ТРЕХМЕРНАЯ ЛАГРАНЖЕВА ФОРМУЛИРОВКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПРОБЛЕМЫ ДВУХ ТЕЛ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ*

Three-Dimensional Lagrangian Formulation of the Classical Relativistic Two-Body Problem

Р. П. Гайда

Львовский госуниверситет им. И. Франко, Львов**

(Поступила в редакцию 16 январья 1974 г.)

The consistency of the three-dimensional Lagrangian formalism in the classical relativistic two-body problem has been considered. Transformation formulae corresponding to the infinitesimal Lorentz transformations have been obtained as a result of a special definition of the connection between coordinate times determining simultaneous positions of two particles in two inertial reference frames. The equation expressing a sufficient form-invariance condition of the equations of motion has been obtained. Conservation laws reflecting the symmetry of the action integral have been found. In particular it has been shown that the centre-of-mass integral is a consequence of the Lorentz-invariance condition. The expression for the centre-of-mass coordinates has been written. The example of a relativistic interaction Lagrangian has been considered. The well-known non-relativistic and quasi-relativistic results can be obtained by means of expansion in powers of c^{-2}.

1. *Введение*

Наиболее известная форма классической релятивистской механики системы двух частиц основана на использовании вариационного принципа типа Тетроде--Фоккера [1–3], в котором взаимодействие описывается двойным лоренц-инвариантным интегралом вдоль мировых линий взаимодействующих частиц. Такой подход позволяет рассматривать не только электромагнитные взаимодействия, (для которых указанная формулировка проблемы двух тел эквивалентна полевой концепции, если в последней пренебрегать процессами излучения), но и может служить основой исследования общих выражений для интеграла действия системы двух частиц, взаимодействующих по произвольному закону, удовлетворяющему требованию лоренц-инвариантности [4–6].

* Работа выполнена во время пребывания автора в качестве стипендиата ЮНЕСКО в Институте физики Ягеллонского университета, Краков, Польша.

** Address: Lvov State University, 290005 Lvov-5, Drahomanova St. 50, USSR.

Вариационному принципу Фоккера соответствуют уравнения движения, являющиеся, в отличие от уравнений ньютоновской механики, либо интегро-дифференциальными [4, 7], либо дифференциально-разностными уравнениями [8–10]. Такой вид уравнений, отражающий физический факт конечности скорости распространения взаимодействий, приводит к определенным трудностям, отмеченным в [11]. Поэтому важной задачей является исследование тех вариантов теории, которые приводили бы к обычным дифференциальным уравнениям движения. Главные трудности на этом пути связаны с известной „теоремой не-взаимодействия" [12], утверждающей, что гамильтонова формулировка релятивистской проблемы двух тел, в которой каноническими координатами служат пространственные компоненты четырехмерных радиус-векторов отдельных частиц, возможна только в тривиальном случае отсутствия взаимодействия.

Основной вопрос, который необходимо решить при любой попытке сформулировать дифференциальные уравнения движения в релятивистской проблеме двух тел, состоит в том, как следует обобщить при переходе от галилеевого пространства-времени к специальной теории относительности понятие абсолютного времени, являющегося независимым переменным в ньютоновских уравнениях движения. В динамике Кюри-Хилла [13–14] для построения теории, опирающейся на концепцию мгновенного дальнодействия, используются индивидуальные времена каждой частицы с соответствующими трансформационными свойствами, имеющие, однако, в каждой системе отсчета общее значение, фигурирующее в уравнениях движения. Лагранжева и гамильтонова теория с одним лоренц-инвариантным параметром, играющем роль времени, сформулирована для случая электромагнитных взаимодействий в работах Старушкевича [15, 11]. Фронсдал [16] также вводит лоренц-инвариантное „время", с помощью которого удается построить канонический формализм для релятивистской задачи двух тел.

Целью настоящей работы является построение лагранжевой теории для релятивистской системы двух взаимодействующих частиц в трехмерном виде, весьма близком к обычной лагранжевой форме ньютоновской динамики с одним универсальным временем. Согласованность с принципом относительности Эйнштейна достигается при этом на основе идеи автора [17, 18] об определении связи между одновременностями пространственно разделенных событий в двух лоренцовых системах отсчета (п. 2). Из условия форм-инвариантности лагранжиана взаимодействия L_{int} при переходе между двумя инерциальными системами отсчета получаются уравнения, представляющие собой ограничения, налагаемые на L_{int}, как функцию скоростей взаимодействующих частиц (п. 3). Если в этих точных уравнениях воспользоваться разложениями по степеням c^{-2}, то в нулевом и первом приближении они дают известные условия [17, 19, 20], которым должны удовлетворять лагранжианы взаимодействия ньютоновской и квазирелятивистской механики системы частиц (п. 4).

Из десяти законов сохранения, соответствующих Пуанкаре-инвариантности интеграла действия, следует отметить закон сохранения, отображающий равномерное движение центра инерции замкнутой системы и являющийся следствием инвариантности относительно группы чистых преобразований Лоренца (п. 5), если эту инвариантность понимать в смысле, определенном в п. 3. Мы увидим, в частности, что из условия лоренц-инвариантности вытекают известные выражения для интеграла движения центра инерции в квазирелятивистском приближении.

2. Одновременность и принцип относительности

В качестве исходного пункта примем следующий постулат:

Уравнения движения замкнутой релятивистской системы двух взаимодействующих частиц в произвольной инерциальной системе отсцета S являются уравнениями Эйлера-Лагранжа вариационного принципа

$$\delta I = 0, \qquad I = I_1 + I_2 + I_{\text{int}}, \tag{1}$$

где

$$I_a = -m_a c^2 \int d\tau_a = -m_a c^2 \int \gamma_a^{-1} dt \equiv \int L_a dt \tag{2}$$

— интегралы действия свободных частиц ($a = 1,2$), а величина

$$I_{\text{int}} = \int L_{\text{int}}(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_2(t))dt \equiv -\int U(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_2(t))dt \tag{3}$$

описывает взаимодействие между ними. В равенстве (2) $d\tau_a$ обозначает интервал собственного времени a-ой частицы, $\gamma_a = (1 - v_a^2/c^2)^{-1/2}$. Функции L_a являются лагранжианами свободных частиц, а $L_{\text{int}} \equiv -U$ — лагранжианом взаимодействия. Полный интеграл действия можно записать в виде

$$I = \int L dt, \qquad L = L_1 + L_2 - U. \tag{4}$$

Функция U, представляющая собой релятивистское обобщение ньютоновской потенциальной энергии взаимодействия, может зависеть, по предположению, от относительного радиуса-вектора частиц $\boldsymbol{r}(t) \equiv \boldsymbol{x}_1(t) - \boldsymbol{x}_2(t)$ и их скоростей $\boldsymbol{v}_a(t) \equiv \dot{\boldsymbol{x}}_a(t)$, взятых в фиксированной системе отсчета S в один и тот же момент времени t (точкой мы обозначаем производную по времени t). То, что координаты частиц берутся в подинтегральной функции (3) только в указанной комбинации является следствием трансляционной инвариантности. Из требования инвариантности относительно трехмерных вращений и отражений вытекает, что три векторы $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ могут входить в U только в виде трехмерных скалярных произведений (в частности, квадратов).

Пределы интегрирования в равенствах (2) и (3) предполагаются фиксированными; для простоты мы условимся их пропускать. Считая, как обычно, заданными также и положения частиц, соответствующие концам промежутка интегрирования, можем записать уравнения движения в виде уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_a} = 0 \qquad (a = 1, 2). \tag{5}$$

Нашей задачей является, во-первых, доказательство того, что исходный постулат совместим с принципом относительности, и, во-вторых, нахождение условий, при которых форма уравнений движения (5) будет одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Рассмотрим переход от системы отсчета S к другой инерциальной системе отсчета S', движущейся с постоянной скоростью V вдоль i-ой оси системы $S(i = 1, 2, 3)$. Выражения I_a остаются, как известно, при таком переходе инвариантными как в отношении численного значения, так и в смысле формы зависимости функций L_a от $\boldsymbol{v}_a$:

$$I_a = I'_a = -m_a c^2 \int (\gamma'_a)^{-1} dt', \qquad \gamma'_a = \left(1 - \frac{v'^2_a}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{6}$$

Вопрос о соответствующем преобразовании величины I_{int} является сложным, и его решение составляет основу настоящей работы.

Принцип относительности требует выполнения двух условий [21]: во-первых, чтобы в системе отсчета S' взаимодействие между частицами описывалось интегралом действия, выражающимся формулой, аналогичной (3), и численно равным интегралу I_{int}:

$$I_{\text{int}} = I'_{\text{int}} = -\int U'(\boldsymbol{r}'(t'), \boldsymbol{v}'_1(t'), \boldsymbol{v}'_2(t'))dt'; \tag{7}$$

во-вторых, чтобы уравнения движения, отвечающие вариационному принципу $\delta I' = 0$, имели в новых переменных тот же вид, что и уравнения (5) в старых переменных. Для соблюдения последнего условия достаточно потребовать, чтобы оставалась инвариантной форма зависимости функции U от своих аргументов[1]:

$$U'(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2) = U(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2). \tag{8}$$

Выполнение условия (7) связано со следующей трудностью. Если величины $\{t, \boldsymbol{x}_a(t)\}$ рассматривать как событие P_a, изображаемое точкой на мировой линии частицы a, то переход $S \to S'$ будет сопровождаться следующими преобразованиями Лоренца:.

$$t'_a = \Gamma\left[t - \frac{V}{c^2} x_{ai}(t)\right]; \qquad x'_{ai}(t'_a) = \Gamma[x_{ai}(t) - Vt]$$

$$x'_{aj}(t'_a) = x_{aj}(t), \qquad j \neq i; \qquad \Gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{9}$$

Аналогичные трансформационные формулы можно записать для скоростей $\boldsymbol{v}_a$. В результате указанных преобразований аргументы функции U, одновременные в системе отсчета S, трансформируются в разновременные величины $\boldsymbol{x}'_1(t'_1)$, $\boldsymbol{v}'_1(t'_1)$; $\boldsymbol{x}'_2(t'_2)$, $\boldsymbol{v}'_2(t'_2)$. Поэтому таким путем величине I_{int}, определенной формулой (3)

---

[1] Можно было бы рассмотреть более общий случай, когда в правой части равенства (8) имеется дополнительный член, имеющий вид полной производной по времени произвольной функции от r [21]. Мы ограничимся в настоящей работе более жестким условием (8).

в системе отсчета S, нельзя вообще сопоставить величину I'_{int} вида (7) в системе отсчета S', так что вопрос о преобразовании $I_{\text{int}} \to I'_{\text{int}}$ теряет смысл. Это обстоятельство является основой общепринятого мнения, заключающегося в том, что релятивистская проблема двух тел не может быть сформулирована в виде вариационного принципа (1), в котором переменной интегрирования служит обычное координатное время t, а функция Лагранжа L конструируется из трехмерных величин $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{v}_a(t)$.

В квазирелятивистских вариантах механики взаимодействующих частиц описанная трудность обходится с помощью некоторых не вполне удовлетворительных способов перерасчета от старой одновременности к новой, опирающихся к тому же существенным образом, на приближенный характер теории [22, 23]. Мы решим эту проблему с помощью идеи автора [17, 18] об определении связи между одновременностями пространственно разделенных событий в двух лоренцовых системах отсчета, опирающемся на понятии „среднего наблюдателя", измеряющего в каждой системе отсчета время таких пар событий.

Прежде всего отметим, что в первоначальной системе отсчета S время t, являющееся независимой переменной в интеграле (3), может быть измерено часами, локализованными в произвольной точке пространства, ибо все часы, неподвижные в S, синхронизированы между собой. Поэтому для определения формулы преобразования времени t при переходе $S \to S'$ необходимо д о п о л н и т е л ь н о указать пространственные координаты события, для которого t является временной координатой. Формулы (9) записаны в дополнительном предположении, что под t следует понимать временную координату события P_a, которым является мгновенное положение $x_a(t)$ одной из частиц системы. Поскольку это предположение, кажущееся на первый взгляд естественным, не заложено в исходном постулате, опирающемся на равенствах (1)–(3), мы вправе рассмотреть и другие возможности. А именно, имея в виду трансформационные свойства интеграла I_{int}, под переменной t, фигурирующей в (3), мы будем понимать время, измеренное совокупностью наблюдателей, находящихся (в заданной системе отсчета S) на середине отрезка, соединяющего одновременные в S положения частиц. Другими словами, время t в выражении (3) отвечает событию P с мировыми координатами $(t, \bar{x})$, где $\bar{x} = \frac{1}{2}[x_1(t)+x_2(t)]$. Тогда моменту t соответствует в системе отсчета S' момент

$$t' = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}\,\bar{x}_i\right) = \Gamma\left[t - \frac{V}{2c^2}\,(x_{1i}+x_{2i})\right] = \frac{t'_1+t'_2}{2}\,, \tag{10}$$

где t'_1 и t'_2 выражаются первой из формул (9) для $a = 1, 2$. Переменная t', характеризующая новую одновременность в системе S', является, по определению операции преобразования $I_{\text{int}} \to I'_{\text{int}}$ переменной интегрирования в правой части равенства (7). Область интегрирования по t' является отображением согласно формуле (10) интервала интегрирования по t.

События $P'_1(t, x'_1(t'))$ и $P'_2(t, x'_2(t'))$, одновременные в системе S' не совпадают, конечно, с событиями $P_1(t, x_1(t))$ и $P_2(t, x_2(t))$, одновременными в S.

Таким образом переход от старой одновременности t к новой t' не устраняет, а, наоборот, предполагает относительность одновременности. Указанный переход удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна, т.е. утверждению об эквивалентности всех инерциальных систем отсчета. Это следует из того факта, что формула, обратная к (10), отличается от последней, как легко проверить с помощью (9), заменой штрихованных величин на нештрихованные (и наоборот) и изменением знака относительной скорости двух систем отсчета. Иначе говоря, если исходить из интеграла I'_{int}, записанного в системе отсчета S', то его преобразование к системе отсчета S выполняется по правилу, однозначно определяемым введенным выше правилом перехода к новой одновременности при переходе $S \to S'$ и имеющим такой же вид.

3. *Условие лоренц-инвариантности уравнений движения*

Теперь мы можем сделать следующий шаг, а именно изучить вопрос: каким условиям должны удовлетворять функции $U(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ чтобы в результате преобразования (7) в соответствии с равенством (10) мы получили функцию U', обладающую свойством (8).

Рассмотрим с этой целью инфинитезимальные преобразования, отвечающие случаю $V \to 0$, когда можно пренебрегать всеми членами, пропорциональными V^n $(n \geqslant 2)$. Тогда для совместимости равенств (7) и (8) достаточно потребовать, чтобы исчезала вариация дифференциала действия, обусловленная такими преобразованиями [21]:

$$\delta_i dI_{\text{int}} \equiv -[U(\boldsymbol{r}(t)+\delta_i\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1(t)+\delta_i\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2(t)+\delta_i\boldsymbol{v}_2)(dt+\delta_i dt)-$$
$$-U(\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{v}_1(t), \boldsymbol{v}_2(t))dt] = 0. \tag{11}$$

Здесь индекс „i" указывает, что преобразование обусловлено движением вдоль i-ой оси, а вариации переменных $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}_a$ по определению равны:

$$\delta_{i\boldsymbol{r}} \equiv \boldsymbol{r}'(t')-\boldsymbol{r}(t) \equiv \boldsymbol{x}'_1(t')-\boldsymbol{x}'_2(t')-\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{x}_2(t), \tag{12}$$

$$\delta_i\boldsymbol{v}_a \equiv \boldsymbol{v}'_a(t')-\boldsymbol{v}_a(t). \tag{13}$$

Вариацию $\delta_i dI_{\text{int}}$ можно переписать в виде

$$\delta_i dI_{\text{int}} = -\delta_i U dt - U\delta_i dt, \tag{14}$$

где

$$\delta_i U = \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\delta_i\boldsymbol{r}\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_1}\cdot\delta_i\boldsymbol{v}_1\right)+\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_2}\cdot\delta_i\boldsymbol{v}_2\right). \tag{15}$$

Заменяя формулу (10) инфинитезимальным соотношением

$$t' = t-\frac{V}{2c^2}(x_{1i}+x_{2i}), \tag{16}$$

находим:

$$\delta_i dt \equiv dt' - dt = -\frac{V}{2c^2}(v_{1i}+v_{2i})dt. \tag{17}$$

Чтобы вычислить вариацию (12), заметим, что инфинитезимальные преобразования координат частиц можно представить согласно формулам (9) (в которых следует положить теперь $\Gamma = 1$) следующими равенствами:

$$x'_{aj}(t'_a) = x_{aj}(t) - \delta_{ij}Vt = x_{aj}\left(t'_a + \frac{V}{c^2}x_{ai}\right) - \delta_{ij}Vt \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{18}$$

Если вместо t'_a возьмем здесь величину t' и воспользуемся формулой (16), то получим:

$$x'_{aj}(t') = x_{aj}(t) - \delta_{ij}Vt - (-1)^a \frac{V}{2c^2} r_i v_{aj} \qquad (a = 1, 2). \tag{19}$$

Отсюда

$$\delta_i \boldsymbol{r} = \frac{V}{2c^2} r_i(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{20}$$

Для вычисления вариаций скоростей проще всего воспользоваться соотношением

$$v'_{aj}(t') = v_{aj}\left(t' + \frac{V}{c^2}x_{ai}\right) - \delta_{ij}V + V\frac{v_{ai}v_{aj}}{c^2}, \tag{21}$$

выражающим (с учетом преобразования времени) релятивистский закон сложения скоростей в случае $V \to 0$. С помощью равенства (16) найдем:

$$\delta_i v_{aj} = -\delta_{ij}V + V\frac{v_{ai}v_{aj}}{c^2} - (-1)^a \frac{V}{2c^2} r_i \dot{v}_{aj} \qquad (a = 1, 2), \tag{22}$$

где $\dot{v}_{aj}$ — компоненты ускорения частиц. Подставляя выражения (15), (17), (20) и (22) в формулу (14), получаем:

$$\frac{1}{V}\frac{\delta_i dI_{\text{int}}}{dt} = \frac{\partial U}{\partial v_{1i}} + \frac{\partial U}{\partial v_{2i}} - \frac{1}{c^2}\left\{\frac{r_i}{2}\left[\left(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\dot{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right) - \left(\dot{\boldsymbol{v}}_2 \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)\right] + v_{1i}\left(\boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_1^1}\right) + v_{2i}\left(\boldsymbol{v}_2 \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right) - \frac{1}{2}(v_{1i}+v_{2i})U\right\}. \tag{23}$$

Таким образом, условие (11) форм-инвариантности уравнений движения (5) дает при каждом значении $i = 1, 2, 3$ уравнение для функции U. Их можно объединить в виде одного векторного уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_1} + \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_2} - \frac{1}{c^2}\left\{\frac{\boldsymbol{r}}{2}\left[\left(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\right) + \left(\dot{\boldsymbol{v}}_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right) - \left(\dot{\boldsymbol{v}}_2 \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \boldsymbol{v}_1\left(\boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right) + \boldsymbol{v}_2\left(\boldsymbol{v}_2 \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)U\right\} = 0. \tag{24}$$

Входящие в уравнения (24) ускорения $\dot{\boldsymbol{v}}_a$ можно исключить с помощью уравнений движения (5), которые легко преобразовать к следующему виду:

$$m_a\gamma_a\dot{\boldsymbol{v}}_a+\frac{1}{c^2}m_a\gamma_a^3\boldsymbol{v}_a(\dot{\boldsymbol{v}}_a\cdot\dot{\boldsymbol{v}}_a)-\left[\left(\dot{\boldsymbol{v}}_1\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_1}\right)+\left(\dot{\boldsymbol{v}}_2\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}_2}\right)\right]\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_a}=$$

$$=(-1)^a\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}+\left(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\right)\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{v}_a}.\qquad(a=1,2).\tag{25}$$

Если решить систему алгебраических уравнений (25) относительно шести величин $\dot{v}_{aj}$ и подставить соответствующие выражения в уравнение (24), то можно записать в окончательной форме достаточное условие того, чтобы уравнения движения (5) не меняли своего вида при переходе $S\to S'$. Мы не будем выполнять здесь этих вычислений, а ограничимся к очевидному утверждению, что в результате мы получили бы сложную систему трех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для функции $U(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$, описывающей взаимодействие между частицами. Откладывая к следующему пункту рассмотрение одного из приближенных подходов к исследованию таких уравнений, отметим здесь вывод, вытекающий непосредственно из точных уравнений (24): величина U не может быть функцией только расстояния между частицами, а должна обязательно зависеть от скоростей. В этом легко убедиться, если записать уравнения

$$(v_{1i}+v_{2i})\left(\frac{\partial U}{\partial r_i}-\frac{U}{r_i}\right)+\sum_{k\neq i}(v_{1k}+v_{2k})\frac{\partial U}{\partial r_k}=0,\tag{26}$$

к которым сводятся уравнения (24) в предположении $\partial U/\partial\boldsymbol{v}_a=0$ $(a=1,2)$. Действительно, поскольку скорости $\boldsymbol{v}_a$ можно задавать произвольно, то единственным решением системы (26) является тривиальное: $U\equiv 0$.

4. Условия приближенной лоренц-инвариантности квазирелятивистских уравнений движения

Рассмотрим квазирелятивистскую систему двух частиц, т.е. систему, в которой как кинетическая энергия, так и энергия взаимодействия мала по сравнению с энергиями покоя m_ac^2. Тогда функцию U можно разложить в ряд по степеням c^{-2}:

$$U=U^{(0)}+U^{(1)}+U^{(2)}+\dots.\tag{27}$$

Член $U^{(0)}$ представляет собой взятый со знаком минус нерелятивистский лагранжиан взаимодействия, а дальнейшие члены — релятивистские поправки к нему соответствующих порядков относительно c^{-2}. Подставляя разложение (27) в уравнения (24) и (25), а также разлагая в (25) величины γ_a по степеням $(v_a/c)^2$, получим последовательность уравнений для функций $U^{(n)}(n=0,1,2,\dots)$ из которых мы рассмотрим только три первых.

В нулевом приближении вместо (24) имеем:

$$\frac{\partial U^{(0)}}{\partial v_{1i}} + \frac{\partial U^{(0)}}{\partial v_{2i}} = 0. \tag{28}$$

Отсюда следует, что скорости частиц могут входить в $U^{(0)}$ лишь в комбинации $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$. Этот вывод отражает, как известно, требование галилеевой инвариантности нерелятивистской механики. Переходя к следующим приближениям, примем, что $U^{(0)}$ вообще от скоростей не зависит, т.е. совпадает с обычной потенциальной энергией $U^{(0)}(r)$[2]. Тогда в первом и втором порядке относительно c^{-2} из уравнений (24) и с учетом (25) получим:

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \boldsymbol{v}_2} = \frac{1}{2c^2}\left\{\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \frac{dU^{(0)}(r)}{d\boldsymbol{r}}\right) - (\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)U^{(0)}(r)\right\}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \boldsymbol{v}_1} + \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \boldsymbol{v}_2} = \frac{1}{c^2}\left\{\frac{\boldsymbol{r}}{2}\left[\left(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \boldsymbol{r}}\right) - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{m_1}\left(\frac{dU^{(0)}(r)}{d\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right) - \frac{1}{m_2}\left(\frac{dU^{(0)}(r)}{d\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \boldsymbol{v}_2}\right)\right] +$$

$$\left. + \boldsymbol{v}_1\left(\overline{\boldsymbol{v}_1} \cdot \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \boldsymbol{v}_1}\right) + \boldsymbol{v}_2\left(\boldsymbol{v}_2 \cdot \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \boldsymbol{v}_2 \cdot}\right) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)U^{(1)}\right\}. \tag{30}$$

Уравнение (29) было получено автором [17] с помощью канонического формализма из условия приближенной лоренц-инвариантности квазирелятивистских гамильтоновых уравнений движения порядка c^{-2}. Его можно рассматривать [20] как прямое следствие классических перестановочных соотношений, отражающих требование приближенной лоренц-инвариантности. Общее решение уравнения (29), удовлетворяющее условию вращательной инвариантности и учитывающее тот факт, что функция $U^{(1)}$ может содержать (по соображениям размерности) только вторые степени скоростей v_a, имеет вид:

$$U^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = -\frac{1}{2c^2}\left\{[\alpha(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2) + \beta(v_1^2+v_2^2)]U^{(0)} - \right.$$

$$-[\alpha(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_2) + \beta(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_1)^2 + \beta(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_2)^2]\frac{1}{r}\frac{dU^{(0)}}{dr} +$$

$$\left. + (\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)^2\varphi_1(r) + \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\right)^2\varphi_2(r) + \varphi_3(r)\right\}, \quad (\alpha+2\beta = 1). \tag{31}$$

Здесь $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$ и $\varphi_3(r)$ — произвольные функции.

---

[2] Если потребовать дополнительно соблюдения условия Кюри инвариантности мировой линии [24] и инвариантности относительно обращения времени, то, как показано в [25], такой вид функции $U^{(0)}$ является единственно возможным.

Выражение (31) содержит все рассматривавшиеся в литературе приближенно релятивистские (порядка c^{-2}) лагранжианы взаимодействия бесспиновых частиц (за исключением членов, соответствующих несимметричным взаимодействиям, введенным в [5] и требующим, как нетрудно убедиться, замены равенства (8) условием инвариантности „с точностью до производной" (см. примечание[1]). Таким образом из точных уравнений (24)–(25) в первом квазирелятивистском приближении получаются выводы, совпадающие с результатами всевозможных приближенных методов (в том числе основанных на полевых теориях).

Уравнения (30) выражают ограничения, налагаемые условием лоренц-инвариантности на функцию $U^{(2)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ при заданных функциях $U^{(0)}(r)$ и $U^{(1)}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$. Аналогичные уравнения можно записать для дальнейших членов ряда (27).

5. *Законы сохранения*

Найдем первые интегралы движения, соответствующие, согласно теореме Нетер, инвариантности интеграла действия I относительно произвольных преобразований из группы Пуанкаре. Поскольку свойства симметрии релятивистской функции Лагранжа L по отношению к пространственно-временным трансляциям и пространственным поворотам ничем не отличаются от этих же свойств для нерелятивистской системы, мы можем записать сразу семь интегралов движения, а именно законы сохранения импульса $\boldsymbol{P}$, энергии E и момента импульса $\boldsymbol{J}$:

$$\boldsymbol{P} \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \sum_a \left(m_a \gamma_a \boldsymbol{v}_a - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_a}\right) = \text{const}, \tag{32}$$

$$E \equiv \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \cdot \boldsymbol{v}_a\right) - L = \sum_a \left\{m_a c^2 \gamma_a - \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_a} \cdot \boldsymbol{v}_a\right)\right\} + U = \text{const}, \tag{33}$$

$$\boldsymbol{J} \equiv \sum_a \left[\boldsymbol{x}_a \cdot \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}\right] = \sum_a \left\{m_a \gamma_a [\boldsymbol{x}_a \cdot \boldsymbol{v}_a] - \left[\boldsymbol{x}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_a}\right]\right\} = \text{const}. \tag{34}$$

Равенство (33) удобно представить в виде

$$E = T_1 + T_2 + W, \tag{33a}$$

где $T_a = m_a c^2 \gamma_a$ — энергия свободной частицы, а

$$W = U - \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_1} \cdot \boldsymbol{v}_1\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_2} \cdot \boldsymbol{v}_2\right) \tag{35}$$

— энергия взаимодействия.

Более сложным является вопрос о законе сохранения, отвечающем равномерному движению центра инерции замкнутой системы и отражающем инвариантность интеграла действия относительно пространственно-временных вращений, или, иначе, чистых преобразований Лоренца, соответствующих переходу $S \to S'$ (п. 2). Для вывода этого закона сохранения мы воспользуемся следующим обстоятельством (оно подчеркивается в работах [21, 26, 27]): основной смысл теоремы Нетер [28] состоит в установлении не самых законов сохранения, а некоторого тождества для вариации интеграла действия, обладающего определенными свойствами симметрии. Это тождество приобретает вид закона сохранения только после дополнительного предположения о том, что выполняются уравнения Эйлера-Лагранжа вариационного принципа Гамильтона.

Своеобразие рассматриваемой нами проблемы состоит в том, что уравнения Эйлера-Лагранжа имеют место только для полной функции L, тогда как специфические свойства симметрии присущи каждому из выражений dI_1, dI_2, dI_{int}. Поэтому мы выразим сначала вариации отдельных величин dI_ν ($\nu = 1, 2, 3$, где $dI_3 \equiv dI_{\text{int}}$) через „лагранжевы производные" $[L_\nu]_a$ соответствующей функции $L_\nu (L_3 \equiv L_{\text{int}} = -U)$,

$$[L_\nu]_a \equiv \frac{\partial L_\nu}{\partial \boldsymbol{x}_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\nu}{\partial \boldsymbol{v}_a} \qquad (\nu = 1, 2, 3;\ a = 1, 2), \tag{36}$$

после чего в результате сложения окажется возможным использование уравнений движения (5).

Следуя методу, изложенному в [21], вариацию каждого из дифференциалов dI_ν можно записать в виде (ср. формулу (17) указанной работы):

$$\delta_i dI_\nu = \frac{d}{dt}\left\{L_\nu \delta_i t_\nu + \sum_a \left(\frac{\partial L_\nu}{\partial \boldsymbol{v}_a}\cdot \delta_{i*}\boldsymbol{x}_a\right)\right\} + \sum_a \left([L_\nu]_a \cdot \delta_{i*}\boldsymbol{x}_a\right); \tag{37}$$

здесь $\delta_i t_\nu$ — вариация времени, соответствующая мировой линии одной из частиц ($\nu = 1, 2$) или „среднего наблюдателя" ($\nu = 3$, ср. п. 2):

$$\delta_i t_a = -\frac{V}{c^2}x_{ai} \quad (a = 1, 2); \qquad \delta_i t_3 = -\frac{V}{2c^2}(x_{1i} + x_{2i}), \tag{38}$$

а

$$\delta_* \boldsymbol{x}_a \equiv \boldsymbol{x}'_a(t) - \boldsymbol{x}_a(t) \tag{39}$$

— вариация „формы" функции $\boldsymbol{x}_a(t)$. Последняя определяется согласно (18) и первой из формул (9), следующими соотношениями:

$$\delta_{i*}x_{aj} = -\delta_{ij}Vt + \frac{V}{c^2}x_{ai}v_{aj}. \tag{40}$$

Подставляя выражения (38) и (40) в формулу (37), суммируя по ν, используя определение полного импульса $\boldsymbol{P}$ системы, и уравнение движения (5), найдем

$$\delta_i dI = V\frac{d}{dt}\left\{-P_i t + \sum_a \left[m_a\gamma_a + \frac{U}{2c^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_a}\cdot \boldsymbol{v}_a\right)\right]x_{ai}\right\}. \tag{41}$$

Таким образом, условия $\delta_i dI = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ приводят к закону сохранения

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = 0; \qquad \boldsymbol{K} = \text{const}, \tag{42}$$

где

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{P}t + \sum_a \left[m_a \gamma_a + \frac{U}{2c^2} - \frac{1}{c^2}\left(\boldsymbol{v}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_a}\right)\right] \boldsymbol{x}_a. \tag{43}$$

Если ввести обозначение

$$\boldsymbol{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_a \left\{ m_a \gamma_a + \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2} U - \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}_a} \cdot \boldsymbol{v}_a\right)\right]\right\} \boldsymbol{x}_a, \tag{44}$$

где $M \equiv E/c^2$ — полная масса системы, то равенство (43) принимает вид:

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{P}t + M\boldsymbol{R} = \text{const}. \tag{45}$$

Учитывая постоянство величин $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{M}$, получаем из (45) уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{\boldsymbol{P}}{M} = \text{const}, \tag{46}$$

позволяющее интерпретировать вектор $\boldsymbol{R}$ как радиус-вектор центра инерции релятивистской системы двух взаимодействующих частиц. Формулы (43)–(44) являются релятивистскими обобщениями известных выражений для соответствующих квазирелятивистских величин [29, 22, 27, 5], получающихся из (43)–(44) заменой U на $U^{(0)}(r)$.

6. Пример релятивистского взаимодействия

Рассмотрим уравнение (24) в специальной системе отсчета S^*, в которой скорости частиц равны по величине и противоположны по направлению: $\boldsymbol{v}_1^* = -\boldsymbol{v}_2^* \equiv \boldsymbol{v}^*$. Предполагая, кроме того, что взаимодействующие частицы тождественны, можем положить: $\dot{\boldsymbol{v}}_1^* = -\dot{\boldsymbol{v}}_2^* \equiv \dot{\boldsymbol{v}}^*$. Тогда частным решением уравнения (24) будет произвольная функция от $\boldsymbol{r}^*$ и относительной скорости $\boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^* = 2\boldsymbol{v}^* = \dot{\boldsymbol{r}}$:

$$U^* = U^*(\boldsymbol{r}^*, \boldsymbol{v}_1^* - \boldsymbol{v}_2^*) = U^*(\boldsymbol{r}^*, \dot{\boldsymbol{r}}^*). \tag{47}$$

Из равенства (32) видно, что система S^* совпадает с системой отсчета центра инерции ($\boldsymbol{P}^* = 0$).

Для того, чтобы получить соответствующий лагранжиан взаимодействия в произвольной системе отсчета S, достаточно выполнить преобразование аргументов функции (47), отвечающее переходу $S^* \xrightarrow{V} S$. Такое преобразование легко осуществить в явном виде в случае $V \to 0$ с помощью формул (20), (22). Уже из этих инфинитезимальных соотношений можно сделать вывод, что в системе отсчета S скорости частиц будут входить в функцию U не только в комбинации $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$.

Интегралы движения (33), (34) и (43), соответствующие выражению (47), имеют вид:

$$E^* = 2mc^2\gamma^* + U^* - 2\left(\frac{\partial U^*}{\partial \boldsymbol{v}^*} \cdot \boldsymbol{v}^*\right),$$

$$\boldsymbol{J}^* = m\gamma^*[\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{v}^*] - \left[\boldsymbol{r}^* \times \frac{\partial U^*}{\partial \boldsymbol{v}^*}\right],$$

$$\boldsymbol{K}^* = \left\{m\gamma^* + \frac{1}{c^2}\left[\frac{1}{2}U^* - \left(\boldsymbol{v}^* \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{v}^*}\right)\right]\right\}(\boldsymbol{x}_1^* + \boldsymbol{x}_2^*).$$

В последних формулах m — масса каждой из частиц, $\gamma^* = (1 - v^{*2}/c^2)^{-1/2}$. Для радиуса-вектора центра инерции находим: $\boldsymbol{R}^* = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1^* + \boldsymbol{x}_2^*)$.

7. *Обсуждение результатов*

Основным результатом настоящей работы мы считаем установление того факта, что в проблеме двух тел обычный трехмерный лагранжевый формализм классической механики, опирающийся на концепцию мгновенного дальнодействия, совместим с принципом относительности Эйнштейна. Тот факт, что основные положения специальной теории относительности не противоречат концепции мгновенного дальнодействия, был установлен в работах [13, 14] в рамках исследования релятивистских уравнений движений типа уравнений Ньютона. Однако переход от „ньютоновского" формализма к лагранжевому оказался при таком подходе затруднительным. С точки зрения полученных нами результатов последнее обстоятельство можно объяснить следующим образом. Если преобразование, соответствующее переходу $S \to S'$, осуществлять в уравнениях движения, то, как нетрудно убедиться (см. Дополнение), вид условия инвариантности этих уравнений не зависит от способа перехода от старой одновременности t к новой t': под t' можно, например, понимать либо результат лоренцового преобразования времени одной из частиц ($t' = t'_a$, см. [14]) либо использованное нами время t' „среднего наблюдателя". В противоположность этому результат преобразования интеграла действия, а тем самым и вид условия лоренц-инвариантности лагранжиана взаимодействия $L_{\text{int}} = -U$, существенным способом изменится, если вместо нашего способа перехода $t \to t'$ воспользоваться определением $t' \equiv t_a$. Такое условие, как можно убедиться, было бы несимметричным по отношению к взаимодействующим частицам, а в приближении c^{-2} противоречило бы известным результатам квазирелятивистской механики, рассмотренным в п. 4. Отсюда следует вывод, что возможность трехмерной лагранжевой формулировки релятивистской проблемы двух тел существенным образом связана с предложенным нами методом преобразования одновременности. Тот факт, что в уравнениях движения, в отличие от интеграла действия, имеется произвол в выборе правила преобразования $t \to t'$, следует считать естественным, ибо в уравнениях Лагранжа невозможно отделить величины v_a, соответствующие свободночастичным членам I_a, от тех, которые отвечают интегралу взаимодействия I_{int} (напомним, что в каждом из трех членов I_ν преобразование $t \to t'$ происходит по иному). Если бы указанный произвол отсутствовал, то вопрос о трансформационных свойствах уравнений движения был бы весьма неясным.

Построенная нами теория позволяет утверждать, что по крайней мере для системы двух взаимодействующих частиц релятивистские уравнения движения можно записать в произвольной инерциальной системе отсчета в виде лагранжевых дифференциальных уравнений второго порядка, в которых независимой переменной является обычное координатное время. Таким образом, эволюция системы во времени однозначно определяется в фиксированной системе отсчета совокупностью начальных данных: положениями и скоростями частиц в начальный момент времени t_0. Отличие от ньютоновской механики состоит, во-первых, в иной форме уравнений движения (другими словами, в более общем виде функциональной зависимости лагранжиана от положений и скоростей частиц), и во-вторых, в относительности одновременности (в частности, относительности начального момента времени t_0, определяющего выбор начальных данных).

Возникает естественный вопрос: не противоречит ли такой способ описания релятивистского движения взаимодействующих частиц факту конечности скорости распространения взаимодействий, лежащему в основе теории относительности? Нам представляется, что именно введение понятия „среднего наблюдателя" (п. 2), до которого сигналы от одновременных положений обеих частиц приходят с одинаковым запаздыванием, позволяет косвенно отразить полевую природу взаимодействия, не смотря на то, что математический формализм теории такой же, как и в ньютоновской механике с ее представлениями о бесконечной скорости распространения взаимодействий. Определение с помощью указанного наблюдателя аналитической связи между переменными t и t', характеризующими одновременность в двух системах отсчета, дает возможность сформулировать уравнение (24), выражающее условие согласованности рассмотренного в работе лагранжевого метода с принципом относительности Эйнштейна. Отметим, что совместимость концепции мгновенного дальнодействия с полевыми представлениями подтверждается также результатами работы [15], согласно которой практически совпадают решения уравнений движения задачи двух тел в двух случаях: в одном первая частица движется в запаздывающем электромагнитном поле второй, а вторая — в опережающем поле первой; во втором случае запаздывающее и опережающее поля меняются местами.

Существует еще другой аспект соотношения между механикой и теорией поля: движение частиц может сопровождаться (что особенно важно в случае движений с релятивистскими скоростями) излучением и поглощением волн (квантов) поля, являющегося носителем взаимодействия между частицами. Если воспользоваться терминологией, принятой в квантовой теории поля, то можем сказать, что существуют поля двух типов: виртуальное поле, роль которого ограничивается к созданию сил взаимодействия между частицами, и реальное поле, проявляющееся в виде самостоятельных физических объектов (волн или квантов излучения). Математический формализм релятивистской динамики системы взаимодействующих частиц призван полностью отобразить в терминах механики виртуальные поля. Вместе с тем он, конечно, не может заменить теоретико-полевых представлений, если последние описывают реальные физические поля. Поэтому полное описание физических систем и явлений, в которых существенную роль играют реальные поля, возможно только в рамках теорий, включающих в качестве своей составной части теорию поля. Можно, однако, ожидать, что даже для процессов этого рода, требующих использования в явном виде полевых величин и уравнений, чисто механический подход к описанию взаимодействий между частицами окажется более простым по сравнению с полевым.

Отметим еще два результаты настоящей работы. Первый — это установление того факта, что лагранжиан системы двух взаимодействующих частиц может обладать точной (а не „с точностью до производной" по времени от некоторой функции) форм-инвариантностью относительно чистых преобразований Лоренца. Тем самым устранено, в частности, несоответствие между тем, что в известных вариантах квазирелятивистских теорий (см., например [22–23]) лагранжианы обладают точной форм-инвариантностью относительно трехмерных поворотов и инвариантностью только „с точностью до производной" относительно пространственно-временных поворотов. Нам удалось достичь это благодаря более совершенному способу перехода от „старой" и „новой" одновременности по сравнению с методами, использованными в [22, 23]. Следует в этой связи указать и на определенную непоследовательность в доказательстве инвариантности квазирелятивистских уравнений движения относительно приближенных преобразований Лоренца в упомянутых работах. Она состоит в том, что функция F, временная производная которой является разностью между первоначальным и преобразованным лагранжианом, оказывается зависящей от скоростей частиц, тогда как по известной теореме аналитической механики, F должна быть функцией только от координат и, возможно, времени.

Второй момент, заслуживающий, на наш взгляд, внимания — это вывод интеграла движения центра инерции (формула (43)) из условия лоренц-инвариантности теории и установление выражения (44) для координат центра инерции. Поскольку этот точный результат тривиальным образом переносится и на квазирелятивистское приближение, то тем самым обнаруживается несостоятельность утверждения работы [27] о невозможности получения рассматриваемого закона сохранения из требования лоренц-инвариантности.

Отметим, наконец, некоторые открытые проблемы, возникшие в связи с настоящей работой. Прежде всего представляет интерес переход от лагранжевого формализма к гамильтоновому и изучение в связи с таким переходом вопроса об отношении предложенной теории к упомянутой в п. 1. „теореме о не взаимодействии". Важной задачей является также исследование возможности построения аналогичной динамики для системы трех тел, учитывая то, что в этом случае также можно ввести понятие „среднего наблюдателя", равноудаленного от всех трех частиц.

В заключение автор выражает благодарность участникам семинаров отдела теоретической физики Ягеллонского университета (Краков) и кафедры теоретической физики Львовского университета за интерес к работе. Он признателен доц. др. А. Старушкевичу за полезные дискуссии, и проф. др. Е. Райскому за гостеприимство и благоприятные условия для работы в Институте физики Ягеллонского университета.

ДОПОЛНЕНИЕ

Сравним использованный нами способ перехода к новой одновременности в релятивистской проблеме двух тел с методом Кюри-Хилла [13, 14]. Ограничиваясь для простоты одномерной моделью, запишем релятивистские уравнения движения, исследуемые в [14], в следующем виде:

$$\psi_a \equiv \dot{v}_a(t) - f_a(r(t), v_1(t), v_2(t)) = 0 \qquad (r = r_1 - r_2). \tag{Д1}$$

Условие их инвариантности при переходе $S \to S'$ состоит в том, что в преобразованных уравнениях движения ускорения выражаются через новые переменные той же функцией f_a, что и в (Д1):

$$\psi'_a \equiv \dot{v}'_a(t') - f_a(r'(t'), v'_1(t'), v'_2(t')) = 0. \tag{Д2}$$

Это условие можно представить в виде:

$$\delta\psi_a \equiv \delta\dot{v}_a - \frac{\partial f_a}{\partial r}\,\delta r - \frac{\partial f_a}{\partial v_1}\,\delta v_1 - \frac{\partial f_a}{\partial v_2}\,\delta v_2 = 0. \tag{Д3}$$

Выражения для фигурирующих в (Д3) вариаций зависит от способа перехода к новой одновременности. Если, следуя [14], принять, по определению, что $t' \equiv \equiv t'_1 = t - (V/c^2)\,x_1$, то $t'_2 = t' + (V/c^2)r$ и для вариаций переменных получим:

$$\delta r = \frac{V}{c^2}\,rv_2; \qquad \delta v_1 = -V\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right); \qquad \delta v_2 = -V\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right) - \frac{V}{c^2}\,rf_2;$$

$$\delta\dot{v}_1 = 3\,\frac{V}{c^2}\,v_1 f_1; \qquad \delta\dot{v}_2 = \frac{V}{c^2}\,(3v_2 f_2 - r\dot{f}_2) =$$

$$= \frac{V}{c^2}\left\{3v_2 f_2 - r(v_1 - v_2)\,\frac{\partial f_2}{\partial r} - rf_1\,\frac{\partial f_2}{\partial v_1} - rf_2\,\frac{\partial f_2}{\partial v_2}\right\}.$$

Тогда равенство (Д3) дает условия Хилла [14]:

$$\left(1 - \frac{v_a^2}{c^2}\right)\frac{\partial f_a}{\partial v_a} + \left(1 - \frac{v_b^2}{c^2}\right)\frac{\partial f_a}{\partial v_b} + \frac{3}{c^2}\,v_a f_a -$$

$$- \frac{1}{c^2}\,rv_b\,\frac{\partial f_a}{\partial r} - (-1)^a\,\frac{r}{c^2}\,f_b\,\frac{\partial f_a}{\partial v_b} = 0 \qquad (a, b = 1, 2;\ a \neq b). \tag{Д4}$$

Поскольку уравнения (Д4) симметричны относительно перестановки частиц $1 \leftrightarrow 2$, то ясно, что они сохранят свой вид, если положить $t' = t'_2$.

Используя, с другой стороны, определение (16) новой одновременности и подставляя в (Д3) соответствующие ему выражения

$$\delta r = \frac{V}{2c^2} r(v_1+v_2); \qquad \delta v_a = -V\left(1-\frac{v_a^2}{c^2}\right)-(-1)^a \frac{V}{2c^2} r f_a$$

$$\delta \dot{v}_a = \frac{V}{c^2}\left\{3v_a\dot{v}_a-(-1)^a \frac{r}{2}\dot{f}_a\right\} = \frac{V}{c^2}\left\{3v_a f_a - \right.$$

$$\left. -(-1)^a r\left[\frac{1}{2}(v_1-v_2)\frac{\partial f_a}{\partial r}+\frac{1}{2}f_a\frac{\partial f_a}{\partial v_a}+f_b\frac{\partial f_a}{\partial v_a}\right]\right\} \quad (b \neq a),$$

легко убедиться, что и в этом случае мы получим равенство (Д4).

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Tetrode, *Z. Phys.* **10**, 317 (1922).
[2] A. D. Fokker, *Z. Phys.* **58**, 386 (1929).
[3] J. A. Wheeler, R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 425 (1949).
[4] A. Katz, *J. Math. Phys.* **10**, 1929 (1969).
[5] H. W. Woodcock, P. Havas, *Phys. Rev.* **D6**, 3422 (1972).
[6] Р. П. Гайда, Ю. Б. Ключковский, *Тезисы докладов всесоюзного симпозиума „Новейшие проблемы гравитации“*, Москва 1973, стр. 71; Препринт ИТФ-73-154Р, Киев 1973.
[7] H. Van Dam, E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **138**, 1576 (1965); **142**, 838 (1966).
[8] J. L. Synge, *Proc. Roy. Soc.* **177A**, 118 (1941).
[9] R. D. Driver, *Phys. Rev.* **178**, 2051 (1969).
[10] В. И. Жданов, К. А. Пирагас, *Acta Phys. Pol.* **B3**, 585 (1972); **B3**, 599 (1972).
[11] A. Staruszkiewicz, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **14**, 69 (1971).
[12] D. G. Currie, T. F. Jordan, E. C. G. Sudarshan, *Rev. Mod. Phys.* **35**, 350 (1963).
[13] D. G. Currie, *Phys. Rev.* **142**, 817 (1966).
[14] R. N. Hill, *J. Math. Phys.* **8**, 201 (1967).
[15] A. Staruszkiewicz, *Ann. Phys.* (Leipzig), **25**, 362 (1970).
[16] C. Fronsdal, *Phys. Rev.* **D4**, 1689 (1971).
[17] Р. П. Гайда, *Приближенная лоренц-инвариантность в классической механике системы частиц*, II. Препринт ИТФ-72-100Р, Киев 1972.
[18] Р. П. Гайда, *Вісник Львівського ун-ту*, сер. фіз., вип. 8, 7 (1973).
[19] Б. В. Медведев, *О следствиях из инвариантности относительно преобразований Галилея*, в кн. *Статистическая физика и квантовая теория поля*, Наука, Москва 1973, стр. 440.
[20] Р. П. Гайда, *Приближенная лоренц-инвариантность и квазирелятивистские гамильтонианы*. 1. *Классическая механика*, *Укр. физ. ж.* **19**, 1518 (1974).
[21] E. H. Hill, *Rev. Mod. Phys.* **23**, 253 (1951).
[22] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Физматгиз, Москва 1961.
[23] S. Chandrasekhar, G. Contopoulos, *Proc. Roy. Soc.* **A298**, 123 (1967).
[24] D. G. Currie, *J. Math. Phys.* **4**, 1470 (1963).
[25] Р. П. Гайда, *Вісник Львівського ун-ту*, сер. фіз., вип. 8, 3 (1973).
[26] A. Trautman, *Conservation laws in general relativity*, in *Gravitation*, ed. by L. Witten, J. Wiley, New York 1962, p. 169.
[27] P. Havas, J. Stachel, *Phys. Rev.* **185**, 1636 (1969).
[28] E. Noether, *Nachr. Akad. Wiss.* (Göttingen), Math.-Physik, Kl. 235 (1918).
[29] И. Г. Фихтенгольц, *ЖЭТФ*, **20**, 233 (1950).