xi_a^i (a = 1 \dots 6,\ i = 1 \dots 3)$

---

[1] In dieser Arbeit gilt generell die Summenkonvention: Über zwei gleiche lateinische Indizes $i, j, \dots$ ist von 1 bis 3 zu summieren.

zugeordnet. Im speziellen Koordinatensystem (7) haben die Gruppenoperatoren X_a die Form

$$X_a \equiv \xi_a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \to \begin{cases} X_k = \left(1 - \dfrac{r^2}{4K^2}\right) \dfrac{\partial}{\partial x_k} + \dfrac{x_k x_l}{2K^2} \dfrac{\partial}{\partial x_l} & \text{(8a)} \\ \hat{X}_k = \varepsilon_{klm} x_l \dfrac{\partial}{\partial x_m} \, . & \text{(8b)} \end{cases}$$

Am Koordinatenursprung von (7) erscheinen zwar die Drehungen in den $(Z_i Z_4)$-Ebenen (Gl. (8a)) als Translationen und die Drehungen in den $(Z_i Z_j)$-Ebenen (Gl. (8b)) als Rotationen mit $x_i = 0$ als Fixpunkt. Diese Deutung der Gruppenoperationen gilt aber nicht an jedem Punkt der Hyperkugel, so daß eine generelle Unterscheidung zwischen Translationen und Rotationen nicht sinnvoll ist. Alle Gruppenelemente sind ihrem Wesen nach gleichartig. Das äußert sich mathematisch in einer hohen Symmetrie der Vertauschungsregeln der Gruppe N_4: Bildet man nämlich bestimmte Linearkombinationen der Gruppenoperationen (8),

$$X_k^{\mp} \equiv X_k \mp \frac{1}{K} \hat{X}_k,$$

so ergeben sich hierfür die einfachen Vertauschungsregeln

$$[X_k^{\pm}, X_l^{\pm}] = \mp \frac{2}{K} \varepsilon_{klm} X_m^{\pm}, \quad [X_k^{+}, X_l^{-}] = 0. \tag{9}$$

Nach dem in Abschnitt 2 angegebenen Satz gelten für die analogen Linearkombinationen der Lie-Ableitungen dieselben Relationen:

$$[\pounds_k^{\pm}, \pounds_l^{\pm}] = \mp \frac{2}{K} \varepsilon_{klm} \pounds_m^{\pm}, \quad [\pounds_k^{+}, \pounds_k^{-}] = 0. \tag{10}$$

Man erkennt aus (9), daß die 4-dimensionale Rotationsgruppe N_4 dem direkten Produkt zweier 3-dimensionaler Rotationsgruppen N_3 isomorph ist. Andererseits ist N_3 der 2-dimensionalen unitären unimodularen Gruppe U_2 homomorph,

$$N_3 \sim U_2 .$$

Damit ist bereits die Frage nach irreduziblen Darstellungen von N_4

$$D^{jj'} = D^j \times D^{j'} \qquad j, j' = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots$$

geklärt [4]. Die Isometriegruppe des Ortsraumes S_3 hat nicht nur tensorielle ($j+j'$ = ganzzahlig), sondern auch spinorielle ($j+j'$ = halbzahlig) Darstellungen. Diese Aussage gilt bekanntlich nicht für beliebige Koordinatentransformationen. Die physikalischen Anwendungen im nächsten Abschnitt betreffen die Darstellungen D^{00}; $D^{\frac{1}{2}0}$; $D^{0\frac{1}{2}}$; $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.

---

[2] Man beachte, daß auf Grund unserer Definition der Gruppenoperatoren die imaginäre Einheit in (9) und (10) nicht vorkommt.

Aus einem Vergleich von (10) mit der Drehimpuls-Algebra[2] der elementaren Quantenmechanik ergibt sich unmittelbar der Satz: Es existieren zwei Casimir-Operatoren (Gruppeninvarianten)[3]

$$C_{\pm} = \tfrac{1}{2}(\pounds_k^- \pounds_k^- \pm \pounds_k^+ \pounds_k^+), \tag{11}$$

und ihre Eigenwerte sind

$$C_{\pm}(k, l) = -\frac{2}{K^2}[k(k+1) \pm l(l+1)], \quad k, l = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots \tag{12}$$

Wie bei der Behandlung der Drehimpulse in der Quantenmechanik können die Werte der Quantenzahlen k und l sowohl ganz — als auch halbzahlig sein. Wir erwähnen noch, daß die Form des Linienelementes (7) auch bei der Spuegelung

$$x_i' = \frac{4K^2}{r^2}\, x_i \tag{13}$$

(Inversion am Äquator, Transformation der reziproken Radien) unverändert bleibt. Diese Operation kann deshalb durch eine Ähnlichkeitstransformation der Dirac-Matrizen γ_μ kompensiert werden, so daß die Darstellung

$$\gamma_m = \frac{1}{A}\,\mathring{\gamma}_m, \qquad \gamma_4 = \mathring{\gamma}_4$$

($\mathring{\gamma}_\mu$: konstante Dirac-Matrizen des Minkowski-Raumes) auch nach der kombinierten Transformation gilt. Die Inversion (13) induziert eine Transformation im Raum der Bispinoren. Aus

$$\gamma_i = \left(\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{r^2}\right)\mathscr{C}\gamma_j\mathscr{C}^{-1}, \qquad \gamma_4 = \mathscr{C}\gamma_4\mathscr{C}^{-1}, \qquad \mathscr{C}^2 = \pm 1$$

folgt für die Transformationsmatrix[4] $\mathscr{C}$:

$$\mathscr{C} = \eta\,\frac{x_m}{r}\,\gamma\mathring{\gamma}_m, \qquad \eta^2 = \pm 1. \tag{14}$$

Das Transformationsverhalten von Bilinearformen ($\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma\Psi$ *etc.*) ist ähnlich wie bei räumlichen Spiegelungen im flachen Raum, η entspricht der Parität.

4. Freie Felder im Einstein-Kosmos

Wir behandeln nun die einfachsten Darstellungen von N_4, berechnen dafür im Koordinatensystem (7) die Operatoren

$$\pounds_k^{\mp} = IX_k^{\mp} + \mathscr{S}_k^{\mp}$$

---

[3] Definition: Gl. (3).

[4] $\gamma = \mathring{\gamma} = \frac{1}{i4!}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\varrho\gamma^\sigma$.

sowie die Casimir-Operatoren (11) und prüfen schließlich, inwieweit deren Eigenwertgleichungen mit den physikalischen Feldgleichungen identisch sind. Aus diesem Vergleich folgen unter Verwendung von (12) die Energieeigenwerte.

Wir erläutern das Verfahren am Klein-Gordon-Feld. Die Ergebnisse für das Maxwell- und Dirac-Feld sind tabellarisch zusammengestellt. Für ein (reelles) skalares Feld Φ verschwindet der Spinanteil der Lie-Ableitung,

$$\mathscr{S}_k^{\mp} = 0.$$

Damit erhält man für die beiden Casimir-Operatoren

$$C_+ = \varDelta, C_- = 0. \tag{15}$$

Mit $\varDelta$ bezeichnen wir den Laplace-Operator[5] in S_3. Dieses Resultat zeigt, daß es zweckmäßig ist, für die Gruppeninvarianten gerade die Linearkombinationen (11) zu wählen. Gl. (15) bestätigt uns, daß die Casimir-Operatoren Invarianten bezüglich beliebiger Koordinatentransformationen in S_3 sind (obwohl wir die Summenkonvention in (11) wie für kartesische Koordinaten im Euklidischen Raum auszuführen haben).

Aus (12) und der daran anschließenden Bemerkung folgt mit $C_- = 0$ für die Eigenwerte von C_+ und damit von $\varDelta$:

$$C_+(l) = -\frac{4}{K^2}\,l(l+1) \qquad l = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots \tag{16}$$

Aus der Klein-Gordon-Gleichung (im Einstein-Kosmos)

$$\Phi^{;\mu}_{,\mu} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\Phi = 0$$

gewinnen wir nach Separation des Zeitfaktors[6] $\exp\left(-i\dfrac{E}{\hbar}t\right)$:

$$C_+\Phi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\Phi = -\frac{E^2}{\hbar^2c^2}\,\Phi. \tag{17}$$

Wir erhalten somit aus (16) für das Spektrum der Energieeigenwerte

$$E_l^2 = m^2c^4 + \frac{4\hbar^2c^2}{K^2}\,l(l+1) \qquad l = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots$$

---

[5] Im Koordinaten system (7):

$$\varDelta = A^2\,\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} - A\,\frac{x_m}{2K^2}\,\frac{\partial}{\partial x_m}, \qquad A \equiv \left(1 + \frac{\gamma^2}{4K^2}\right).$$

[6] Die Separationskonstante E ist (bis auf einen konstanten Faktor) gleich der integralen Erhaltungsgröße, die zum zeitartigen Killingvektor η^μ gehört.

Für masselose Teilchen ($m = 0$) ergeben sich bei abgeänderter, konforminvarianter Feldgleichung [5]

$$\Phi^{;\mu}_{,\mu} + \frac{R}{6}\Phi = 0$$

TABELLE

	a) Maxwell-Feld	b) Dirac-Feld
Geometrisches Objekt	Tensor 1. Stufe: $\mathfrak{a} = (A^i)$	Bispinor* Ψ
Spinanteil der Lie-Ableitung $\pounds_k^{\mp}$	$(\mathscr{S}_k^{\mp})_{ij} = -\frac{1}{2K^2}(\delta_{ij}x_k+\delta_{kj}x_i-\delta_{ki}x_j) \mp \frac{\varepsilon_{kij}}{K}$	$\mathscr{S}^{\mp}{}_k = \frac{x_m}{8K^2}(\alpha_k\alpha_m-\alpha_m\alpha_k) \mp \frac{1}{4K} \times \varepsilon_{kmn}\alpha_m\alpha_n$
Casimir-Operator C_+	$(C_+)_{im} = \left(\Delta - \frac{7}{2K^2} + \frac{r^2}{4K^4} + \frac{A}{K^2}x_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\delta_{im} - \frac{x_i x_m}{8K^4} + \frac{A}{K^2} \times \left(x_i\frac{\partial}{\partial x_m} - x_m\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$	$C_+ = \left(\Delta - \frac{3}{4K^2} - \frac{r^2}{8K^4}\right)I + \frac{A}{4K^2}(\alpha_m\alpha_k-\alpha_k\alpha_m)x_m\frac{\partial}{\partial x_k}$
Algebraischer Zusammenhang von C_+ und C_-	$C_-^2 = -\frac{4}{K^2}C_+$ (19)	$C^2_- = -\frac{1}{K^2}\left(C_+ - \frac{3}{4K^2}\right)$ (24)
Verknüpfung der Quantenzahlen k und l	$k = l+1$	$k = l+\frac{1}{2}$
Eigenwerte von C_+	$c_+(l) = -\frac{4}{K^2}(l+1)^2$ $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ (20)	$c_+(l) = -\frac{2}{K^2}\left(2l^2+3l+\frac{3}{4}\right)$ $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ (25)
Kovariante Feldgleichung	$F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0,\ F_{\mu\nu}=A_{\nu,\mu}-A_{\mu,\nu}$ (21)	$\gamma^\mu\Psi_{;\mu} + \frac{mc}{\hbar}\Psi = 0.$ (26)
Zeitfreie Feldgleichung (Differentialoperator durch C_+ ausgedrückt)	Coulomb-Eichung, Zeit separiert: $C_+\mathfrak{a} = -\frac{E^2}{\hbar^2c^2}\mathfrak{a}$ (22)	Iteration, Zeit separiert: $\left(C_+ - \frac{3}{4K^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = -\frac{E^2}{\hbar^2c^2}\Psi$ (27)
Eigenwerte von E	$E_l = \frac{2\hbar c}{K}(l+1)$ $l = 0,\frac{1}{2},1, \dots$ (23)	$E^2{}_l = m^2c^4 + \frac{\hbar^2c^2}{K^2}\left(2l+\frac{3}{2}\right)^2$ (28)
Bemerkungen	Die Coulomb-Eichung ($A^i{}_{;i} = 0$, $A_4 = 0$) wird durch die Form der Metrik (6) nahegelegt.	Der Spinanteil wird aus $\pounds_a\gamma^\mu = \gamma^\mu{}_{,\nu}\xi^\nu{}_a - \gamma^\varrho\xi^\mu{}_{a,\varrho} + [\mathscr{S}_a,\gamma^\mu] = 0$ bestimmt.

* Bispinorindizes werden nicht mitgeschrieben.

wegen $R = -\frac{6}{K^2}$ ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz:

$$E_l = \hbar\omega_l = \frac{\hbar c}{K}(2l+1) \qquad l = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \dots \tag{18}$$

Ein Wellenpaket nimmt nach der Zeit $T = \frac{2\pi K}{c}$ wieder seine ursprüngliche Gestalt an. Einfache Beziehungen ergeben sich auch bei den konforminvarianten Gleichungen für Felder mit höherem Spin; für das Maxwell-Feld und das masselose Dirac-Feld ($m = 0$) ist dies aus der Tabelle ersichtlich[7].

Bei den speziellen Feldern, die wir betrachten, ergibt sich jeweils ein anderer algebraischer Zusammenhang[8] der beiden Casimir-Operatoren C_+ und C_-. Dadurch entsteht eine spezielle Verknüpfung zwischen den Quantenzahlen k und l, so daß die Eigenwerte des Operators C_+ nur noch durch eine Quantenzahl charakterisiert werden[9]. Das trifft dann auch auf die Energieeigenwerte zu, da der Differentialoperator (2. Ordnung) der zeitfreien und gegebenenfalls iterierten Feldgleichung in einfacher Weise durch den betreffenden Casimir-Operator C_+ ausgedrückt werden kann.

Die allgemein-kovariante Dirac-Gleichung (26) hat im Koordinatensystem (6), (7) die Form

$$H\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

$$H = c\alpha_i\frac{\hbar}{i}\left[\left(1+\frac{r^2}{4K^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{x_i}{2K^2}\right] + \beta mc^2 \tag{29}$$

Dabei genügen die 4 konstanten Matrizen α_i, β den Relationen

$$\{\alpha_i, \alpha_j\}_+ = 2\delta_{ij}, \qquad \{\alpha_i, \beta\}_+ = 0 \qquad \beta^2 = 1,$$

und die Bispinoraffinitäten berechnet man zu

$$\Gamma_i = \frac{(\alpha_m\alpha_i - \alpha_i\alpha_m)x_m}{8K^2A}, \qquad \Gamma_4 = 0.$$

Die Lie-Ableitungen kommutieren mit dem Hamiltonoperator in (29):

$$[H, \pounds_k^{\mp}] = 0.$$

---

[7] vgl. (18), (23), (28).

[8] vgl. (15), (19), (24).

[9] vgl. (16), (20), (25).

5. Nichtrelativistische Quantenmechanik

Die Operatoren

$$\frac{\hbar}{i} X_a \equiv \frac{\hbar}{i} \xi_a^i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{30}$$

sind hermitesch. Zum Beweis wenden wir den Gaussschen Satz auf ein Integral über den geschlossenen Ortsraum S_3 an:

$$\int \left(\varphi^* \frac{\hbar}{i} \xi_a^i \psi \right)_{;\, i} dv = 0.$$

Die Operatoren (30) gehen für $K \to 0$ in Impuls- und Drehimpulsoperatoren über. Drei paarweise miteinander kommutierende Operatoren x_a existieren im gekrümmten Raum nicht.

Die kanonischen Vertauschungsregeln

$$[p_i, p_k] = 0 = [q^i, q^k], \qquad [p_i, q^k] = \frac{\hbar}{i} \delta_i^k$$

lassen sich jedoch mit den ebenfalls hermiteschen Operatoren

$$p_i = \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{4} (\log g)_{,i} \right], \qquad q^i = x^i \qquad q = \frac{1}{A^6} \tag{31}$$

(Ortsdarstellung) erfüllen. Das eigentliche Problem besteht darin, in welcher Reihenfolge man die Faktoren im Hamiltonoperator anzuordnen hat.

Beispielsweise gehen die hermiteschen Operatoren

$$H^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2m} A^{\frac{3}{2}} p_i A^{-1} p_i A^{\frac{3}{2}}$$

$$H^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2m} A p_i p_i A$$

beide in den klassischen Ausdruck für ein nichtrelativistisches Teilchen im vorgegebenen Raum S_3 über. Setzen wir aber die explizite Form der Operatoren (31) ein, so erhalten wir zwei kovariante Bildungen

$$H^{\mathrm{I}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta, \qquad H^{\mathrm{II}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\Delta + \frac{R}{8} \right),$$

die sich um einen additiven Term unterscheiden, der natürlich im flachen Raum verschwindet.

Versucht man, diese Frage durch nichtrelativistische Näherung der allgemein-kovarianten Dirac-Gleichung $\left(\text{Entwicklung nach } \frac{1}{c}\right)$ zu entscheiden, so wird man zunächst auf eine Zweikomponenten-Gleichung geführt:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\Delta + \frac{3}{2K^2} + \frac{r^2}{8K^4} + \frac{A}{K^2\hbar^2}\sigma_i d_i\right)\chi = \varepsilon\chi$$

$$d_i \equiv \frac{\hbar}{i}\varepsilon_{ikl}x_k\frac{\partial}{\partial x_l}, \tag{32}$$

(σ_i: Pauli-Matrizen, ε: nichtrelativistische Energie). Das Glied $\sim \sigma_i d_i$, das die Komponenten des Spinors χ vermischt, beschreibt gewissermaßen eine durch das äußere Gravitationsfeld induzierte "Spin-Bahn-Kopplung" des Elektrons und tritt auch auf, wenn die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld nicht betrachtet wird. Wir sehen keinen Grund, dieses Glied gegenüber $\frac{1}{K^2}$ zu vernachlässigen. Eine Einkomponentengleichung (verallgemeinerte Schrödinger-Gleichung) zu deduzieren, ist uns also nicht möglich.

6. *Zusammenfassung*

Das Studium der Isometriegruppe des Einstein-Kosmos führt zu Aussagen über die Energiewerte von singularitätenfreien Lösungen der betrachteten Feldgleichungen. Die Eigenwertgleichungen für geeignet definierte Casimir-Operatoren und die physikalischen Feldgleichungen erweisen sich als nahezu identisch. Die Voraussetzung eines geschlossenen Ortsraumes spiegelt sich in der (lokalen) Gruppenstruktur wider: Wir erhalten diskrete Energiewerte. Das ist für ein offenes Modell nicht zu erwarten.

Die Ergebnisse von Abschnitt 4 können auf Felder mit höherem Spin, insbesondere auf das Gravitonenfeld ausgedehnt werden.

Herrn Professor Schmutzer, Dr Neugebauer und Dr Stephani danke ich für wertvolle Diskussionen.

LITERATUR

[1] E. Schrödinger, *Proc. Roy. Irish Acad.*, **46A**, 25 (1940); *Physica*, **6**, 899 (1939); *Commun. Pontificiae Acad. Sci.*, **2**, 321 (1938).
[2] G. Börner, H. P. Dürr, *Nuovo Cimento*, **64A**, 669 (1969).
[3] K. Yano, *The Theory of Lie Derivatives and Its Application*, Amsterdam 1955.
[4] P. Roman, *Theory of Elementary Particles*, Amsterdam 1961, Ch. 1, § 3.
[5] R. Penrose, in: *Relativity, Groups and Topology*, (Les Houches 1963), New York 1964.