

О ВОЗМОЖНОСТИ ЕДИНОГО ОПИСАНИЯ УРОВНЕЙ ЯДЕР И ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО РАССЕЯНИЮ АЛЬФА-ЧАСТИЦ И ЭЛЕКТРОНОВ

On the Possibility of the Unified Description of Nuclear Levels and Experiments on the
Alpha-Particle and Electron Scattering

Г. Н. Афанасьев, С. М. Елисеев

Объединённый институт ядерных исследований, Лаборатория теоретической физики, Дубна*

(Поступила в редакцию 7 августа 1973 г.)

The possibility of describing of nuclear levels, alpha-particle and electron scattering experiments within the framework of a unique model is investigated. The nuclear density was generated by single particle potential for electron scattering. For the scattering of alpha-particle on nuclei, the elementary amplitude of alpha-nucleon scattering was used.

1

Цель данной работы состоит в том, чтобы единым образом описать, по крайней мере, качественно три типа экспериментов ядерной физики: уровни ядер, упругое рассеяние электронов и α -частиц. До настоящего времени эти эксперименты описывались следующим образом. Одночастичные уровни ядра определяются как собственные частоты одночастичного гамильтониана с некоторым внешним средним полем. При описании рассеяния электронов зарядовая плотность ядра параметризуется в том или ином виде, а параметры определяются из условия наилучшего совпадения с экспериментальными формфакторами. Наконец, рассеяние α -частиц описывается либо в рамках оптической модели, либо в рамках параметризованного фазового анализа.

2

Мы стартуем с некоторого сферического среднего поля (явный вид мы укажем позднее). Одночастичные волновые функции $\psi_\alpha^{(p)}$, $\psi_\alpha^{(n)}$ определяют протонную $\rho_p(t)$ и нейтронную компоненты плотности $\rho_n(t)$

$$\rho_p(t) = \sum_{\alpha} |\Psi_{\alpha}^{(p)}|^2,$$

$$\rho_n(t) = \sum_{\alpha} |\Psi_{\alpha}^{(n)}|^2.$$

* Address: Joint Institute for Nuclear Research, Head Post Office, P. O. Box 79, Moscow, USSR.

Тогда в борновском приближении формфактор, описывающий рассеяние электронов на ядре равен

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int \varrho_p(z) \sin(qz) dz.$$

Имея $\varrho_p(z)$ и $\varrho_n(z)$ и зная амплитуды рассеяния α -частиц на протонах и нейтронах ядра можно, пользуясь теорией Глаубера [1, 2], вычислить дифференциальное сечение упругого рассеяния α -частиц на заданном ядре. Условия применения теории Глаубера определяются неравенствами [2]

$$V/E \ll 1, \quad \kappa d \gg 1.$$

где d — размер области взаимодействия, V — потенциал, E — энергия. При упругом рассеянии ионов, когда происходит взаимодействие только на периферии сталкивающихся ядер, эти условия выполняются. Например, при рассеянии α -частиц с энергией 40 Мэв на ядре Pb^{208} $\kappa d \sim 20$.

Имеем для амплитуды рассеяния α -частицы на ядре:

$$F(\theta) = F_c(\theta) + \frac{1}{2ik} \sum (2l+1) \exp(2i\delta_l^c) (S_l - 1) P_l(\cos \theta).$$

Здесь $F_c(\theta)$, δ_l^c — кулоновские амплитуды и фаза, κ — импульс α -частицы в с.ц.м. Парциальная S -матрица равна [2]

$$S_l = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma_p (1 - i\beta_p) T_p(b) - \frac{1}{2} \sigma_n (1 - i\beta_n) T_n(b) \right\}$$

где σ_p , σ_n — полные сечения рассеяния α -частиц на протонах и нейтронах мишени; β_p , β_n — отношения реальных и мнимых частей амплитуды рассеяния α -частицы под нулевым углом на протонах и нейтронах ядра,

$$T_p(b) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_p(\sqrt{z^2 + b^2}) dz,$$

$$T_n(b) = \int_{-\infty}^{\infty} \varrho_n(\sqrt{z^2 + b^2}) dz,$$

b — прицельный параметр; квазиклассически он следующим образом связан с орбитальным моментом l и параметром Зоммерфельда η

$$\kappa b(\kappa b - 2\eta) = l(l+1).$$

Таким образом, при таком подходе одночастичная плотность и параметры элементарной амплитуды определяют элементы S -матрицы и дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F|^2.$$

3

В данной работе мы использовали в качестве среднего поля три потенциала:

1. потенциал сферического осциллятора с параметром длины $1.24 \cdot A^{1/3}$.
2. потенциал Вудса-Саксона с параметрами, определенными в [3];
3. потенциал прямоугольной ямы, полученный из предыдущего стремлением параметра диффузности к нулю. Поскольку работа носит на данном этапе качественный характер, мы ограничивались при описании рассеяния электронов борновским приближением и пренебрегали структурой протонов; при описании рассеяния α -частиц не учитывали структуры α -частиц. Использовались параметры σ и β элементарной амплитуды, усредненные по протонам и нейтронам ядра. Сечение σ принималось равным суммарной геометрической площади α -частицы и нуклона $\sigma \approx \approx 2b \cdot 3\Phi^2$ а $\beta \approx 4.5$. Никакой подгонки параметров σ и β пока не производилось. Все проводимые ниже результаты относятся к Pb^{208} .

4

На рис. 1—3 представлены плотности для осцилляторного потенциала, потенциала Вудса-Саксона и прямоугольной ямы. Кривые 1 и 2 соответствуют протонной и нейтронной компоненты плотности. На рис. 4 представлены результаты расчетов электронных формфакторов для одночастичного потенциала Вудса-Саксона. На рис. 5 изображены аналогичные расчеты для прямоугольной (кривая 1)

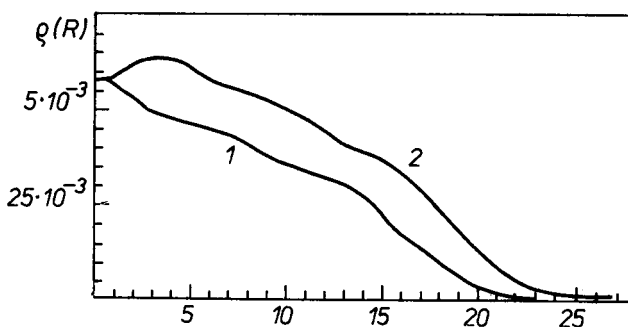


Рис. 1. Протонная (кривая 1) и нейтронная (кривая 2) компоненты плотности в осцилляторной яме для Pb^{208}

и осцилляторной (кривая 2) ям. На рис. 6 сплошной и пунктирной линиями изображены зависимости вещественной и мнимой частей S -матрицы от углового момента l для потенциала Вудса-Саксона, а на рис. 7—8 для потенциалов осциллятора и прямоугольной ямы. Заметим, что в отличие от широко используемых при обработке эксперимента параметризаций (см. например, [4]) мнимая и вещественная части S -матрицы испытывают несколько характерных осцилляций при малых l . Однако, неясно, имеют ли эти осцилляции физический смысл, или являются следствием сделанных приближений. Наконец, на рис. 9—11 изображены дифференциальные

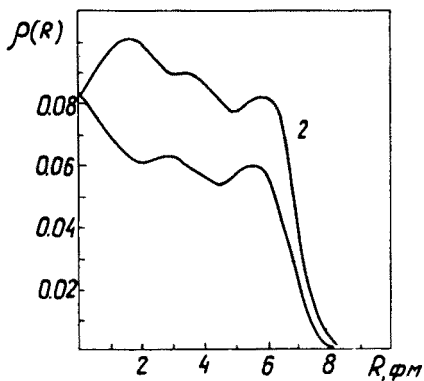


Рис. 2

Рис. 2. Протонная (нижняя кривая) и нейтронная (верхняя) компоненты плотности в яме Вудса-Саксона для Pb^{208} . Параметры ямы определены в тексте

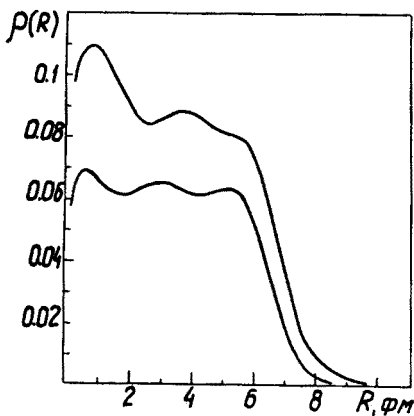


Рис. 3

Рис. 3. Протонная (кривая 1) и нейтронная (кривая 2) компоненты плотности в прямоугольной яме для Pb^{208} . Параметры ямы даны в тексте

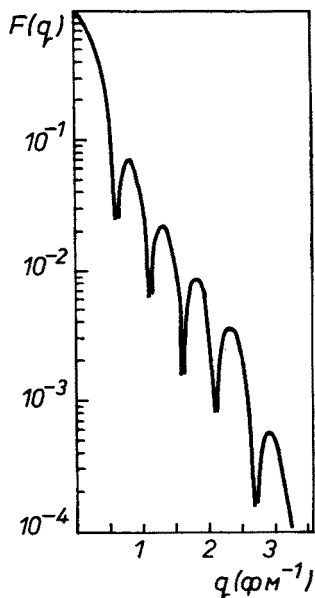


Рис. 4

Рис. 4. Формфактор упругого рассеяния электронов на Pb^{208} . Одночастичные волновые функции Вудс-Саксоновские

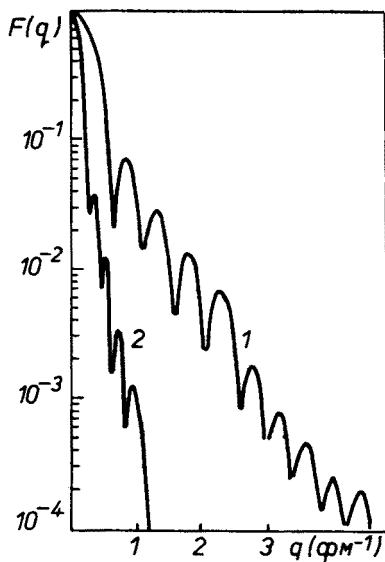


Рис. 5

Рис. 5. Формфакторы упругого рассеяния электронов на Pb^{208} . Одночастичные волновые функции генерируются прямоугольной ямой (кривая 1) и осцилляторной (кривая 2)

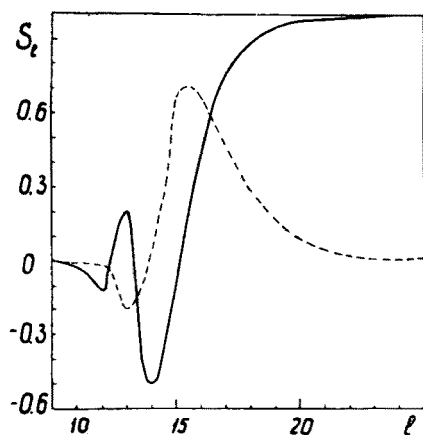


Рис. 6

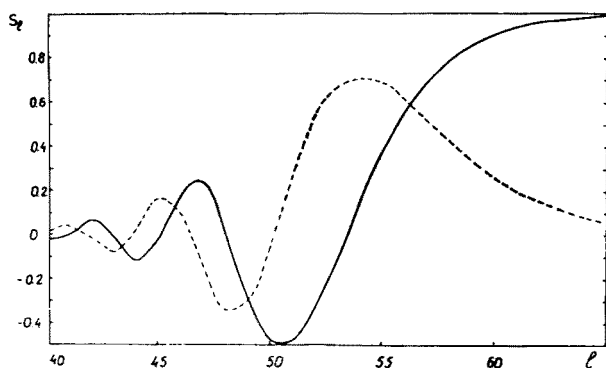


Рис. 7

Рис. 6. Вещественная (сплошная кривая) и мнимая (пунктирная) части S -матрицы как функция углового момента l . Одночастичный потенциал — Вудс-Саксоновский

Рис. 7. Вещественная (сплошная кривая) и мнимая (пунктирная) части S -матрицы для осцилляторной ямы

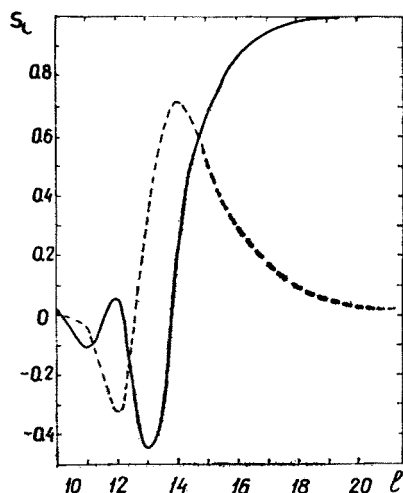


Рис. 8

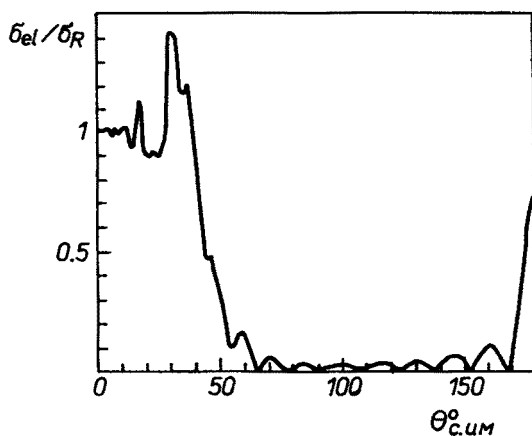


Рис. 9

Рис. 8. Вещественная (сплошная кривая) и мнимая (пунктирная) части S -матрицы для прямоугольной ямы

Рис. 9. Дифференциальное сечение упругого рассеяния 40 МэВ на Pb^{208} . Одночастичные волновые функции альфа частиц Вудс-Саксоновские

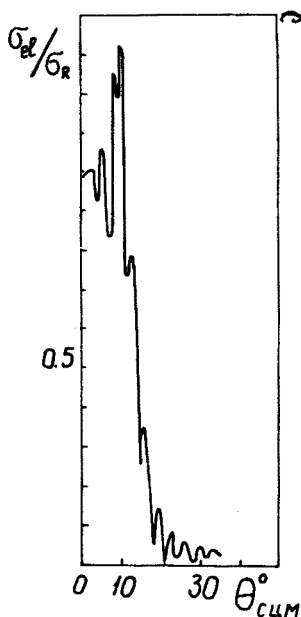


Рис. 10. Дифференциальное сечение упругого рассеяния 40 Мэв альфа частиц на Pb^{208} . Одно-частичные волновые функции — осцилляторные

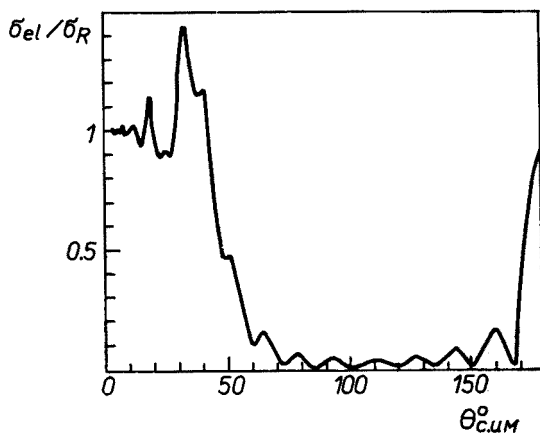


Рис. 11. Дифференциальное сечение упругого рассеяния 40 Мэв альфа-частиц на Pb^{208} . Одно-частичные волновые функции генерируются прямоугольной ямой

сечения упругого рассеяния частиц с энергией 40 Мэв на ядре Pb^{208} для потенциала Вудса-Саксона (рис. 9), осциллятора (рис. 10) и прямоугольной ямы (рис. 11). Для потенциала Вудса-Саксона и прямоугольной ямы замечен рост дифференциального сечения для больших углов. Для осцилляторной ямы при выбранных выше σ , β такого роста нет.

Из-за упомянутых приближений и отсутствия подгонки σ , β мы не сравниваем в данной работе наши расчеты с данными эксперимента. Тем не менее, теоретические дифференциальные сечения для прямоугольной ямы и потенциала Вудса-Саксона (но не для осциллятора) правильно воспроизводят особенности хода экспериментального дифференциального сечения [4].

5

Для обработки экспериментальных данных по рассеянию электронов широко используются феноменологические зарядовые распределения:

$$\varrho_1(z) \approx \left[\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{z - z_0}{z_1}\right)} \right]^m \quad (5.1)$$

или же [5]

$$\varrho_2(z) \approx \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{z}{b} + \operatorname{ch} \frac{R}{b}} \right]^n \quad (5.2)$$

(обычно выбирают $m = n = 1$).

Во многих модельных расчетах фактически предполагается, что одночастичная зарядовая плотность не слишком сильно отличается от (5.1) и (5.2), т.е. допускают, что нуклон-нуклонные корреляции невелики. Если это так, то интересным является такой вопрос: какому одночастичному потенциалу отвечают распределения (5.1) и (5.2)? На такой вопрос проще всего ответить для α -частицы, радиальная часть одночастичной волновой функции для которой пропорциональна корню квадратному из (5.1) ил (5.2). Подставляя в уравнение Шредингера и определяя собственное значение из условия обращения в нуль потенциала на бесконечно большом расстоянии, находим следующие выражения для одночастичных потенциалов, которые отвечают распределениям (5.1) и (5.2):

$$V_1(z) = -\frac{2m}{\hbar^2 z_1} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{z - z_0}{z_1}\right)} - m \frac{m + (2m + 1) \exp\left(\frac{z - z_0}{z_1}\right)}{\left[1 + \exp\left(\frac{z - z_0}{z_1}\right)\right]^2},$$

$$V_2(z) = -\frac{2n}{\hbar^2 b} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{z}{b}}{\operatorname{ch} \frac{z}{b} + \operatorname{ch} \frac{R}{b}} - n \frac{n \left(1 + \operatorname{ch}^2 \frac{R}{b}\right) + \operatorname{ch} \frac{z}{b} \operatorname{ch} \frac{R}{b} (2n + 1)}{\left(\operatorname{ch} \frac{R}{b} + \operatorname{ch} \frac{z}{b}\right)^2}.$$

Мы видим, что одночастичный потенциал состоит из короткодействующей части, убывающей экспоненциально и длиннодействующей части, которая на больших

расстояниях ведет себя как $1/2$. К сожалению, знак длиннодействующей части оказывается неправильным, т.е. вместо кулоновского отталкивания получаем притяжение. Таким образом, несмотря на то, что распределения (5.1) и (5.2) неплохо описывает эксперименты по рассеянию электронов, налицо неувязка (если верно предположение о близости распределений (5.1), (5.2) к одночастичным) между одночастичным потенциалом и соответствующей ему одночастичной плотностью. Легко видеть, что правильную асимптотику одночастичного потенциала, получаемого при подстановке в уравнение Шредингера пробной волновой функции, дают те волновые функции, асимптотика которых имеет вид

$$\approx \frac{e^{-\kappa z}}{z^{1+\chi/\kappa}}$$

где

$$\chi = \frac{2mZe^2}{\hbar^2}, \quad \kappa^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2}.$$

6

Обычно нуклоны помещаются в феноменологическое среднее поле $V(z)$, в котором вычисляются одночастичные волновые функции ядра:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dF}{dz} - \frac{l(l+1)}{z^2} F \right) + V(z)F = -|E|F.$$

Между тем ясно, что самым своим существованием это среднее поле обязано нуклонам, точнее, взаимодействию нуклонов друг с другом. Такое взаимодействие должно быть нелинейным. Простейшую нелинейность можно получить, если учесть, что в феноменологических моделях наблюдается примерная пропорциональность между потенциалом и одночастичной плотностью:

$$V(z) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Lambda^2 \varrho(z).$$

Опять таки: ограничиваясь случаем α -частицы получаем следующее нелинейное уравнение

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{dF}{dz} + \Lambda^2 F^3 - \kappa^2 F = 0.$$

Это уравнение напоминает уравнение, ранее изучавшееся в нелинейной теории элементарных частиц [6, 7]. Обычный метод состоит в том, что отбрасывают в этом уравнении член с первой производной, но учитывают привносимое им граничное условие:

$$\left. \frac{dF}{dz} \right|_{z=0} = 0.$$

Это аргументируется следующим образом [8]. Во внутренней области тяжелого ядра производными от $F(z)$ можно пренебречь. Вблизи поверхности член $(2/z) dF/dz$ мал по сравнению со второй производной, так как протяженность поверхностной области ядра мала по сравнению с радиусом ядра. (См. формулы (2.16) и (2.17) в работе [8].) В этом случае получаем для собственного значения и волновой функции следующее выражение

$$|E| = \frac{2}{9} \cdot \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{\pi^4}{A^4},$$

$$F(z) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\pi^2}{A^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{2}{3} \frac{\pi^2}{A^2} z\right)}.$$

Такая зависимость качественно правильно воспроизводит экспоненциальное убывание волновой функции α -частицы. Применение этого метода к более тяжелым ядрам наталкивается на трудности, связанные с тем, что вместо одного нелинейного уравнения приходится решать систему нелинейных уравнений второго порядка.

Авторы благодарны проф. В. Г. Соловьеву за постоянный интерес к работе. Авторы признательны Ф. А. Гарееву за предоставление программы вычисления вудс-саксоновских волновых функций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. J. Glauber, *High Energy Collision Theory*, Lectures in Theoretical Physics I, Intersc. Publ., 1969.
- [2] A. Dar, Z. Kirzon, *Phys. Lett.*, **37B**, 166 (1970).
- [3] В. Г. Соловьев, *Теория сложных ядер*, Наука, Москва 1971.
- [4] В. Ю. Гончар, К. С. Желтоног, *ЯФ*, **13**, вып. 1, 1971.
- [5] Ю. Н. Елдышев, В. К. Лукьянов, Ю. С. Поля, *Препринт ОИЯИ*, Р4-6310, 1972.
- [6] R. Finkelstein, R. Le Levier, M. Ruderman, *Phys. Rev.*, **83**, 326 (1951).
- [7] R. Finkelstein, K. Fronsda, P. Kaus, *Phys. Rev.*, **103**, 1571 (1956).
- [8] В. Malenka, *Phys. Rev.*, **86**, 68 (1952).