Vol. B7 (1976) ACTA PHYSICA POLONICA No 10

ЛАГРАНЖИАНЫ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ПО КРИВИЗНЕ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

QUADRATIC LAGRANGIANS IN THE THEORY OF GRAVITATION

В. М. Николаенко

Государственный комитет стандартов Совета Министров СССР, Москва*

(*Поступила в редакцию 6 января 1976 г.*)

A set of exact solutions of the gravitational field equations is investigated. The field equations are obtained by means of the Palatini method from a Lagrangian which, apart from the usual terms $\mathscr{L}_E = (1/2)\sqrt{-g}R$, contains all possible quadratic terms. The vacuum equations as well as those corresponding to null fluid and continuous medium are considered. The method of holonomy groups and the corresponding classification of pseudoriemannian four-dimensional spaces are used.

1. *Введение*

Данная работа посвящена изучению уравнений гравитационного поля, которые следуют из линейного лагранжиана теории Эйнштейна $\mathscr{L}_E = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,R$ с учетом квадратичных по кривизне добавок. К настоящему моменту необходимость учета в лагранжиане квадратичных по кривизне добавок[1] вызывается рядом соображений.

1. Еще Г. Вейль отмечал, что использование квадратичных лагранжианов необходимо при попытках создания единой теории поля [1].

2. Исследуя аналогию между электродинамикой и теорией гравитационного поля, Ланцош приходит к выводу о необходимости рассмотрения гравитационных полей с масштабно инвариантным интегралом действия [2, 3]. Он предложил использовать линейную комбинацию следующих лагранжианов:

$$\mathscr{L}_1 = \frac{\sqrt{-g}}{4}R_{ijkl}R^{ijkl}, \quad \mathscr{L}_2 = \frac{\sqrt{-g}}{4}R_{ilk}{}^{l}R^{ilk}{}_{l},$$

* Address: State Committee for Standards of USSR Council of Ministers, Leninsky Prospekt 9, Moscow 117049, USSR.

[1] Подобные лагранжианы назовем неоднородными лагранжианами второй степени по кривизне.

$$\mathscr{L}_3 = \frac{\sqrt{-g}}{4} R_{ij}{}^{ij} R_{kl}{}^{kl}, \qquad \mathscr{L}_4 = \frac{\sqrt{-g}}{4} \varepsilon^{ijkl} R_{ij}{}^{mn} R_{klmn},$$

$$\mathscr{L}_5 = \frac{\sqrt{-g}}{4} \varepsilon^{ijkl} \varepsilon^{abmn} R_{ijab} R_{klmn}, \tag{1.1}$$

где ε^{ijkl} — единичный полностью кососимметринчый тензор, и показал, что последние две из этих величин не дают вклада в уравнения поля, а первые три в римановых 4-мерных пространствах связаны тождеством

$$\frac{\delta}{\delta g_{ik}} (\mathscr{L}_1 - 4\mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_3) = 0, \tag{1.2}$$

где $\dfrac{\delta}{\delta g_{ik}}$ — вариационная производная [2].

Анализ квадратичных лагранжианов содержат также работы Паули, Эддингтона, Бухдала, Стефенсона и других исследователей (см., например, [4—7]).

3. На необходимость изучения в лагранжиане квадратичных добавок по кривизне указывают работы, исследующие связь квадратичных поправок и квантовых флуктуации полей [8, 9, 14].

Авторы работы [10] показывают, что допустимо классическое рассмотрение соответствующих гравитационных полей, т.к. квадратичные поправки оказываются существенными уже на расстоянии $\sim 10^{-31}$ см и времени $\sim 10^{-(41 \div 42)}$ сек, тогда как квантово-гравитационные эффекты появляются при $l_0 = 10^{-33}$ см и $t_0 = 10^{-44}$ сек.

4. Квадратичные по кривизне добавки в лагранжиане гравитационного поля не дают возможность применять строгие теоремы Пенроуза-Хокинга о неизбежности коллапса в сингулярностях. Поэтому в рамках данной теории появляется вероятность устранения подобного явления. С физической точки зрения этот факт мог бы означать ликвидацию сингулярностей при более корректном учете квантовых эффектов в сильном гравитационном поле.

5. В настоящее время интерес к лагранжианам 2-ой степени по кривизне возрос после работ Де-Витта [11], группы Дезера [12—13], Хоофта и Вельтмана [15], посвященным проблеме перенормировки в квантовой теории гравитации.

6. Квадратичные лагранжианы тесно связаны с калибровочной трактовкой гравитационного поля [16, 17]. В рамках этой теории, как известно [17—19], лагранжиан свободного гравитационного поля $\mathscr{L}$, вследствие аналогии с электромагнитным полем, должен быть квадратичен по тензору калибровочного поля, т.к. электромагнитное поле является одним из видов калибровочных полей. Из соображений общности необходимо учесть всевозможные квадратичные комбинации, а также всевозможные инвариантные комбинации, содержащие тензор калибровочного поля менее, чем во второй степени. Последнее обстоятельство по крайней мере для гравитационных полей мотивируетя также возникающими в чисто квадра-

тичной теории трудностями, связанными, например, с отсутствием корректного определения полной энергии „островной“ системы тел.

Всё это приводит к необходимости рассмотрения следующего лагранжиана гравитационного поля

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\mathrm{E}} + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathscr{L}_i + \varkappa \mathscr{L}_{(\mathrm{ext})}, \tag{1.3}$$

где $\mathscr{L}_i$ — квадратичные лагранжианы вида (1.1), λ_i — константы связи, имеющие размерность квадрата некоторой новой фундаментальной длины l_0^2, а $\mathscr{L}_{(\mathrm{ext})}$ — лагранжиан внешнего поля.

2. *Классификация псевдоримановых пространств по группам голономии*

В связных псевдоримановых пространствах V_4 группа голономии $\mathfrak{G}^r$ является подгруппой группы Лоренца $SO(1,3)$. Поэтому классификация псевдоримановых пространств V_4 сводится к перечислению всех подргупп группы $SO(1,3)$. Связь между группой голономии $\mathfrak{G}^r$ и кривизной пространства устанавливает теорема Амброза-Сингера [20]. В аналитических областях $U_x \subset V_4$ эта связь является взаимно-однозначной.

Впервые понятие группы голономии было введено Э. Картаном [21]. Соответствуюшую классификацию предложил Шелл [22]. Дальнейшее развитие эта классификация нашла в работах [23—27].

Если Γ — алгебра Ли группы голономии (алгебра голономии), то в произвольной точке $x \in V_4$ пространство всех тензоров кривизны $\mathscr{R}(\Gamma)$, соответствующих данной алгебре голономии Γ, содержит все элементы вида $\Gamma \vee \Gamma$, которые удовлетворяют циклическому тождеству

$$(x \wedge y) \vee (u \wedge v) + (x \wedge v) \vee (y \wedge u) + (x \wedge u) \vee (v \wedge y) = 0, \tag{2.1}$$

где x, y, u, v — базисные вектора касательного пространства $T_{x_0}(x_0 \in V_4)$, а символы $\vee$ и $\wedge$ обозначают симметризованное и кососимметризованное (внешнее) произведение соответственно.

Пространство $\nabla\mathscr{R}(\Gamma)$ ковариантных производных тензора кривизны типа Γ состоит из всех элементов вида $z \otimes (x \wedge y) \vee (u \wedge v)$, где $z \in T_{x_0}$ и $(x \wedge y) \vee (u \wedge v)$ — произвольный элемент, принадлежащий $\mathscr{R}(\Gamma)$, которые удовлетворяют тождеству Бьянки

$$z \otimes (x \wedge y) \vee (u \wedge v) + y \otimes (z \wedge x) \vee (u \wedge v) + x \otimes (y \wedge z) \vee (u \wedge v) = 0. \tag{2.2}$$

С помощью метрики касательного пространства T_{x_0}, компоненты которой обозначим (x, u), пространствам $\mathscr{R}(\Gamma)$ и $\nabla\mathscr{R}(\Gamma)$ сопоставляются их „свертки“. Например, если $(x \wedge y) \vee (u \wedge v) \in \mathscr{R}(\Gamma)$ и ϱ, s — отображения в пространство тензоров Риччи $\mathscr{R}_1$ и в скалярную кривизну соответственно, то имеем

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (u \wedge v) &\xrightarrow{\varrho} (x, u) y \vee v + (y, v) x \vee u - (x, v) y \vee u - (y, u) x \vee v \\ &\xrightarrow{s} 2(x, u)(y, v) - 2(x, v)(y, u).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Классификация псевдоримановых пространств V_4 по группам голономии $\mathfrak{G}^r(r = 1, \ldots, 4, 6)$ составляет 14 классов $R_\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots, 14)$, из которых для изучения уравнений поля в пространствах с неполными группами $\mathfrak{G}^r(r = 1, \ldots, 4)$ достаточно рассмотреть три класса: R_{11}, R_{12} и R_{13}. Исследование остальных $R_\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots, 10)$ легко сводится к перечисленным случаям.

В произвольной точке $x \in V_4$ рассмотрим натуральный репер (x, y, z, t) и тетрады $\{x, y, p, q\}$, которые связаны следующим соотношением

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}(z+t), \qquad q = \frac{1}{\sqrt{2}}(z-t). \tag{2.4}$$

Обозначая

$$X = p \wedge x, \quad Y = p \wedge y, \quad X' = t \wedge x, \quad Y' = t \wedge y,$$
$$\tilde{X} = z \wedge x, \quad \tilde{Y} = z \wedge y, \quad P = x \wedge y, \quad Q = p \wedge q \tag{2.5}$$

и полагая, что пространство V_4 имеет $R = 0$, для формы кривизны Ω получаем соответствующие представления:

класс $R_{11}, \Gamma = SO(3)$:

$$\Omega = a_1(P \vee P - \tilde{X} \vee \tilde{X}) + a_2(\tilde{X} \vee \tilde{X} - \tilde{Y} \vee \tilde{Y}) + a_3(\tilde{X} \vee \tilde{Y}) + a_4(P \vee \tilde{X}) + a_5(P \vee \tilde{Y}), \tag{2.6}$$

класс R_{12}, $\Gamma = SO(1,2)$:

$$\Omega = a_1(X' \vee X' + P \vee P) + a_2(Y' \vee Y' + P \vee P) + a_3(X' \vee Y') + a_4(P \vee X') + a_5(P \vee Y'), \tag{2.7}$$

класс R_{13} (Γ^4):

$$\Omega = a_1(Q \vee Q + P \vee P) + a_2(X \vee X) + a_3(Y \vee Y) + a_4(X \vee Y) + a_5(Q \vee X) + a_6(Q \vee Y) + a_7(P \vee X) + a_8(P \vee Y), \tag{2.8}$$

причем коэффициенты a_β могут быть найдены по формулам IV. 53 главы II [28].

Пространство $\mathscr{R}(\Gamma^6)$ имеет 19-мерный базис, элементы которого определяются аналогично предыдущему.

3. Квадратичные добавки по кривизне и гравитационный вакуум

Рассматривая лагранжиан (1.3), получим уравнения поля, предполагая, что пространство V_4 обладает аффинной связностью. Применяемый способ основан на методе, обобщающем вариационный формализм Палатини [29]. В пространстве римановой связности исследуемые уравнения поля имеют вид [18, 19]

$$\lambda(\nabla_j R_{ik} - \nabla_k R_{ij}) + (\lambda + \bar{\lambda})(g_{ik}\nabla^l R_{jl} - g_{ij}\nabla^l R_{kl}) = 0, \tag{3.1}$$

$$R_{ik}-\frac{1}{2}\, g_{ik}R+\lambda(2R_{il}R^l_k+2R_{ijkl}R^{jl}-g_{ik}R_{jl}R^{jl})$$

$$+\bar{\lambda}(RR_{ik}-\frac{1}{4}\, g_{ik}R^2) = \varkappa T^{(\mathrm{ext})}_{ik}, \tag{3.2}$$

где $\lambda = \lambda_1+\frac{1}{4}\lambda_2$, $\bar{\lambda} = \lambda_3-\lambda_1$. При получении уравнения (3.2) используется тождество (1.2), которое, как показано в [30], выполняется в римановом пространстве-времении также и для метода Палатини.

Первоначально предполагая, что пространство-время обладает общей аффинной связностью, мы варьируем лагранжиан поля (1.3) независимо по метрике g_{ik} и коэффициентам аффинной связности Γ^i_{jk}. Однако, в дальнейшем рассматривается более частный вид уравнений в форме (3.1), (3.2). Это соответствует такой физической ситуации, когда эффектами кручения можно пренебречь. Следует заметить, что наличие ненулевого кручения может оказаться существенным фактом в ряде физических задач [31, 32].

Рассмотрим систему (3.1), (3.2) в гравитационном вакууме ($T^{(\mathrm{ext})}_{ik} = 0$). Исследуемые уравления поля принимают вид

$$\nabla^l R_{lkij} \equiv \nabla_i R_{jk}-\nabla_j R_{ik} = 0, \tag{3.3}$$

$$R_{ik}+\lambda(2R_{il}R_k{}^l+2R_{ijkl}R^{jl}-g_{ik}R_{jl}R^{jl}) = 0. \tag{3.4}$$

Докажем, что справедлива следующая [33]

Теорема. В псевдоримановом пространстве V_4 с группой голономии $\mathfrak{G}^r(r = 1, \ldots, 4)$ уравнения поля (3.3), (3.4) удовлетворяются тогда и только тогда, когда данное V_4 является пространством Эйнштейна $R_{ik} = 0$.

Необходимое условие очевидно, если подставить $R_{ik} = 0$ в исследуемые уравнения.

Рассмотрим достаточность утверждения. Для доказательства потребуется только уравнение (3.4).

Вычисляя слагаемые уравнения (3.4) для каждой из форм Ω вида (2.6)—(2.8), получаем системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
\Gamma = SO(3):\ & a_2-8\lambda a_1a_2+8\lambda a_1^2+2\lambda a_4^2 = 0,\\
& a_1-a_2+2\lambda a_5^2+8\lambda a_1a_2 = 0,\\
& a_1-8\lambda a_2^2-2\lambda a_3^2+8\lambda a_1a_2 = 0,\\
& a_5+8\lambda a_1a_5-8\lambda a_2a_5+4\lambda a_3a_4 = 0,\\
& a_4+8\lambda a_2a_4+4\lambda a_3a_5 = 0,\\
& a_3-8\lambda a_1a_3+4\lambda a_4a_5 = 0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma = SO(1,2):\ & a_2+8\lambda a_1^2-2\lambda a_4^2+8\lambda a_1a_2 = 0,\\
& a_1+8\lambda a_2^2-2\lambda a_5^2+8\lambda a_1a_2 = 0,\\
& a_1+a_2-2\lambda a_3^2+8\lambda a_1a_2 = 0,
\end{aligned}$$

$$a_3 - 8\lambda a_1 a_3 - 8\lambda a_2 a_3 + 4\lambda a_4 a_5 = 0,$$
$$a_5 + 8\lambda a_1 a_5 - 4\lambda a_3 a_4 = 0,$$
$$a_4 + 8\lambda a_2 a_4 - 4\lambda a_3 a_5 = 0, \tag{3.6}$$
$$\Gamma^4 : a_1 = 0, \quad a_5 - a_8 = 0, \quad a_6 + a_7 = 0, \quad a_2 + a_3 = 0. \tag{3.7}$$

С помощью отображения ϱ (см. (2.3)) легко получить, что формы кривизны типа (2.6), (2.7) удовлетворяют условию $R_{ik} \neq 0$. С другой стороны, исследование уравнений (3.5), (3.6) показывает, что нетривиальные решения в этих системах отсуствуют ($a_\beta = 0$).

В свою очередь, форме типа (2.8) соответствует $R_{ik} = 0$, если использовать условия (3.7). Таким образом, показана достаточность утверждения, но этим также исчерпывается доказательство теоремы.

4. *Сферически симметричные поля тяготения*

Как следует из работ Айсленда и Такено, наиболее общая метрика, соответствующая сферически симметричному пространству-времени, имеет вид [34]

$$ds^2 = e^{2\alpha}(dx^1)^2 + e^{2\beta}[(dx^2)^2 + \sin^2 x^2 (dx^3)^2] - e^{2\gamma}(dx^4)^2, \tag{4.1}$$

где α, β, γ — функции переменных x^1, x^4.

Для исследования пространств с метрикой (4.1) рассмотрим ортонормированный репер $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$, определяемый в локальных координатах соотношениями

$$\theta^1 = e^\alpha dx^1, \quad \theta^2 = e^\beta dx^2, \quad \theta^3 = e^\beta \sin x^2 dx^3, \quad \theta^4 = e^\gamma dx^4. \tag{4.2}$$

Внешним образом дифференцируя (4.2), вычисляем коэффициенты b^i_{jk} 2-формы $d\theta^i$:

$$d\theta^i = \tfrac{1}{2} b^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k. \tag{4.3}$$

Коэффициенты $b_{ljk} = g_{il} b^i_{jk}$ определяют коэффициенты вращения Риччи по следующей формуле [28]

$$\gamma_{ijk} = -\tfrac{1}{2}(b_{ikj} + b_{jik} - b_{kji}), \tag{4.4}$$

где компоненты g_{ik} соответствуют метрической форме

$$ds^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 + (\theta^3)^2 - (\theta^4)^2. \tag{4.5}$$

Используя (4.4), вычисляем I-форму связности $\omega_{ij} = \gamma_{ijk}\theta^k$:

$$\omega = \tilde{X} \otimes \omega_{\tilde{X}} + \tilde{Y} \otimes \omega_{\tilde{Y}} + X' \otimes \omega_{X'} + Y' \otimes \omega_{Y'} + P \otimes \omega_P + \tilde{Q} \otimes \omega_{\tilde{Q}},$$
$$\omega_{\tilde{X}} = \beta_1 e^{-\alpha} z, \quad \omega_{\tilde{Y}} = cs^{-1} e^{-\beta} z,$$
$$\omega_{\tilde{X}'} = -e^{-\gamma}\alpha_4 x - \gamma_1 e^{-\alpha} t, \quad \omega_{Y'} = -\beta_4 e^{-\gamma} y,$$
$$\omega_P = -\beta_1 e^{-\alpha} y, \quad \omega_{\tilde{Q}} = \beta_4 e^{-\gamma} z, \tag{4.6}$$

где использованы обозначения параграфа 2, причем $\tilde{Q} = z \wedge t$; $x, y, z, t \leftrightarrow \theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$; $\alpha_i = \partial_i \alpha$; $\beta_i = \partial_i \beta$; $s = \sin x^2$; $c = \cos x^2$.

Используя формулу $\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \omega_{il} \wedge \omega^l_j$ и (4.6), получаем

$$\begin{aligned} \Omega = a_1(\tilde{Y} \vee \tilde{Y}) + a_2(P \vee P + \tilde{X} \vee \tilde{X}) + a_3(P \vee Y' + \tilde{Q} \vee \tilde{X}) \\ - a_4(X' \vee X') + a_5(Y' \vee Y' + \tilde{Q} \vee \tilde{Q}), \end{aligned} \tag{4.7}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_5$ — некоторые функции от x^1, x^4.

Рассмотрим уравнения поля (3.3), (3.4) в пространстве-времени с метрикой (4.1). Подставляя (4.7) в (3.4), получаем

$$\begin{aligned} a_1 - 2a_2 + 24\lambda a_5^2 + 16\lambda a_2 a_5 + 16\lambda a_1 a_5 &= 0, \\ a_1 + a_5 + 16\lambda a_5^2 + 16\lambda a_1 a_5 &= 0, \\ a_1 + a_5 + 16\lambda a_3^2 + 16\lambda a_5^2 + 16\lambda a_1 a_5 &= 0, \\ a_3(1 - 8\lambda a_5) &= 0, \\ a_1 + 2a_2 - a_4 - 2a_5 &= 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Сразу же отметим, что из системы (4.8) следует $a_3 = 0$. Дальнейший анализ системы (4.8) приводит к ряду возможных вариантов, из которых мы исследуем лишь два:

$$a_1 = -\frac{1}{8\lambda}, \quad a_5 = \frac{1}{8\lambda}, \tag{4.9}$$

$$a_2 = \frac{1}{32\lambda}, \quad a_5 = -\frac{1}{16\lambda}. \tag{4.10}$$

Исследование остальных вариантов не представляет интерес, т.к. все они дают условие $R_{ik} = 0$.

Предварительно получим некоторые формулы. Вычисляя ковариантные производные векторов x, y, z, t [28], получаем выражения

$$\begin{aligned} \nabla x &= \omega_{\tilde{X}} \otimes z + \omega_{X'} \otimes t - \omega_P \otimes y, \\ \nabla y &= \omega_{\tilde{Y}} \otimes z + \omega_{Y'} \otimes t + \omega_P \otimes x, \\ \nabla z &= -\omega_{\tilde{X}} \otimes x - \omega_{\tilde{Y}} \otimes y - \omega_{\tilde{Q}} \otimes t, \\ \nabla t &= \omega_{X'} \otimes x + \omega_{Y'} \otimes y - \omega_{\tilde{Q}} \otimes z. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Используя (4.11), нетрудно вычислить ковариантные производные бивекторов, порождающих форму (4.7),

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{X} &= \omega_{\tilde{Y}} \otimes P - \omega_{\tilde{Q}} \otimes X' + \omega_{X'} \otimes \tilde{Q} - \omega_P \otimes \tilde{Y}, \\ \nabla \tilde{Y} &= -\omega_{\tilde{X}} \otimes P - \omega_{\tilde{Q}} \otimes Y' + \omega_{Y'} \otimes \tilde{Q} + \omega_P \otimes \tilde{X}, \\ \nabla X' &= -\omega_{Y'} \otimes P - \omega_{\tilde{Q}} \otimes \tilde{X} - \omega_{\tilde{X}} \otimes \tilde{Q} - \omega_P \otimes Y', \end{aligned}$$

$$\nabla Y' = \omega_{X'} \otimes P - \omega_{\tilde{Q}} \otimes \tilde{Y} - \omega_{\tilde{Y}} \otimes \tilde{Q} + \omega_P \otimes X',$$

$$\nabla P = \omega_{\tilde{X}} \otimes \tilde{Y} + \omega_{X'} \otimes Y' - \omega_{\tilde{Y}} \otimes \tilde{X} - \omega_{Y'} \otimes X',$$

$$\nabla Q = \omega_{\tilde{X}} \otimes X' + \omega_{\tilde{Y}} \otimes Y' + \omega_{X'} \otimes \tilde{X} + \omega_{Y'} \otimes \tilde{Y}. \qquad (4.12)$$

С помощью (4.12) нетрудно получить ковариантную производную $\nabla\Omega$ формы кривизны (4.7). Подставляя $\nabla\Omega$ в уравнение поля (3.3), приходим к равенствам $a_1 = a_2 = 0$ или $a_2 = a_5 = 0$, которые, очевидно, противоречат условиям (4.9) и (4.10).

Как отмечалось выше, остальные варианты, возникающие при анализе системы (4.8), приводят к нулевому тензору Риччи. Таким образом, доказана следующая

Теорема. В сферически симметричном псевдоримановом пространстве V_4 система уравнений гравитационного поля в вакууме (3.3), (3.4) удовлетворяется тогда и только тогда, когда данное V_4 — пространство Эйнштейна $R_{ik} = 0$.

Отсюда, например, вытекает аналог известной теоремы Биркгоффа о сферически симметричных полях тяготения [34].

При исследовании уравнений гравитационного поля в вакууме (3.3), (3.4) автор получил еще ряд результатов, которые приводятся (без доказательства) в Заключении.

5. Гидродинамическое приближение и космологическая модель Фридмана

Рассмотрим уравнения поля (3.1), (3.2), предполагая, что

$$\varkappa T_{ik}^{(\mathrm{ext})} = \mu u_i u_k - \nu g_{ik}, \qquad (5.1)$$

где u_i — вектор 4-скорости

$$g^{ik} u_i u_k = 1, \qquad (5.2)$$

$\mu = \varkappa(\varepsilon + p), \nu = \varkappa p$ — плотность энергии и давление вещества соответственно.

Допустим, что пространство-время является однородным и изотропным. Тогда метрическая форма

$$ds^2 = A^2(\eta)\,[d\chi^2 + f^2(\chi) d\Omega^2 - d\eta^2], \qquad (5.3)$$

где $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$, причем

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & \text{закрытая модель} \\ \operatorname{sh}\chi, & \text{открытая модель} \\ \chi & \text{промежуточная модель} \end{cases}$$

Рассмотрим „пылевидное“ состояние материи, характеризующееся условием

$$p = \nu = 0. \qquad (5.4)$$

Докажем, что в классе решений уравнений поля (3.1), (3.2) отсутствуют решения фридмановского типа.

Действительно, используя формулы предыдущего параграфа, в пространстве с метрикой (5.3) нетрудно получить форму кривизны Ω. В частности, в ортонормированном репере (4.2) имеем

$$a_1 = a_2, \qquad a_3 = 0, \qquad a_4 = a_5, \tag{5.5}$$

где $\alpha_\beta(\beta = 1, 2, \ldots, 5)$ — коэффициенты формы кривизны Ω вида (4.7). Используя равенство нулю компонент 4-скорости $u_\alpha(\alpha = 1, 2, 3)$ и соотношения (5.5), получаем соответствующую уравнениям поля эквивалентную систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} -a_1+2a_4+16\lambda a_1^2-16\lambda a_4^2+3\bar{\lambda} a_1^2-3\bar{\lambda} a_4^2 = 0, \\ 3a_1+48\lambda a_1^2-48\lambda a_4^2-9\bar{\lambda} a_4^2+9\bar{\lambda} a_1^2+\mu = 0. \end{gathered} \tag{5.6}$$

В свою очередь, из последних уравнений следует

$$\begin{gathered} a_1 = -\tfrac{1}{6}\,\mu+a_4, \\ a_4 = \frac{\frac{1}{2}\mu+\frac{4}{3}\mu^2(\lambda+\frac{3}{1}6\bar{\lambda})}{-3+16\mu(\lambda+\frac{3}{1}6\bar{\lambda})}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Применяя формулы §4, вычисляем ковариантную производную $\nabla\Omega$ формы кривизны Ω. Подставляя $\nabla\Omega$ в (3.1), имеющее теперь вид

$$\lambda\nabla^l R_{lijk}+(\lambda+\bar{\lambda})g_{i[j}\partial_{k]}\mu = 0 \tag{5.8}$$

получим, что $a_1 = 0$. Используя (5.7), (5.5) и (5.8), легко показать несовместность данных соотношений. Таким образом, доказательство нашего утверждения исчерпано.

Рассмотрим уравнения (3.1), (3.2) ($T_{ik}^{(\mathrm{ext})}$ имеет вид (5.1)) в V_4 с группами голономии $\mathfrak{G}^r$, где $r = 1, \ldots, 4$. При этом достаточно исследовать классы R_{11}, R_{12} и R_{13}.

Форма кривизны класса R_{13} имеет вид

$$\begin{gathered} \Omega = a_1(P \vee P)+a_2(X \vee X)+a_3(Y \vee Y)+a_4(X \vee Y) \\ +a_5(Q \vee X)+a_6(Q \vee Y)+a_7(P \vee X)+a_8(P \vee Y)+a_9(Q \vee Q). \end{gathered} \tag{5.9}$$

Если b_1, b_2, b_3, b_4 — коэффициенты разложения 4-скорости по базису x, y, p, q, то условие нормировки (5.2) приводит к соотношению

$$b_1^2+b_2^2+2b_3b_4 = 1. \tag{5.10}$$

Подставляя (5.9) в уравнение (3.2), получаем равенства $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, которые, очевидно, противоречат условию (5.10). Следовательно, в рассматриваемых пространствах уравнения (3.1), (3.2) не удовлетворяются. Необходимо отметить, что указанное противоречие устранимо, если положить $\varepsilon+p=0$.

Тем не менее, классы R_{11} и R_{12} содержат пространства, в которых исследуемые уравнения поля имеют решения при $\varepsilon+p\neq0$.

Как следует из [27], классы R_{11} и R_{12} содержат симметрические пространства ($\nabla_a R_{ijkl}=0$). Например, рассматривая симметрические V_4 из класса R_{11}, получаем

$$\Omega = a(P \vee P+\tilde{X} \vee \tilde{X}+\tilde{Y} \vee \tilde{Y}). \tag{5.11}$$

Для формы (5.11) уравнение (3.1) может быть удовлетворено тождественно, а уравнение (3.2) приводит к системе алгебраических уравнений, которая имеет совместные решения $a\neq0$. Среди последних существуют решения, которые не удовлетворяют соответствующему уравнению Эйнштейна. Исследуя симметрические V_4 из класса R_{12}, приходим к аналогичному выводу.

Таким образом, анализ уравнений поля (3.1), (3.2) с тензором энергии-импульса сплошной среды (5.1) приводит к следующим результатам [37]: 1) уравнения поля не имеют решений типа изотропной и однородной космологической модели Фридмана с некогерентным веществом; 2) в пространствах с группами голономии $\mathfrak{G}^r$, где $r=1, \ldots, 4$, за исключением классов R_{11} и R_{12}, уравнения поля решений не имеют, если не рассматривать состояние $\varepsilon+p=0$; 3) в классах R_{11} и R_{12} существуют решения уравнений поля, отличные от решений традиционных уравнений Эйнштейна.

6. Заключение

Изложим некоторые результаты, полученные в процессе дальнейшего исследования.

1. Наряду с теоремами параграфов 3 и 4, получаем, что класс решений уравнений поля в вакууме (3.3), (3.4) совпадает с классом решений уравнения $R_{ik}=0$ в следующих случаях [33, 37]:

1) в произвольном натуральном репере $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$ коэффициенты формы кривизны Ω не являются величинами порядка — $1/\lambda$;

2) конформно-плоские пространства V_4;

3) гравитационные поля, удовлетворяющие уравнению $\nabla^a\nabla_a R_{ijkl}=0$.

2. Если $\mathscr{L}_{(\mathrm{ext})}=0$, и $\mathscr{L}_E$ можно пренебречь то приходим к гравитационным полям с масштабно инвариантным интегралом действия. Показано [36], что соответствующие уравнения поля имеют класс решений, значительно более широкий, чем все решения уравнения Эйнштейна $R_{ik}=0$. Среди подобных гравитационных полей существуют поля с алгебрами голономии любого класса.

3. „Нулевая жидкость“ ($T_{ik}^{(\mathrm{ext})}=\mu u_i u_k$, $u^i u_i=0$). В пространствах с группами голономии $\mathfrak{G}^r(r=1, \ldots, 4)$ уравнения (3.1), (3.2) удовлетворяются только в том случае, когда выполняется соответствующее уравнение Эйнштейна [37].

4. В любом классе классификации по группам голономии исследуемые уравнения могут содержать одну независимую константу связи λ [38]. Исключение представляют пространства V_4 с группами голономии $\mathfrak{S}^1$ и алгебрами $\Gamma = x \wedge y$ или $\Gamma = p \wedge q$.

В заключение автор выражает свою признательность проф. К. П. Станюковичу за постоянное внимание к работе, а также участникам теоретического семинара отделения гравитации ВНИИФТРИ за ценное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Weyl, *Space, Time, Matter*, London 1922.
[2] C. Lanczos, *Ann. Math.* **39**, 842 (1938).
[3] C. Lanczos, *J. Math. Phys.* **10**, 1057 (1969).
[4] W. Pauli, *Phys. Z.* **20**, 457 (1919).
[5] А. Эддингтон, *Теория относительности*, Гостехиздат, Москва — Ленинград 1934, Пер. с англ.
[6] H. Buchdall, *Nuovo Cimento* **23**, 141 (1962).
[7] G. Stephenson, *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **56**, 247 (1960).
[8] К. П. Станюкович, *Гравитационное поле и элементарные частицы*, Наука, Москва 1965.
[9] В. Л. Гинзбург, Д. А. Киржниц, А. А. Любушин, *ЖЭТФ* **60**, 451 (1971).
[10] Т. В. Рузмайкина, А. А. Рузмайкин, *ЖЭТФ* **57**, 680 (1969).
[11] B. S. De Witt, *Phys. Rev.* **162**, 1254 (1967).
[12] S. Deser, H.-Sh. Tsao, P. V. Nieuwenhuizen, *Phys. Rev.* **D10**, 3337 (1974).
[13] S. Deser, P. V. Nieuwenhuizen, *Phys. Rev.* **D10**, 401 (1974).
[14] Я. Б. Зельдович, В. Н. Лукаш, А. А. Старобинский, *Рождение частиц в гравитационных полях и их влияние на космологическое расширение*, Препринт ИПМ, Москва 1974.
[15] G. t'Hooft, M. Veltman, *Ann. Inst. H. Poincaré* **A20**, 69 (1974).
[16] R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).
[17] T. W. B. Kibble, *J. Math. Phys.* **2**, 212 (1961).
[18] Б. Н. Фролов, В сб. трудов II Советской гравитационной конференции *Современные проблемы гравитации*, изд. Тбилисского унив-та, Тбилиси 1967, с. 270.
[19] Н. П. Коноплёва, В. Н. Попов, *Калибровочные поля*, Атомиздат, Москва 1972.
[20] W. Ambrose, J. M. Singer, *Trans. Am. Math. Soc.* **75**, 428 (1953).
[21] Э. Картан, *Геометрия групп Ли и симметрические пространства*, изд. иностр. лит-ры, Москва 1949. Пер. с франц.
[22] J. F. Schell, *J. Math. Phys.* **2**, 202 (1961).
[23] J. N. Goldberg, R. P. Kerr, *J. Math. Phys.* **2**, 327 (1961).
[24] M. Cahen, R. Debever, *Bull. Sci. Acad. Roy. Belg.* **47**, 491 (1961).
[25] W. v. Beiglböck, *Z. Phys.* **179**, 148 (1964).
[26] Д. В. Алексеевский, *Функциональный анализ и его приложения* **2**, 1 (1968).
[27] В. В. Астраханцев, *Математические заметки* **9**, 59 (1971).
[28] А. Лихнерович, *Теория связностей в целом и группы голономий*, изд. иностр. лит-ры, Москва 1960. Пер. с франц.
[29] A. Palatini, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **43**, 204 (1919).
[30] Н. В. Мицкевич, *Физические поля в общей теории относительности*, Наука, Москва 1969.
[31] A. Trautman, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.* **20**, 185 (1972).
[32] W. Kopczyński, *Phys. Lett.* **A39**, 219 (1972).
[33] В. М. Николаенко, В сб. *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц*, вып. 7, под ред. К. П. Станюковича, Атомиздат, Москва 1976.

[34] Дж. Синг, *Общая теория относительности*, пер. с англ., изд. инестр. лит-ры, Москва 1963.
[35] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва 1967.
[36] В. М. Николаенко, *Докл. Акад. наук СССР* **218**, 1068 (1974).
[37] В. М. Николаенко, Кандидатская диссертация, Университет дружбы народов им. П. Лумумбы, Москва 1975.
[38] К. П. Станюкович, В. М. Николаенко, *Материалы совещания по теории относительности и гравитации секции физики Московского общества испытателей природы*, Москва 1975, в печати.