# QUANTISIERUNG IN STATISCHEN GRAVITATIONSFELDERN

## Quantization in Static Gravitational Fields

VON D. KRAMER UND K.-H. LOTZE

Fachbereich Theoretische Physik, Friedrich-Schiller-Universität Jena*

(Eingegangen am 6. August 1973)

After some remarks dealing with the generators of unitary transformations we consider the canonical quantization of free fields in a static space-time: expansion of the field operators, complete and orthonormal systems of classical solutions, definition of creation and annihilation operators, occupation number representation of the Hamiltonian.

### 1. Einführung

Bei der Behandlung verschiedener quantenelektrodynamischer Probleme wird das Viererpotential in einen externen und einen quantisierten Anteil zerlegt. Häufig ist sogar die Näherung gerechtfertigt, das elektromagnetische Feld als ein klassisches äußeres Feld zu behandeln, welches das Elektron-Positron-Feld beeinflußt, aber von diesem keine Rückwirkung erfährt. Im Furry-Bild [1] ist dann der Zustandsvektor des quantisierten Dirac-Feldes zeitunabhängig, und die zeitliche Entwicklung des Feldoperators $\Psi$ erfolgt nach der Dirac-Gleichung mit äußerem Feld

$$\gamma^i\left(\Psi_{,i}-\frac{ie}{\hbar c}A_i^{\text{ext}}\Psi\right)+\kappa\Psi = 0. \tag{1}$$

Den Feldoperator kann man nach einem vollständigen System klassischer Lösungen von (1) entwickeln. Wenn es sich insbesondere um ein statisches äußeres Feld handelt, können Lösungen mit positiver und negativer Energie unterschieden und Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf diese Weise definiert werden. In Analogie hierzu soll in dieser Arbeit die Quantisierung von Feldern erfolgen, die nur dem Einfluß eines äußeren Gravitationsfeldes unterliegen. Der metrische Tensor $g_{ij}$ ist also vorgegeben (z. B. Schwarzschild-Metrik) und hat $c$-Zahl-Charakter.

* Adresse: Friedrich-Schiller-Universität Jena, Max-Wien-Platz 1, DDR-69 Jena.

### 2. *Erhaltungsgrößen und Erzeugende unitärer Transformationen*

Bevor wir uns auf statische Gravitationsfelder beschränken, wird in diesem Abschnitt der allgemeine Zusammenhang von kontinuierlichen Symmetrietransformationen in der Raum-Zeit und unitären Transformationen im Hilbert-Raum aufgezeigt. In den betrachteten Gravitationsfeldern existiert also eine $r$-parametrige Bewegungsgruppe $G_r$ mit den Strukturrelationen

$$[X_a, X_b] = C^c_{ab} X_c, \qquad a, b = 1, \ldots, r, \tag{2}$$

$$X_a \equiv \xi^i_a \partial_i, \qquad \xi_{ai;j} + \xi_{aj;i} = 0. \tag{3}$$

Nach dem Noether-Theorem entsprechen diesen Symmetrien in der klassischen Theorie die Erhaltungsgrößen

$$E_a = \int \xi^i_a T_i^j d\sigma_j. \tag{4}$$

Die Integration erfolgt über eine beliebige raumartige Hyperfläche $\Gamma$ mit dem invarianten dreidimensionalen Volumenelement $d\sigma$

$$d\sigma_i = n_i d\sigma, \qquad n_i n^i = -1. \tag{5}$$

Aus der Killing-Gleichung (3) und der Divergenzfreiheit des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors

$$T^{mn} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta g_{mn}} \tag{6}$$

folgt unmittelbar der lokale Erhaltungssatz

$$(\xi^m_a T^n_m)_{;n} = 0 \tag{7}$$

und daraus unter bestimmten Bedingungen die Unabhängigkeit der $r$ Invarianten $E_a$ von der Wahl der Hyperfläche; es gilt dann

$$E_{a,i} = 0.$$

Wenn die Lagrange-Funktion $\mathscr{L}$ die partiellen Ableitungen der Felder $V_A$ nur bis zur ersten Ordnung enthält, kann man die Erhaltungsgrößen $E_a$ in folgender Form aufschreiben

$$E_a = \int (\Pi^{Ai} \pounds_a V_A - \xi^i_a L) d\sigma_i, \qquad \Pi^{Ai} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial V_{A,i}}. \tag{8}$$

In der quantisierten Theorie sind die $V_A$ Feldoperatoren, und jede Symmetrietransformation in der Raum-Zeit induziert eine unitäre Transformation im Hilbert-Raum der Quantenzustände

$$|\rangle' = U_a |\rangle, \qquad V'_A(x) = U_a V_A(x) U^\dagger_a, \qquad U^\dagger_a = U_a^{-1}. \tag{9}$$

Die Raum-Zeit-Symmetrie drückt sich darin aus, daß jeder Zustand $|\rangle'$ mit einem in bezug auf das ursprüngliche Bezugssystem ebenfalls physikalisch realisierbaren Zustand identisch ist (Invarianz des Vektorraumes der Zustände). Insbesondere ist die Invarianz des Vakuums zu fordern:

$$|0\rangle' = |0\rangle. \tag{10}$$

Wir betrachten infinitesimale Transformationen

$$x^{i'} = x^i + \lambda \xi^i_a, \qquad U_a = 1 - \frac{i}{\hbar}\lambda E_a, \qquad \lambda \text{ infinitesimal.} \tag{11}$$

Für die hermiteschen Erzeugenden der unitären Transformation

$$E_a = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial U_a}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=0}$$

ergibt sich aus (9) die wichtige Gleichung

$$[E_a, V_A] = \frac{\hbar}{i}\pounds_a V_A, \tag{12}$$

und die Invarianz des Vakuums bedeutet

$$E_a|0\rangle = 0. \tag{13}$$

Es zeigt sich, daß die Erzeugenden in der quantisierten Theorie gerade den Erhaltungsgrößen in der klassischen Theorie entsprechen. Das ist durch gleiche Bezeichnung bereits zum Ausdruck gekommen. Um die Erzeugenden der unitären Transformation zu konstruieren, hat man also nur in den Erhaltungsgrößen (4) die klassischen Felder $V_A$ durch die entsprechenden Operatoren zu ersetzen. Die speziell-relativistische Quantenfeldtheorie legt diese Identifizierung nahe [2].

Bekanntlich gilt für die Lie-Ableitungen eines beliebigen geometrischen Objektes [3]

$$[\pounds_a, \pounds_b] = C^c_{ab}\pounds_c. \tag{14}$$

Für die Erzeugenden $E_a$ als Darstellung der Gruppe $G_r$ im Hilbert-Raum muß natürlich ebenfalls die Kommutatorbeziehung

$$[E_a, E_b] = \frac{\hbar}{i} C^c_{ab} E_c \tag{15}$$

mit denselben Strukturkonstanten wie in (2) erfüllt sein. Für jede Theorie (z. B. Klein-Gordon- oder Maxwell-Feld im äußeren Gravitationsfeld mit der Bewegungsgruppe $G_r$) ist nun explizit zu überprüfen, ob die Relationen (12) und (15) tatsächlich aus den Feldgleichungen

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta V_A} = 0 \tag{16}$$

und aus den (gleichzeitigen) kanonischen Vertauschungsregeln

$$[\Pi^A(x^\alpha), V_B(\bar{x}^\alpha)]_{\bar{t}=t} = \frac{\hbar}{i}\delta^A_B \delta(x^\alpha, \bar{x}^\alpha). \tag{17}$$

$$[\Pi^A(x^\alpha), \Pi^B(\bar{x}^\alpha)]_{\bar{t}=t} = 0,$$

$$[V_A(x^\alpha), V_B(\bar{x}^\alpha)]_{\bar{t}=t} = 0, \tag{17}$$

folgen. Dabei sind die Raum-Zeit-Koordinaten so gewählt, daß die raumartige Hyperfläche $\Gamma$ durch $t$ = const beschrieben wird, und $\delta(x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ bezeichnet die invariante Deltafunktion auf $\Gamma$,

$$\int \delta(x^\alpha, \bar{x}^\alpha) d\sigma = 1.$$

Um die Rechnungen zu vereinfachen, können wir ohne Verlust an Allgemeinheit ein Gaußsches Koordinatensystem verwenden, das von $\Gamma$ aus konstruiert wird,

$$n_i = (0, 0, 0, 1), \qquad ds^2 = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - dt^2, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{18}$$

und im Falle des elektromagnetischen Feldes von der Eichung des Potentials

$$A^i n_i = 0 \tag{19}$$

Gebrauch machen.

Beim Nachweis der Relation (15) ist zu beachten, daß die verschiedenen Erzeugenden $E_a (a = 1, \ldots, r)$ als Integrale über dieselbe Hyperfläche $\Gamma$ aufzufassen sind. Für das reelle skalare Feld und für das Maxwell-Feld gelangt man nach mehreren Umformungen [4], [5] zu dem Ergebnis

$$[E_a, E_b] = \frac{\hbar}{i} C^c_{ab} E_c + \frac{\hbar}{i} \int R^k_{ab;k} d\sigma,$$

$$R^k_{ab} = 2h^k_i (\Pi^A \xi^i_{[a} \pounds_{b]} V_A + L \xi_{[a} \xi^i_{b]} - \Pi^{Ai} \xi_{[a} \pounds_{b]} V_A), \tag{20}$$

wobei die Abkürzungen

$$h_{ik} \equiv g_{ik} + n_i n_k, \qquad \xi_a \equiv \xi^i_a n_i, \qquad n_i n^i = -1, \qquad \Pi^A \equiv \Pi^{Ai} n_i, \tag{21}$$

benutzt wurden. In den genannten Spezialfällen hat man einzusetzen:

| | $L$ | $V_A$ | $\Pi^{Ai}$ |
|---|---|---|---|
| Reelles skalares Feld | $-\frac{1}{2}\left(\varphi_{,i}\varphi^{,i} + \varkappa^2\varphi^2 - \frac{R}{6}\varphi^2\right)$ [1] | $\varphi$ | $-\varphi^{,i}$ |
| Maxwell-Feld | $-\frac{1}{4} B_{ij} B^{ij} \; (B_{ij} \equiv A_{j,i} - A_{i,j})$ | $A_k$ [2] | $B^{ki}$ |

[1] Für $\varkappa = 0$ ist die Feldgleichung konforminvariant.

[2] $\delta^A_B \delta(x, \bar{x})$ ist wegen der Eichung (19) durch die transversale $\delta$-Funktion zu ersetzen.

In dem Resultat (20) kann das Integral über die dreidimensionale Divergenz mit dem Gaußschen Satz in ein Integral über die zweidimensionale Berandung von $\Gamma$ umgeformt werden; und dieses verschwindet, wenn die Felder für große räumliche Abstände genügend rasch abklingen, wenn es sich um einen geschlossenen Ortsraum handelt

(z. B. Quantenfeldtheorie im Einstein-Kosmos) oder wenn die Felder bestimmte Symmetrieeigenschaften besitzen (z. B. ebene Wellen im flachen Raum). Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist, folgt die Gültigkeit von (15) aus der Klein-Gordon-Gleichung bzw. aus der Maxwell-Gleichung sowie aus den postulierten Vertauschungsregeln.

Angewandt auf die Quantenfeldtheorie im Minkowski-Raum mit dem metrischen Tensor $\eta_{ij}$, bildet die Beziehung (15) eine Zusammenfassung der bekannten Ausdrücke für die Kommutatoren

$$[P_i, P_j] = 0,$$
$$[P_i, M_{jk}] = 2i\hbar P_{[j}\eta_{k]i},$$
$$[M_{il}, M_{jk}] = 2i\hbar(M_{i[j}\eta_{k]l} - M_{l[j}\eta_{k]i}) \tag{22}$$

in invarianter Schreibweise. Die Quantisierung des skalaren Feldes im de Sitter-Kosmos [8] ist ein weiteres Beispiel, bei dem die grundlegende Beziehung (15) eine wesentliche Rolle spielt. Die Gleichungen (12) und (15) sind konsistent, wenn man sie in die Jacobi-Identität

$$[E_a, [E_b, V_A]] + [E_b, [V_A, E_a]] + [V_A, [E_a, E_b]] = 0 \tag{23}$$

einsetzt und dabei (14) beachtet. Die Relation (12) stellt eine Verallgemeinerung der Heisenbergschen Bewegungsgleichung dar und enthält beispielsweise für das skalare Feld $\varphi$ in einer statischen Raum-Zeit mit dem Killing-Vektor $\xi^i$, dem der Hamilton-Operator

$$H = \int \xi^i T_i^j d\sigma_j \tag{24}$$

zugeordnet ist, im speziellen Koordinatensystem mit $\xi^i = \delta^i_4$ die Aussage[2]

$$[H, \varphi] = \frac{\hbar}{i} \dot{\varphi}. \tag{25}$$

### *3. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in statischen Gravitationsfeldern*

Bei der Feldquantisierung kommt man mit rein lokalen Betrachtungen nicht aus; das erschwert den Übergang zu einer allgemein-kovarianten Quantenfeldtheorie. Wie die bisherigen Ausführungen zeigen, enthält die Theorie an nichtlokalen Elementen vor allem Integrale über raumartige Hyperflächen, wobei die Integranden in den Feldoperatoren quadratische Ausdrücke sind.

In statischen Metriken zeichnet der zeitartige Killing-Vektor $\xi^i$ in invarianter Weise raumartige Hyperflächen $\Gamma$ aus. Wir legen im folgenden ein Koordinatensystem mit $\xi^i = \delta^i_4$ zugrunde, die Hyperflächen sind dann durch $x^4 \equiv t = \text{const}$ gegeben, und es gilt

$$n_i = (0, 0, 0, \sqrt{-g_{44}}). \tag{26}$$

Die Zeitunabhängigkeit der Metrik emöglicht die Separation der Feldgleichungen (16)

---

[2] Punkt bedeutet partielle Ableitung nach der Zeitkoordinate.

in bezug auf die Zeit und die Darstellung eines hermiteschen Feldoperators $V_A$ in der Form

$$V_A = \sum \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\Sigma}} \sqrt[4]{-g_{44}} \, \{a_\Sigma u_{\Sigma A}(x^\alpha) e^{-i\omega_\Sigma t} + a_\Sigma^\dagger u_{\Sigma A}^*(x^\alpha) e^{i\omega_\Sigma t}\}. \tag{27}$$

Dabei bezeichnet $\omega_\Sigma\,(\omega_\Sigma > 0)$ die auftretenden Separationskonstanten, die Koeffizienten $a_\Sigma$, $a_\Sigma^\dagger$ hängen nicht von der Zeit ab, und die Funktionen $u_{\Sigma A}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem von Lösungen der Differentialgleichung

$$D_A^B u_{\Sigma B} = -\omega_\Sigma^2 u_{\Sigma A} \quad \text{(Eigenwertgleichung)}, \tag{28}$$

$$\int u_{\Sigma A}^* u_{\Sigma'}^A d\sigma = \delta_{\Sigma\Sigma'} \quad \text{(Orthonormalität)}, \tag{29}$$

$$\sum u_{\Sigma A}(\bar{x}^\alpha) u_\Sigma^B(x^\alpha) = \delta_A^B \delta(\bar{x}^\alpha, x^\alpha) \quad \text{(Vollständigkeit)}. \tag{30}$$

Die Summation in (27) und (30) erfolgt über die einzelnen "Moden". Die Orthogonalität zweier Lösungen mit $\omega_\Sigma \neq \omega_{\Sigma'}$ resultiert unmittelbar aus der Hermitezität des Differentialoperators $D_A^B$,

$$\int (D_A^B u_{\Sigma B}^*) u_{\Sigma'}^A d\sigma = \int u_\Sigma^{*A} (D_A^B u_{\Sigma' B}) d\sigma. \tag{31}$$

Wenn Entartung vorliegt, kann man auf die zu gleichem $\omega_\Sigma$ gehörenden Lösungen von (28) ein Orthogonalisierungsverfahren anwenden. Für komplexe Lösungen der Eigenwertgleichung (28) vereinbaren wir

$$u_{\Sigma A}^* \equiv u_{-\Sigma A}. \tag{32}$$

Sofern ein gewisses Integral über eine dreidimensionale Divergenz verschwindet (vgl. die hierfür im vorigen Abschnitt genannten Bedingungen), ist die Hermitezitätsbedingung (31) erfüllt. Um das zu erreichen, wurde bereits in der Entwicklung (27) der Faktor $\sqrt[4]{-g_{44}}$ abgespalten. Die konkrete Gestalt der Eigenwertgleichung (28) ergibt sich in den betrachteten Spezialfällen aus der jeweiligen Feldgleichung (16):

Reelles skalares Feld[3]:

$$\sqrt{-g_{44}} \left[ \left( \Delta + \frac{R}{6} - \kappa^2 \right) + (\sqrt{-g_{44}})_{,\alpha} \partial^\alpha \right] \sqrt[4]{-g_{44}} \, u_\Sigma = -\omega_\Sigma^2 u_\Sigma; \tag{33}$$

Maxwell-Feld:

$$(v_{\Sigma\alpha,\gamma} - v_{\Sigma\gamma,\alpha})^{;\alpha} + \frac{(\sqrt{-g_{44}})^{,\alpha}}{\sqrt{-g_{44}}} (v_{\Sigma\alpha,\gamma} - v_{\Sigma\gamma,\alpha}) = -g^{44} \omega_\Sigma^2 v_{\Sigma\gamma} \tag{34}$$

mit

$$v_{\Sigma\alpha} \equiv \sqrt[4]{-g_{44}} \, u_{\Sigma\alpha}.$$

In der Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2m}{r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2$$

---

[3] $\Delta$ = Laplace-Operator auf $\Gamma$.

können wir beispielsweise für das skalare Feld als vollständiges Orthonormalsystem Produkte aus Radialanteil und Kugelflächenfunktionen wählen

$$u_\Sigma\colon R_l(\omega, r) Y_l^m(\vartheta, \varphi).$$

Der Index $\Sigma$ steht hier als Abkürzung für

$$\sum\colon (\omega, l, m)$$
$$-\sum\colon (\omega, l, -m).$$

Eine Normierung über das Äußere des "black hole" ($t = \text{const}$, $r > 2m$) ist nicht möglich, da die Felder $V_A$ für $r = 2m$ nicht verschwinden.

Im Einstein-Kosmos bilden die Harmonischen auf der dreidimensionalen Kugeloberfläche eine Realisierung des Lösungssystems $u_\Sigma$. Für das Maxwell-Feld im Einstein-Kosmos sind Lösungen von (34) bekannt [4], nach denen man das Viererpotential gemäß (27) entwickeln kann.

In statischen Metriken erhält man für die kanonischen Impulse der hier behandelten Felder

$$\Pi_A = \frac{\dot{V}_A}{\sqrt{-g_{44}}} = \sum \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\Sigma}}\, \frac{(-i\omega_\Sigma)}{\sqrt[4]{-g_{44}}} \{a_\Sigma u_{\Sigma A}(x^\alpha) e^{-i\omega_\Sigma t} - a_\Sigma^\dagger u_{\Sigma A}^*(x^\alpha) e^{i\omega_\Sigma t}\}. \tag{35}$$

Mit Hilfe der Orthonormalitätsrelation (29) gelingt es, die Entwicklungen (27), (35) nach den Koeffizienten $a_\Sigma$, $a_\Sigma^\dagger$ umzustellen:

$$a_\Sigma = \frac{e^{i\omega_\Sigma t}}{\sqrt{2\hbar\omega_\Sigma}} \int u_\Sigma^{*A} \left( \frac{\omega_\Sigma}{\sqrt[4]{-g_{44}}} V_A + i \sqrt[4]{-g_{44}}\, \Pi_A \right) d\sigma, \tag{36a}$$

$$a_\Sigma^\dagger = \frac{e^{-i\omega_\Sigma t}}{\sqrt{2\hbar\omega_\Sigma}} \int u_\Sigma^{A} \left( \frac{\omega_\Sigma}{\sqrt[4]{-g_{44}}} V_A - i \sqrt[4]{-g_{44}}\, \Pi_A \right) d\sigma. \tag{36b}$$

Die kanonischen Vertauschungsregeln (17) sind völlig äquivalent den Kommutatoren

$$[a_\Sigma, a_{\Sigma'}^\dagger] = \delta_{\Sigma\Sigma'}$$
$$[a_\Sigma, a_\Sigma] = 0 = [a_\Sigma^\dagger, a_{\Sigma'}^\dagger]. \tag{37}$$

Deshalb ist es gerechtfertigt, $a_\Sigma^\dagger$ und $a_\Sigma$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu bezeichnen. Durch wiederholte Anwendung der Erzeugungsoperatoren $a_\Sigma^\dagger$ auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ kann man in gewohnter Weise den Hilbert-Raum der Quantenzustände (Fock-Darstellung) aufbauen. In einem so konstruierten Zustand ist jede "Mode" mit einer bestimmten Teilchenzahl $n_\Sigma$ vertreten.

Der Hamilton-Operator (24) ist in statischen Metriken Erhaltungsgröße bzw. Erzeugende einer der Zeittranslation entsprechenden unitären Transformation. Nach einigen Umformungen mit Hilfe der Feldgleichung (16) kann bei der Berechnung des Hamilton-operators $H$ eine dreidimensionale Divergenz abgespalten werden (Gaußscher Satz!), und es ergibt sich schließlich

$$H = \frac{1}{2}\int \frac{\dot{V}^A\dot{V}_A - \ddot{V}_A V^A}{\sqrt{-g_{44}}}\,d\sigma = \frac{1}{2}\sum \hbar\omega_\Sigma(a_\Sigma^\dagger a_\Sigma + a_\Sigma a_\Sigma^\dagger). \tag{38}$$

Zunächst sind alle Rechenschritte wie in der klassischen Theorie ausgeführt worden. Nach der Bildung des Normalprodukts in bezug auf $a_\Sigma$, $a_\Sigma^\dagger$ erhält man die übliche Teilchenzahldarstellung

$$H = \sum \hbar\omega_\Sigma a_\Sigma^\dagger a_\Sigma. \tag{39}$$

Anhand der Entwicklung (27) und der Vertauschungsregeln (37) bestätigt man hieran die Beziehung

$$[H, V_A] = \frac{h}{i}\dot{V}_A. \tag{40}$$

Wenn die Hyperflächen $\Gamma$ einer statischen Metrik eine weitere Symmetrie (z.B. Axialsymmetrie) aufweisen, so existiert ein zusätzlicher Killing-Vektor

$$\eta^i = (\eta^\alpha(x^\beta), 0).$$

Die Lie-Ableitung £ (in bezug auf $\eta^i$) und der Differentialoperator in der Eigenwertgleichung (28) mögen kommutieren und besitzen folglich ein gemeinsames Eigenvektorsystem $u_{\Sigma A}$:

$$£_A^B u_{\Sigma B} = \lambda_\Sigma u_{\Sigma A}, \quad \lambda_\Sigma^* = -\lambda_\Sigma = \lambda_{-\Sigma}. \tag{41}$$

Durch einfache Rechnung gelangen wir wieder zur Teilchenzahldarstellung

$$E = \sum \hbar\lambda_\Sigma a_\Sigma^\dagger a_\Sigma \tag{42}$$

für die Erzeugende (in bezug auf $\eta^i$). Offensichtlich kommutiert sie mit dem Hamilton-operator,

$$[H, E] = 0.$$

Weil eine Erzeugende $E$ auch bei wechselwirkenden Feldern Bewegungskonstante ist, können Teilchen immer nur paarweise (mit den Eigenwerten $\pm\lambda_\Sigma$) erzeugt oder vernichtet werden.

## 4. *Vertauschungsfunktion*

Die kanonischen Vertauschungsregeln (17) werden auf einer Hyperfläche $\Gamma$ postuliert, sie gelten nur für gleiche Zeiten ($\bar{t} = t$). Die Entwicklung (27) des Feldoperators $V_A$ gestattet es nun, auch die nichtgleichzeitige Vertauschungsfunktion für die Komponenten von $V_A$ allgemein anzugeben:

$$[V_A(x), V^B(\bar{x})] = \frac{h}{i}\Delta_A^B(x, \bar{x}),$$

$$\Delta_A^B(x, \bar{x}) \equiv \sqrt[4]{-g_{44}(x^\alpha)}\,\sqrt[4]{-g_{44}(\bar{x}^\alpha)}\times$$
$$\times\,\mathrm{Re}\left[\sum\left\{\frac{u_{\Sigma A}^*(x^\alpha)u_\Sigma^B(\bar{x}^\alpha)}{i\omega_\Sigma}\,e^{i\omega_\Sigma(t-\bar{t})}\right\}\right] \tag{43}$$

(Re $\equiv$ Realteil). Im Falle reeller Funktionen $u_{\Sigma A} = u_{\Sigma A}^*$ führt die Realteilbildung auf

$$\mathrm{Re}\,[\ldots] = \sum\left\{\frac{u_{\Sigma A}(x^\alpha)u_\Sigma^B(\bar{x}^\alpha)}{\omega_\Sigma}\sin\omega_\Sigma(t-\bar{t})\right\}.$$

Wie mit der Vollständigkeitsrelation (30) leicht nachzuweisen ist, besitzt die Vertauschungsfunktion (43) folgende Eigenschaften:

$$\Delta_A^B(x, \bar{x})\big|_{t=\bar{t}} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial\Delta_A^B(x, \bar{x})}{\partial t}\right|_{t=\bar{t}} = \sqrt{-g_{44}}\;\delta_A^B\delta(x^\alpha, \bar{x}^\alpha). \tag{44}$$

Dadurch ist der Anschluß an die kanonischen Vertauschungsregeln (17) gesichert. Da die Zweipunktfunktion (43) (bezüglich beider Argumente) die Feldgleichung (16) erfüllt, ist damit außerdem das Problem der zeitlichen Entwicklung des Feldoperators aus vorgegebenen Anfangswerten (Cauchy-Problem) gelöst:

$$V_A(x) = \int \Delta_A^B(x, \bar{x})\,\frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial\bar{x}^i}\,V_B(\bar{x})d\bar{\sigma}^i. \tag{45}$$

In Analogie zur Quantenfeldtheorie im Minkowski-Raum können auch andere singuläre Funktionen (z.B. Feynman-Propagator) in statischen Gravitationsfeldern angegeben werden.

## 5. *Verallgemeinerungen*

Das hier dargestellte Quantisierungsverfahren läßt sich in zweifacher Hinsicht verallgemeinern. Man kann einmal die Betrachtungen auf andere Felder ausdehnen, insbesondere auf das Dirac-Feld mit der Entwicklung

$$\Psi = \sum\sqrt{\frac{\hbar}{\omega_\Sigma}}\,(b_\Sigma u_\Sigma(x^\alpha)e^{-i\omega_\Sigma t} + d_\Sigma^\dagger v_\Sigma(x^\alpha)e^{i\omega_\Sigma t}),$$

wobei z.B. die Bispinoren $u_\Sigma\ (x^\alpha)$ der Normierungbedingung

$$\int u_\Sigma u_{\Sigma'}d\sigma = \omega_\Sigma\delta_{\Sigma\Sigma'}$$

genügen. Der Hamilton-Operator hat wieder die bekannte Form

$$H = \sum\hbar\omega_\Sigma(b_\Sigma^\dagger b_\Sigma + d_\Sigma^\dagger d_\Sigma).$$

Andererseits ist es ohne weiteres möglich, auch in stationären Gravitationsfeldern zu quantisieren. Für das skalare Feld lautet dann die Verallgemeinerung von (38)

$$H = -\tfrac{1}{2}\int\left[g^{44}(\dot{\varphi}^2-\varphi\ddot{\varphi})+2g^{4\alpha}\dot{\varphi}\varphi_{,\alpha}\right]\sqrt{-g_{44}}\,d\sigma,$$

und dafür resultiert nach einigen Umformungen wieder die Darstellung (39).

Die Wechselwirkung der betrachteten (freien) Materiefelder (Klein-Gordon-, Maxwell-, Dirac-Feld) mit dem statischen bzw. stationären Gravitationsfeld ist exakt berücksichtigt worden. Auf dieser Basis ist dann die Wechselwirkung dieser Materiefelder untereinander (Quantenelektrodynamik im äußeren Gravitationsfeld) störungstheoretisch zu behandeln. Wir brauchen nicht zu fordern, daß das Gravitationsfeld in der fernen Vergangenheit und Zukunft ($t \to \pm\infty$) abgeschaltet ist, wie das in verschiedenen Arbeiten [6], [7] von vornherein angenommen wird.

## LITERATUR


[1] S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*, Harper International Edition, Tokyo 1966, p. 566.

[2] E. Schmutzer, *Symmetrien und Erhaltungssätze der Physik*, Akademie-Verlag, Berlin 1972.

[3] K. Yano, *The Theory of Lie Derivatives and Its Application*, Amsterdam 1955.

[4] K.-H. Lotze, *Die Quantisierung des Maxwell-Feldes im Einstein-Kosmos*, Diplomarbeit, FSU Jena 1973.

[5] H. K. Urbantke, *Nuovo Cimento*, **B63**, 203 (1969).

[6] B. S. De Witt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, in: Relativity, Groups and Topology, Les Houches 1963, New York 1964; *Phys. Rev.*, **162**, 1195 (1967).

[7] R. Utiyama, *Phys. Rev.*, **125**, 1727 (1962),

[8] N. A. Chernikov, E. A. Tagirov, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **A9**, 109 (1968).