Vol. B4 (1973) ACTA PHYSICA POLONICA No 4

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУД В ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ

Equations for the Amplitudes in Direct and Inverse Scattering Problems

И. В. Амирханов, В. Е. Гречко, Р. К. Дементьев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Научно-исследовательский институт ядерной физики

Лаборатория высоких энергий, Москва*

(Поступила в редакцию 17 апреля 1972 г.)

Получены новые уравнения для амплитуд нерелятивистского рассеяния в реакциях общего типа $a+b \rightarrow c+d+e$ и для амплитуд рассеяния двух релятивистских частиц. Эти уравнения являются аналогом уравнений метода фазовых функций. Полученные уравнения дают возможность решить обратную задачу рассеяния по известным данным о полных сечениях рассеяния.

New equations for the nonrelativistic scattering amplitudes in the general type of reactions and for scattering amplitudes of the two relativistic particles are obtained. These equations are analogous to those of the phase functions method. The obtained equations permit the inverse scattering problem to be solved on the basis of the known data on the total cross-sections.

1. *Введение*

В связи с существующей тенденцией построить теорию микрочастиц, которая оперировала бы только с наблюдаемыми физическими величинами, такими как сечения, амплитуды, фазы рассеяния и т.д., представляет интерес разработка методов получения уравнений непосредственно на эти величины и исследование возможных способов их решения.

В нерелятивистской квантовой механике значительным шагом в этом направлении явилось создание так называемого „метода фазовых функций" [1, 2]. Однако в рамках этого метода не были получены уравнения на амплитуды и фазы рассе-

* Address: Institute of Nuclear Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow V-234, USSR.

яния для реакций с перераспределением частиц и реакций при энергиях выше порога развала. Представляет также несомненный интерес получить аналогичные уравнения релятивистской задачи рассеяния.

Данная работа посвящена несколько другому, по сревнению с „методом фазовых функций" подходу к получению уравнений на амплитуды и фазы рассеяния. Пользуясь этим подходом удаётся получить уравнения на парциальные и полные амплитуды рассеяния, сделать обобщение на случай реакций общего типа, а также получить уравнения на амплитуды для релятивистской задачи рассеяния.

Заметим, что уравнения, получаемые в рамках предлогаемого метода, являются аналогом известных „фазовых уравнений", методы решения которых обсуждались в работах [1, 2].

В последнем разделе полученные уравнения используются для решения обратной задачи рассеяния.

1. Вначале рассмотрим задачу двух тел. Пусть $\Phi_l^{(1)}(k, r)$ и $\Phi_l^{(2)}(k, r)$ — два линейно независимых решения свободного радиального уравнения Шредингера. Тогда в области, где потенциал взаимодействия $V(r)$ равен нулю, асимптотику волновой функции можно представить в виде:

$$\varphi_l(k, r) = \Phi_l^{(1)}(k, r)+F_l(k)\Phi_l^{(2)}(k, r). \tag{1}$$

„Обрезая" потенциал в произвольной точке b и используя условие непрерывности логарифмической производной волновой функции в этой точке, имеем:

$$F_l(k, b) = [\varphi_l(k, b)\dot{\Phi}_l^{(1)}(k, b)-\dot{\varphi}_l(k, b)\Phi_l^{(1)}(k, b)]/[\varphi_l(k, b)\dot{\Phi}_l^{(2)}(k, b)-$$
$$-\dot{\varphi}_l(k, b)\Phi_l^{(2)}(k, b)] \tag{2}$$

где $\varphi_l(k, b)$ — точное решение уравнения Шредингера в области $r \leqslant b$ и $\dot{\varphi}_l(k, b) = \frac{d}{dr}\varphi_l(k, r)|_{r=b}$. Дифференцируя (2) по параметру b, используя уравнение Шредингера и заменяя b на r получим:

$$\frac{d}{dr}F_l(k, r) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V(r)}{k}[\Phi_l^{(1)}(k, r)+F_l(k, r)\Phi_l^{(2)}(k, r)]^2. \tag{3}$$

Если $\Phi_l^{(1)}(k, r) = j_l(kr)$ ($j_l(kr)$ — функция Бесселя) и $\Phi_l^{(2)}(k, r) = ih_l^{(1)}(kr)$ ($h_l^{(1)}(kr)$ — функция Ханкеля), то (3) совпадает с уравнением для парциальной амплитуды [2].

Аналогично, выбирая соответствующие линейно независимые решения $\Phi_l^{(1)}(k, r)$ и $\Phi_l^{(2)}(k, r)$, можно получить уравнения для тангенса фазы $\operatorname{tg}\delta_l(k, r)$, элементов S-матрицы и т.д.

В случае нелокального потенциала уравнение (3) имеет вид:

$$\frac{d}{dr}F_l(k, r) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{k}[\Phi_l^{(1)}(k, r)+F_l(k, r)\Phi_l^{(2)}(k, r)]\cdot\int dr'V_l(r, r')\times$$
$$\times[\Phi_l^{(1)}(k, r')+F_l(k, r')\Phi_l^{(2)}(k, r')]. \tag{4}$$

Представляет интерес получить аналогичные уравнения для полной амплитуды рассеяния. Однако вышеприведённый способ непосредственно не обобщается на этот случай. Поэтому ниже рассмотрим другой подход к решению этой задачи.

Пусть потенциал взаимодействия $V(\vec{r})$ центрально не симметричен и зависит от параметра λ т.е. $V(\vec{r}, \lambda)$. По определению, полная амплитуда также будет зависеть от этого параметра, а именно:

$$F(\lambda, \vec{k}_b, \vec{k}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}' e^{-i\vec{k}_b\vec{r}'} V(\vec{r}', \lambda)\varphi^{(+)}_{\vec{k}_a}(\vec{r}', \lambda), \tag{5}$$

где

$$\varphi^{(+)}_{\vec{k}_a}(\vec{r}, \lambda) = e^{i\vec{k}_a\vec{r}} + \int d\vec{r}' G^{(+)}_\lambda(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}', \lambda) e^{i\vec{k}_a\vec{r}'} \tag{6}$$

и $G^{(+)}_\lambda(\vec{r}, \vec{r}')$ — полная функция Грина задачи двух тел.

Дифференцируя (5) по параметру λ, используя уравнение (6) и уравнение для $\frac{d}{d\lambda}\varphi_{\vec{k}_a}(\vec{r}, \lambda)$, имеем

$$\frac{d}{d\lambda}F(\lambda, \vec{k}_b, \vec{k}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}' \left[\frac{d}{d\lambda}V(\vec{r}, \lambda)\right]\varphi^{(+)}_{\vec{k}_a}(\vec{r}', \lambda)\varphi^{(+)}_{-\vec{k}_b}(\vec{r}, \lambda). \tag{7}$$

Теперь „обрезая“ потенциал на произвольной сфере с радиусом λ и выбирая в качестве параметра эту переменную, имеем

$$\frac{d}{d\lambda}V(\vec{r}, \lambda) = V(\vec{r})\delta(\lambda - r). \tag{8}$$

Подставляя асимптотику волновой функции[1]

$$\varphi^{(+)}_{k\vec{n}_a}(\vec{n}, \lambda) = e^{ik\lambda\vec{n}_a\vec{n}} + \int d\vec{n}_1 H^{(1)}(k\lambda, \vec{n}\cdot\vec{n}_1)F(\lambda, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a), \tag{9}$$

где $\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_1, \vec{n}_2$ — единичные векторы,

$$H^{(1)}(k\lambda, \vec{n}\cdot\vec{n}_1) = \frac{i}{k\lambda}\sum_{lm}(-i)^{-l}Y_{lm}(\vec{n})Y^*_{lm}(\vec{n}_1)h^{(1)}_l(k\lambda),$$

$$F(\lambda, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}' e^{-ik\vec{n}_1\vec{r}'}V(\vec{r}', \lambda)\varphi^{(+)}_{k\vec{n}_a}(\vec{r}', \lambda), \tag{10}$$

равенство (8) в (7) и заменяя λ на r имеем

$$\frac{d}{dr}F(r, \vec{n}_b, k, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}r^2\int d\vec{n}V(\vec{n}, r)\{e^{ikr\vec{n}_a\cdot\vec{n}} +$$

$$+\int d\vec{n}_1 H^{(1)}(kr, \vec{n}\cdot\vec{n}_1)F(r, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a)\}\times\{e^{-ikr\vec{n}_b\cdot\vec{n}} +$$

$$+\int d\vec{n}_2 H^{(1)}(kr - \vec{n}, \vec{n}_2)F(r, \vec{n}_2, k, \vec{n}_b)\}. \tag{11}$$

---

[1] (9) является точным решением уравнения Шредингера на сфере с радиусом λ.

Другим способом это уравнение было получено ранее в работе [3].

Если рассеяние происходит на двух потенциалах $V = V_1 + V_2$, то асимптотику волновой функции можно представить в виде:

$$\psi^{(+)}_{k\vec{n}_a} = \varphi^{(+)}_{1k\vec{n}_a}(\vec{n}, \lambda) + \int d\vec{n}_1 H^{(1)}_1(k\lambda, \vec{n}\cdot\vec{n}_1) F_1(\lambda, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a), \tag{12}$$

где

$$H^{(1)}_1(k\lambda, \vec{n}\cdot\vec{n}_1) = \frac{i}{k\lambda}\sum_{lm}(-i)^{-l} Y_{lm}(\vec{n}) Y^*_{lm}(\vec{n}_1)\chi^{(1)}_{lm}(k\lambda),$$

$$F_1(\lambda, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\vec{r}'\varphi^{(-)*}_{1k\vec{n}_1}(\vec{r}')V_2(\vec{r}', \lambda)\psi^{(+)}_{k\vec{n}_a}(\vec{r}'), \tag{13}$$

$\varphi^{(+)}_{1k\vec{n}_a}(\varphi^{(-)*}_{1k\vec{n}_b})$ — решение уравнения Шредингера при $V = V_1$ и $V_2 = 0$, а $\chi^{(1)}_{lm}$ — решение радиального уравнения Шредингера с тем же потенциалом. Теперь, поступая так же, как выше, получаем следующее уравнение на амплитуду

$$\frac{d}{dr}F_1(r, \vec{n}_b, k, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}r^2\int d\vec{n}V(\vec{n}, r)\,\{\varphi^{(+)}_{1k\vec{n}_a}(\vec{n}, r) +$$
$$+ \int d\vec{n}_1 H^{(1)}_1(kr, \vec{n}\cdot\vec{n}_1)F_1(r, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a)\}\times$$
$$\times\{\varphi^{(+)}_{1(-k\vec{n}_b)}(\vec{n}, r) + \int d\vec{n}_2 H^{(1)}_1(kr, -\vec{n}\cdot\vec{n}_2)F_1(r, \vec{n}_2, k, \vec{n}_b). \tag{14}$$

Это уравнение удобно для случая, когда уравнение Шредингера с одним из потенциалов, например, V_1 — имеет аналитическое решение.

В случае нелокального потенциала уравнение (11) имеет вид:

$$\frac{d}{dr}F(r, \vec{n}_b, k, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}r^2\int d\vec{n}\{e^{ikr\vec{n}_a\cdot\vec{n}} +$$
$$+ \int d\vec{n}_1 H^{(1)}(kr, \vec{n}\cdot\vec{n}_1)F(r, \vec{n}_1, k, \vec{n}_a)\}\times\{\int dr'(r')^2\int d\vec{n}'V(\vec{n}, r, \vec{n}', r')\,\{e^{-ikr'\vec{n}_b\cdot\vec{n}} +$$
$$+ \int d\vec{n}_2 H^{(1)}(kr, -\vec{n}'\cdot\vec{n}_2)F(r, \vec{n}_2, k, \vec{n}_b)\}. \tag{11'}$$

Аналогично обобщается уравнение (14), когда рассеяние происходит на двух потенциалах и один из них (или оба потенциала) нелокальный.

2. В этом разделе мы получим релятивистский аналог фазовых уравнений на основе релятивистских уравнений задачи двух тел в квазипотенциальном подходе [4, 5, 6].

В случае бесспиновых частиц с равными массами m [2] парциальная амплитуда рассеяния имеет вид [6]:

$$F_l(\chi_k) = -\frac{1}{\text{sh}\,\chi_k}\int dr s^*_l(r, \chi_k)V(r)\psi_l(\chi_k, r) \tag{15}$$

[2] Будем работать в системе единиц $\hbar = c = m = 1$.

Волновая функция $\psi_l(\chi_k, r)$ удовлетворяет релятивистскому уравнению Шредингера с локальным потенциалом $V(r)$:

$$\left[2\,\mathrm{ch}\, i\frac{d}{dr}+\frac{l(l+1)}{r(r+i)}e^{i\frac{d}{dr}}-2E_k+V(r)\right]\psi_l(\chi_k, r)=0,\quad E_k=\sqrt{1+\vec{k}^2}\equiv \mathrm{ch}\chi_k \tag{16}$$

а $s_l(r, \chi_k)$ — решение свободного уравнения (16) с $V(r)=0$.

Переписывая (16) в интегральном виде и используя метод, развитый в разделе I при выводе уравнений на полные амплитуды рассеяния, получим окончательно релятивистский аналог уравнения (3):

$$\frac{d}{dr}F_l(\chi_k, r)=-\frac{V(r)}{W_l(r,\chi_k)}\left[s_l(r,\chi_k)+F_l(\chi_k, r)e_l^{(1)}(r,\chi_k)\right]^2. \tag{17}$$

Здесь $s_l(r,\chi_k)$ и $e_l^{(1)}(r,\chi_k)$ — аналоги сферических функций Бесселя и Ханкеля первого рода, явный вид которых есть (W_l — вронскиан из этих решений):

$$s_l(r,\chi_k)=\sqrt{\frac{\pi}{2}\mathrm{sh}\,\chi_k}\,(-1)^{l+1}(i)^{l+1}\frac{\Gamma(ir+l+1)}{\Gamma(ir)}P_{ir-1/2}^{-l-1/2}(\mathrm{ch}\chi_k),$$

$$e_l^{(1)}(r,\chi_k)=\sqrt{\frac{\pi}{2}\mathrm{sh}\,\chi_k}\,(-1)^{l+1}(i)^{l+1}\frac{\Gamma(ir+l+1)}{\Gamma(ir)}Q_{-ir-1/2}^{-l-1/2}(\mathrm{ch}\,\chi_k), \tag{18}$$

а $P_\nu^\mu(\mathrm{ch}\,\chi)$ и $Q_\nu^\mu(\mathrm{ch}\,\chi)$ — функции Лежандра первого и второго рода.

Так как в нерелятивистском пределе ($r\gg 1$, $\chi_k=1$) $W_l(r,\chi_k)\to \mathrm{sh}\chi_k$

$$s_l(r,\chi_k)\to\sqrt{\frac{\pi}{2}kr}\,I_{l+1/2}(kr),\qquad e_l^{(1)}(r,\chi_k)\to -i\sqrt{\frac{\pi}{2}kr}\,H_{l+1/2}^{(1)}(kr),$$

то уравнение (17) переходит в (3).

Точно таким же способом обобщаются уравнения (4), (11), (11′), (14) полученные в первом разделе. Метод линеаризации [2], удобный для нахождения приближенного решения (3), можно непосредственно применить к уравнению (17). Таким образом, выбирая феноменологические квазипотенциалы, можно получать информацию о высокоэнергетическом рассеянии частиц.

3. Теперь рассмотрим реакции общего типа, когда открыты каналы с перераспределением и канал развала. Для простоты изложения ограничимся примером системы трёх тел и воспользуемся уравнением Фаддеева [7] в дифференциальном виде [8]:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M_i}\Delta_{\vec{R}_i}-\frac{\hbar^2}{2\mu_i}\Delta_{\vec{\varrho}_i}+V_i(\varrho_i)-E\right]\psi^i(\vec{R}_i,\vec{\varrho}_i)=-V_i(\varrho_i)\sum_{j\neq i=1}^{3}\psi^j(\vec{R}_j,\vec{\varrho}_j). \tag{19}$$

$$i\neq j\neq k=1,2,3$$

Здесь $\psi(\vec{R}_i,\vec{\varrho}_i)$ — полная волновая функция трёх тел, V_i — потенциал взаимодействия между частицами j и k, $\vec{R}_i$, $\vec{\varrho}_i$ — координаты Якоби и

$$M_i=(m_k+m_j)m_i/(m_i+m_j+m_k),\qquad \mu_i=m_jm_k/(m_j+m_k).$$

Решение этой системы удобно искать в виде:

$$\psi^i = \sum_{\alpha_i} \{ \sum_{n_i=1}^{N_i} \chi_{n_i\alpha_i}(R_i)\psi_{n_i\alpha_i} + \int dk_i \chi_{k_i\alpha_i}(R_i)\psi_{k_i\alpha_i} \}, \tag{20}$$

где

$$\psi_{n_i\alpha_i} = \varphi_{n_il_i}(\varrho_i) Y_{L_iM_i}\left(\frac{\vec{R}_i}{R_i}\right) Y_{l_im_i}\left(\frac{\vec{\varrho}_i}{\varrho_i}\right) \Big/ R_i\varrho_i, \tag{21}$$

α_i — совокупность квантовых чисел L_i, M_i, l_i, m_i,
N_i — число связанных состояний в системе $(j+k)$ и
$\psi_{k_i\alpha_i}$ — получается из $\psi_{k_i\alpha_i}$ заменой функции $\varphi_{n_il_i}$ на $\varphi_{k_il_i}$, которые являются решением радиального уравнения

$$\left[\frac{d^2}{d\varrho_i^2} + k_i^2 - V_i - \frac{l_i(l_i+1)}{\varrho_i^2}\right] \varphi_{k_il_i}(\varrho_i) = 0 \tag{22}$$

соответственно, при $k_i^2 < 0$ и $k_i^2 \geqslant 0$.

Для коэффициентов $\chi_{n_i\alpha_i}$ и $\chi_{k_i\alpha_i}$ разложения (20) получим систему зацепленных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left[\frac{d^2}{dR_i^2} + K_{n_i}^2 - \frac{L_i(L_i+1)}{R_i^2}\right] \chi_{n_i\alpha_i}(R_i) = \frac{2M_i}{\hbar^2} \int d\Omega_{\vec{R}_i} d\vec{\varrho}_i R_i^2 \psi^*_{n_i\alpha_i} V_i \times$$
$$\times \sum_{i \neq j=1}^{3} \sum_{\alpha_j} \{ \sum_{n_j=1}^{N_j} \chi_{n_j\alpha_j}(R_j)\psi_{n_j\alpha_j} + \int dk_j \chi_{k_j\alpha_j}\psi_{k_j\alpha_j} \} \equiv I_{n_i\alpha_i}(R_i),$$

$$\left[\frac{d^2}{dR_i^2} + K_i^2 - \frac{L_i(L_i+1)}{R_i^2}\right] \chi_{k_i\alpha_i}(R_i) = \frac{2M_i}{\hbar^2} \int d\Omega_{\vec{R}_i} d\vec{\varrho}_i R_i^2 \psi^*_{k_i\alpha_i} V_i \times \tag{23}$$
$$\times \sum_{i \neq j=1}^{3} \sum_{\alpha_j} \{ \sum_{n_j=1}^{N_j} \chi_{n_j\alpha_j}(R_j)\psi_{n_j\alpha_j} + \int dk_j \chi_{k_j\alpha_j}\psi_{k_j\alpha_j} \} \equiv I_{k_i\alpha_i}(R_i),$$

где

$$K_{ni}^2 = \frac{2M_i}{\hbar^2}(E - \varepsilon_{n_i}); \quad K_i^2 = \frac{2M_i}{\hbar^2}(E - \varepsilon_i); \quad k_i^2 = \frac{2\mu_i}{\hbar^2}\varepsilon_i.$$

Функции $\chi_{n_i\alpha_i}(R_i)$ и $\chi_{k_i\alpha_i}(R_i)$ регулярны в нуле и при $R_i \to \infty$ имеют асимптотику

$$\chi_{n_i\alpha_i}(R_i) = \Phi_0(R_i) + F_{n_i\alpha_i}\Phi^{(2)}_{n_iL_i}(R_i),$$
$$\chi_{k_i\alpha_i}(R_i) = F_{\alpha_ik_i}\Phi^{(2)}_{k_iL_i}(R_i), \tag{24}$$

где

$$\Phi_0(R_i) = \delta_{n_0\alpha_0n_i\alpha_i}\Phi^{(1)}_{n_iL_i}(R_i)$$

Индексы $n_0\alpha_0$ символа Кронекера $\delta_{n_0\alpha_0 n_i\alpha_i}$ задают квантовые числа входного канала, $\Phi^{(1)}_{n_iL}$, $\Phi^{(2)}_{n_iL_i}$ и $\Phi^{(2)}_{k_iL_i}$ — решения системы (23) при $I_{n_i\alpha_i}(R_i) = 0$ и $I_{k_i\alpha_i}(R_i) = 0$.

Теперь точно так же, как в пункте 1, можно получить систему уравнений на $F_{n_i\alpha_i}$ и $F_{k_i\alpha_i}$:

$$\frac{d}{dR_i} F_{n_i\alpha_i}(R_i) = -\frac{2M_i}{\hbar^2}\frac{1}{K_{n_i}}[\Phi_0(R_i)+F_{n_i\alpha_i}(R_i)\Phi^{(2)}_{n_iL_i}(R_i)]\times$$

$$\times\sum_{j\neq i=1}^{3}\sum_{\alpha_j}\int d\Omega_{\vec{R}_i}d\vec{\varrho}_i R_i^2\psi^*_{n_i\alpha_i}V_i\{\sum_{n_j=1}^{N_j}\psi_{n_j\alpha_j}[\Phi_0(R_j)+F_{n_j\alpha_j}(R_j)\Phi^{(2)}_{n_jL_j}(R_j)]+$$

$$+\int dk_j\psi_{k_j\alpha_j}F_{k_j\alpha_j}(R_j)\Phi^{(2)}_{k_jL_j}(R_j)\}, \tag{25}$$

$$\frac{d}{dR_i} F_{k_i\alpha_i}(R_i) = -\frac{2M_i}{\hbar^2}\frac{1}{K_i}[F_{k_i\alpha_i}\Phi^{(2)}_{k_iL_i}(R_i)]\sum_{j\neq i=1}^{3}\sum_{\alpha_j}\int d\Omega_{\vec{R}_i}d\vec{\varrho}_i R_i^2\psi^*_{k_i\alpha_i}V_i\times$$

$$\times\{\sum_{n_j=1}^{N_j}\psi_{n_j\alpha_j}[\Phi_0(R_j)+F_{n_j\alpha_j}(R_j)\Phi^{(2)}_{n_jL_j}(R_j)]+\int dk_j\psi_{k_j\alpha_j}F_{k_j\alpha_j}(R_j)\Phi^{(2)}_{k_jL_j}(R_j)\}.$$

Если в качестве $\Phi^{(1)}_{n_iL_i}$ и $\Phi^{(2)}_{n_iL_i}(\Phi^{(2)}_{k_iL_i})$ выбрать функции Бесселя и Ханкеля для открытых каналов $K^2_{n_i} > 0$ $(K^2_i > 0)$ и функции Ханкеля мнимого аргумента для закрытых каналов $K^2_{n_i} < 0$ $(K^2_i < 0)$, то в уравнении (25) $F_{n_i\alpha_i}$ — имеет смысл парциальной амплитуды рассеяния прямого канала и канала с перераспределением частиц, а $F_{k_i\alpha_i}$ — амплитуды канала развала.

Теперь для реакций общего типа получим систему уравнений для полной амплитуды рассеяния каждого канала. Для простоты рассмотрим процесс, когда на системе из двух частиц (например, $(1+2)$ и которая имеет только дискретный спектр) рассеивается третья частица. Этот процесс удобно описывать следующей системой уравнений:

$$\chi^{(1)}_{k_\alpha\vec{n}_\alpha}(\vec{R}) = \delta_{\alpha_0\alpha}e^{ik_\alpha\vec{R}\vec{n}_\alpha}+\int d\vec{R}'G^{(+)}_{k_\alpha}(\vec{R},\vec{R}')\sum_\beta W_{\alpha\beta}(\vec{R}')\chi^{(+)}_{k_\beta\vec{n}_\alpha}(\vec{R}'), \tag{26}$$

где

$$W_{\alpha\beta}(\vec{R}) = \int d\vec{\varrho}_{12}\varphi_\alpha(\vec{\varrho}_{12})[V_{13}+V_{23}]\varphi_\beta(\vec{\varrho}_{12}), \tag{27}$$

$\varphi_\alpha(\vec{\varrho}_{12})$ $(\alpha = n, l, m$ — квантовые числа) — волновые функции системы $(1+2)$, V_{13}, V_{23} — соответственно, потенциалы взаимодействия частиц $(3+1)$, $(3+2)$.

$$G^{(+)}_{k_\alpha}(\vec{R},\vec{R}') = \frac{2M}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik_\alpha|\vec{R}-\vec{R}'|}}{|\vec{R}-\vec{R}'|}$$

— функция Грина,

$$k^2_\alpha = \frac{2M}{\hbar^2}(E-\varepsilon_\alpha), \qquad M = (m_1+m_2)m_3/(m_1+m_2+m_3).$$

Пусть коэффициенты смешивания $W_{\alpha\beta}$ зависят от параметра λ т.е. $W_{\alpha\beta}(\vec{R}, \lambda)$; тогда амплитуды рассеяния каждого канала также будут зависеть от этого параметра, а именно:

$$F(\lambda, \vec{n}_b, k_\alpha, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d\vec{R}' e^{-ik_\alpha \vec{n}_b \vec{R}'} \sum_\beta W_{\alpha\beta}(\vec{R}', \lambda)\chi^{(+)}_{k_\beta \vec{n}_a}(\vec{R}', \lambda), \tag{28}$$

$$\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2).$$

Дифференцируя (28) по параметру λ, используя уравнение (26) и уравнени для $\frac{d}{d\lambda}\chi^{(+)}_{k_\alpha \vec{n}_a}$, имеем:

$$\frac{d}{d\lambda}F(\lambda, \vec{n}_b, k_\gamma, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha\beta}\int d\vec{R}' \times$$

$$\times\left[\frac{d}{d\lambda} W_{\alpha\beta}(\vec{R}', \lambda)\right]\chi^{(+)}_{k_\alpha \vec{n}_a}(\vec{R}')\chi^{(+)}_{-k_\beta \vec{n}_b}(\vec{R}'). \tag{29}$$

Теперь „обрезая" коэффициенты $W_{\alpha\beta}$ на произвольной сфере с радиусом λ и выбирая в качестве параметра эту переменную, имеем:

$$\frac{d}{d\lambda} W_{\alpha\beta}(\vec{R}, \lambda) = W_{\alpha\beta}(\vec{R})\delta(\lambda - R). \tag{30}$$

Так же как в пункте 1, подставляя асимптотику волновой функции в (29) используя (30) и заменяя λ на R получаем:

$$\frac{d}{dR}F(R, \vec{n}_b, k_\gamma, \vec{n}_a) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\sum_{\alpha\beta} R^2 \int d\vec{n} W_{\alpha\beta}(\vec{n}, R)\,\{\delta_{\gamma_0\alpha} e^{ik_\alpha R\vec{n}\cdot\vec{n}_a} +$$

$$+\int d\vec{n}_1 H^{(1)}(k_\alpha R, \vec{n}\cdot\vec{n}_1)F(R, \vec{n}_1, k_\alpha, \vec{n}_a)\,\{\delta_{\gamma_0\alpha} e^{-ik_\beta R\vec{n}\cdot\vec{n}_b} +$$

$$+\int d\vec{n}_2 H^{(1)}(k_\beta R, -\vec{n}\cdot\vec{n}_2)F(R, \vec{n}_2, k_\beta, \vec{n}_b)\}. \tag{31}$$

Отметим, что в последние годы появилось множество работ [9—10] по изучению экстремальных свойств приближённых методов теории столкновений. В этих работах показано, что широкий класс приближённых методов даёт приближение снизу для K-матрицы. Подобные оценки можно получить, испол зуя уравнение (29).

4. В этом разделе покажем, что равенства типа (7) и (29), полученные в предыдущих разделах, очень удобны при решении обратной задачи теории рассеяния. Исследованию обратной задачи рассеяния посвящено много работ (подробный список литературы по этому вопросу дан в монографии [11]). Мы воспользуемся методом введения непрерывного параметра развитого в работе [12]. Напомним ос-

новную идею этого метода. Рассматривают уравнение типа (3) для фазы рассеяния в случае $l = 0$ и предполагают, что потенциал зависит от некоторого параметра λ. Тогда уравнение на фазу имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dr}\,\delta(r,\lambda) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\,\frac{V(r,\lambda)}{k}\,\sin^2(kr+\delta(r,\lambda)). \tag{32}$$

Дифференцируя по λ обе части последнего равенства, можно получить следующее уравнение [12]:

$$\int_0^\infty Z(r,\lambda)\sin^2(kr+\delta(r,\lambda))\exp\left\{-\frac{2\mu}{\hbar^2}\,\frac{1}{k}\int_r^\infty V(r',\lambda)\sin^2(kr'+\delta(r',\lambda))dr'\right\} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2\mu}\,k(\delta_\varrho(k,\lambda)-\delta_з(k)), \tag{33}$$

где

$$Z(r,\lambda) = \frac{dV(r,\lambda)}{d\lambda}, \tag{34}$$

$\delta_з(k)$ и $\delta_\varrho(k,\lambda)$ — соответственно экспериментальная и приближённая фазы рассеяния.

Краткая схема численного решения обратной задачи при такой постановке заключается в следующем.

Решая уравнение (32) с начальным значением потенциала V_0 и подставляя полученные решения в (33), определяют неизвестную функцию $Z(r,\lambda)$. Тогда из (34) получают следующее приближение для потенциала:

$$V(r,\lambda) = V_0+\lambda Z(r,\lambda).$$

Далее процесс вычислений повторяется до тех пор, пока искомый потенциал не стабилизируется.

Такой подход к обратной задаче справедлив только при условии, что $\delta_з(0) = \delta_з(\infty) = 0$, т.е., когда нет связанных состояний. В общем случае, потенциал V полностью определяется заданием фазы $\delta(k)$ (на всём интервале энергии от 0 до ∞), собственных значений энергий $E_\alpha = -k_\alpha^2$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$) связанных состояний и соответствующих им нормировочных констант N_α ($\alpha = 1, 2, \ldots$). Тогда за исходное уравнение берём не уравнение (32), (этот случай рассмотрен в Приложении), а уравнение типа (7), которое для центрального симметричного потенциала после выделения угловой части в случае дискретного спектра имеет вид:

$$\frac{d}{d\lambda}N_{nl} = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\,\frac{1}{k_{nl}}\int dr\left[\frac{d}{d\lambda}V(r,\lambda)\right]\varphi_{nl}^2(r,\lambda), \tag{35}$$

и в случае непрерывного спектра:

$$\frac{d}{d\lambda}F_l(k) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{k}\int dr\left[\frac{d}{d\lambda}V(r,\lambda)\right]\varphi_{kl}^2(r,\lambda), \tag{36}$$

где φ_{nl} и φ_{kl} — являются решениями радиального уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+k^2-V(r,\lambda)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\varphi_{kl}=0 \tag{37}$$

соответственно, при $k^2<0$ и $k^2 \geqslant 0$.

Тогда вместо (33), имеем:

$$\int_0^\infty drZ(r,\lambda)\varphi_{nl}^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu}k_{nl}[N_{nl}(\lambda)-N_{l\text{э}}],$$

$$\int_0^\infty drZ(r,\lambda)\varphi_{kl}^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu}k[F_{lp}(k,\lambda)-F_{l\text{э}}(k)]. \tag{38}$$

Отличие и преимущество по сравнению с вышеописанной процедурой восстановления потенциала состоит в том, что с начальным значением потенциала теперь надо решать уравнение (37), которое является линейным (в отличие от нелинейного уравнения (32)), и, кроме того, ядро уравнения (38) имеет более простой вид.

До сих пор при решении обратной задачи рассеяния потенциал восстанавливался по косвенным экспериментальным данным (сдвиги фаз и амплитуды). Было бы весьма желательно так сформулировать обратную задачу рассеяния, чтобы в качестве информации использовать непосредственно измеряемые на опыте сечения рассеяния. Ниже мы обсудим одну из возможностей такой постановки задачи. Для этого рассмотрим уравнение (7), когда рассеяние происходит в нулевой угол и потенциал центрально симметричный:

$$\frac{d}{d\lambda}F(\lambda,\theta=0,k) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int dr\left[\frac{d}{d\lambda}V(r,\lambda)\right]r^2\int d\Omega_{\vec r}\varphi_{\vec k_a}^{(+)}(\vec r,\lambda)\varphi_{-\vec k_b}^{(+)}(\vec r,\lambda) \tag{39}$$

где θ — угол между векторами $\vec k_a$ и $\vec k_B$.

В этом случае уравнение типа (33) имеет вид:

$$\int drZ(r,\lambda)r^2\int d\Omega_{\vec r}\varphi_{\vec k_a}^{(+)}\varphi_{-\vec k_b}^{(+)} = \frac{\hbar^2}{2\mu}4\pi[F_p(\lambda,k,\theta=0)-F_\text{э}(k,\theta=0)]. \tag{49}$$

Используя оптическую теорему и дисперсионные соотношения для реальной части амплитуды рассеяния [13], $F_\text{э}$ можно выразить непосредственно через сечения рассеяния

$$F_э(k, \theta = 0) = \mathrm{Re}\, F_э(k, \theta = 0) + i\, \frac{k}{4\pi}\, \sigma_{\mathrm{tot}}(k)$$

$$\mathrm{Re}\, F_э(k, \theta = 0) = \frac{1}{2\pi^2}\, P \int_0^\infty dk' \, \frac{k'^2 \sigma_{\mathrm{tot}}(k')}{k'^2 - k^2} - \mathrm{Re} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, \frac{(-1)^{l+1} |N_{nl}|^2}{k_{nl}(k_{nl} - k)}. \tag{41}$$

Теперь используя уравнение (7), можно сформулировать обраиную задачу для центральнонесимметричных потенциалов. Кроме того, используя уравнение (29), можно развить обратную задачу для системы уравнений. Так как обычно система уравнений получается при решении задачи трёх тел и более, то такой подход может оказаться отправным пунктом при решении обратной задачи для таких систем.

Далее, так как при выводе релятивистского уравнения (17) мы исходили из уравнения типа (7), то можно аналогичным образом поставить обратную задачу о нахождении квазипотенциала по данным о рассеянии релятивистских частиц.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Если исходить из уравнения типа (3), то вместо уравнения (38) получим:

$$\int_0^\infty dr Z(r, \lambda) \varphi_{nl}^2 e^{\left\{-\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{k_{nl}} \int_r^\infty dr' V(r', \lambda) \varphi_{nl} \Phi_{nl}{}^{(2)}\right\}} = \frac{\hbar^2}{2\mu}\, k_{nl} [N_{nl}(\lambda) - N_{lэ}],$$

$$\int_0^\infty dr Z(r, \lambda) \varphi_{kl}^2 e^{\left\{-\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{k} \int_r^\infty dr' V(r', \lambda) \varphi_{kl} \Phi_{l}{}^{(2)}\right\}} = \frac{\hbar^2}{2\mu}\, k [F_{lp}(k, \lambda) - F_{lэ}(k)]. \tag{A.1}$$

Наличие в формуле (А.1) экспоненциального множителя, содержащего потенциал $V(r, \lambda)$ приводит к тому, что уже в первом приближении $Z(r, \lambda)$ восстанавливается более точно, чем $Z(r, \lambda)$, восстановленный в этом же приближении из уравнения (38). Поэтому выбор исходного уравнения имеет важную роль. Рассмотрим, например, рассеяние протона на протоне (p-p — рассеяние). Тогда $V = V_я + V_k$ и уравнение типа (3) имеет вид:

$$\frac{d}{dr} F_l^я(k, r) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{V_я(r)}{k} [\varphi_l^{k(1)}(k, r) + F_l^я(k, r) \varphi_l^{k(2)}(k, r)]^2, \tag{A.2}$$

где $V_я$ и V_k — соответственно, ядерный и кулоновский потенциалы, $\varphi_l^{k(1)}$, $\varphi_l^{k(2)}$ — решения уравнения Шредингера (37) при $V = V_k$ и $V_я = 0$.

Так как в p-p-системе связанных состояний нет, то уравнение типа (A.1) имеет вид:

$$\int_0^\infty dr Z(r, \lambda)\psi_{kl}^2 e^{\left\{-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{k}\int_r^\infty dr' V_я(r', \lambda)\Psi_{kl}\varphi_l{}^{k(2)}\right\}} = \frac{\hbar^2}{2\mu} k[F_{lp}(k, \lambda)+F_{lk}-F_{lэ}], \tag{A.3}$$

где ψ_{kl} — решение уравнения Шредингера с полным потенциалом $V = V_я + V_k$ $F_{lэ}$, F_{lk} и F_{lp} — соответственно, экспериментальная, кулоновская и приближенная парциальная амплитуда рассеяния.

Уравнение (A.3) удобно тем, что содержит только ядерный потенциал $V_я$, и влияние кулоновского потенциала учитывается через ψ_{kl}, $\varphi_l^{k(2)}$ и F_{lk}. Аналогично, если $V_я = V_1 + V_2$ и решение уравнения Шредингера с V_1 известно, то можно получить уравнение типа (A.3) на неизвестную часть потенциала V_2.

Таким же образом, исходя из уравнения (17), можно получить уравнения типа (A.1), (A.2) и (A.3) и для релятивистского случая.

ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Calogero, *Variable Phase Approach to Potential Scattering*, Acad. Press, New York 1967.

[2] В. В. Бабиков, *Метод фазовых функций в квантовой механике*, Изд. Наука, Москва 1968.

[3] V. V. Babikov, R. M. Mir-Kasimov, *Препринт ОИЯИ* E2-4861, 1969.

[4] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, *Nuovo Cimento*, **29**, 380 (1963).

[5] V. G. Kadyshevsky, *Nuclear Phys.*, **B6**, 125 (1968).

[6] М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, М. Фриман, *Препринт ОИЯИ* Р2-4107, Дубна 1968.

[7] Л. Д. Фаддеев, *ЖЭТФ*, **39**, 1459 (1960).

[8] И. В. Амирханов, В. Е. Гречко, А. И. Титов, *Вестник МГУ*, **5**, 579 (1971).

[9] Y. Hahn, T. E. O'Malley, L. Spruch, *Phys. Rev.*, **134**, B937 (1964).

[10] Б. Н. Захарьев, В. П. Перьмяков, Ю. Н. Фенин, *Препринт ОИЯИ* Р4-5332, 1970; М. Гайлитис, *ЖЭТФ*; **47**, 160 (1964).

[11] Р. Ньютон, *Теория рассеяния волн и частиц*, Москва 1969.

[12] Я. Визнер, Е. П. Жидков, В. Лелек, *Препринт ОИЯИ* Р5-3895, Дубна 1968; Е. П. Жидков, Ю. М. Казаринов, Г. И. Макаренко, А. В. Ракитский, *Препринт ОИЯИ* Р1--5306, Дубна 1970.

[13] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяние реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, Москва 1971.