Vol. B7 (1976) ACTA PHYSICA POLONICA No 3

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

FIRST-ORDER EQUATIONS FOR GRAVITATIONAL FIELD IN VACUUM

Ф. И. Федоров, А. А. Кириллов

(Поступила в редакцию 27 ноября, 1974 г.; версия просмотрена 23 мая 1975 г.)

Институт физики АН БССР, Лаборатория теоретической физики, Минск*

The Einstein vacuum field equations are represented as a system of the first-order equations with the quadratic nonlinearity in field functions. Different variants of these equations are investigated, in particular the system of equations permitting the Lagrangian formulation. This method leads to the energy-momentum pseudotensor of the gravitational field which equals to the half-sum of the Einstein pseudotensor and the Møller-Mitskiévič pseudotensor.

В работе [1] было показано, что уравнения Эйнштейна для гравитационного поля в вакууме могут быть приведены к форме дифференциальных уравнений первого порядка с квадратичной нелинейностью по компонентам волновой финкции

$$(\gamma^j\partial_j+\gamma^0)_{\mu\nu}\Psi_\nu+\Lambda_{\mu\nu\lambda}\Psi_\nu\Psi_\lambda = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

где γ^j, γ^0 — постоянные квадратные матрицы размерности $n\times n$, $\Lambda = (\Lambda_{\mu\nu\lambda})$ — постоянная кубическая матрица $n\times n\times n$, симметричная по двум последним индексам. В символической матричной записи уравнение (1) имеет вид

$$(\gamma^j\partial_j+\gamma^0)\Psi+\Lambda\Psi\Psi = 0. \tag{2}$$

В [1] были использованы в качестве исходных уравнения $R_{ik} = \lambda g_{ik}$ и $\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2} g^{ln}(\partial_i g_{kn}+\partial_k g_{in}-\partial_n g_{ik})$, где R_{ik} — тензор Риччи, Γ^l_{ik} — символы Кристоффеля второго рода, g_{ik} — ковариантный метрический тензор. При этом в раскрытом виде система (1) записывается следующим образом

I.
$$R_{ik} = \partial_l\Gamma^l_{ik}-\partial_k\Gamma^l_{il}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^n_{ln}-\Gamma^n_{il}\Gamma^l_{kn} = 0, \tag{3}$$
$$\partial_l g_{ik}-\partial_i g_{kl}-\partial_k g_{il}+2g_{ln}\Gamma^n_{ik} = 0, \tag{4}$$

* Address: Institute of Physics AN BSSR, Leninski pr. 70, Minsk-72, USSR.

а функция Ψ состоит из 50 компонент (10 величин g_{ik} и 40 велечин Γ^l_{ik})

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{(ik)} \\ \Psi_{l(ik)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{ik} \\ \Gamma^l_{ik} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Заметим, что еще Палатини [3] использовал в качестве независимых функций поля компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля. Однако, ни у него, ни у других авторов, применявших впоследствии аналогичный подход, уравнениям Эйнштейна не была придана форма (1), (2) [1] в которой все их свойства определяются заданием постоянных матриц γ^j, γ^0, Λ. Эти уравнения замечательны своей универсальностью. Действительно, в такой форме могут быть представлены уравнения квантовой электродинамики, уравнения нелинейного поля Гейзенберга и множество других (см. [1, 2]).

Наряду с системой I (3), (4) можно исходить из уравнений, в которых соотношения (4) заменены условием равенства нулю ковариантной производной от метрического тензора

$$\text{II.} \qquad R_{ik} = 0, \qquad \nabla_l g_{ik} = \partial_l g_{ik} - g_{in}\Gamma^n_{lk} - g_{kn}\Gamma^n_{li} = 0. \tag{6}$$

Можно также положить в основу вместо ковариантного контравариантный тензор g^{ik}, что приводит к системе

$$\text{III.} \qquad R_{ik} = 0, \qquad \nabla_l g^{ik} = \partial_l g^{ik} + g^{in}\Gamma^k_{ln} + g^{kn}\Gamma^i_{ln} = 0, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} g^{ik} \\ \Gamma^l_{ik} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Наконец, вместо (4) можно взять условие $\nabla_l \mathring{g}^{ik} = 0$, где $\mathring{g}^{ik} = \sqrt{-g}\, g^{ik}$ (см. напр. [4]), g — детерминант ковариантного метрического тензора

$$\text{IV.} \qquad R_{ik} = 0, \qquad \nabla_l \mathring{g}^{ik} = \partial_l \mathring{g}^{ik} + \mathring{g}^{in}\Gamma^k_{ln} + \mathring{g}^{nk}\Gamma^i_{ln} - \mathring{g}^{ik}\Gamma^n_{ln} = 0, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \mathring{g}^{ik} \\ \Gamma^l_{ik} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Разумеется, в принципе все системы I—IV эквивалентны между собой и могут быть получены друг из друга. Так, второе уравнение (6) является полусуммой уравнения (4) и того же уравнения с переставленными индексами i, l. Следовательно (6) отличается от (4) за счет линейного преобразования. В свою очередь вторые уравнения (7) получаются из (6) путем умножения на $g^{mi}\, g^{nk}$, т.е. в результате нелинейного преобразования. Наконец, вторые уравнения (8) следуют из (7) после умножения на $\sqrt{-g}$ и учета соотношений $\partial_l\sqrt{-g}/\sqrt{-g} = \Gamma^k_{lk}$, т.е. опять таки в результате нелинейного преобразования. Однако, при переходе от них к системе вида (1), (2) мы получим матрицы γ^j, Λ, отличающиеся по своим алгебраическим свойствам. Как мы увидим ниже, это различие вообще говоря не тривиально и существуют веские основания для того, чтобы отдать предпочтение системе IV перед остальными тремя.

Сопоставляя I—IV с (1), видим прежде всего, что $\gamma^0 = 0$. Что же касается матриц γ, Λ, то для их определения мы используем элементы матричной алгебры

e^{AB} в пространстве функций $\Psi = (\Psi_A)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\delta_{AB} = \delta_{BA}, \quad f_A \delta_{AB} = f_B, \tag{9}$$

где A, B, C, D — собирательные индексы, пробегающие совокупность значений $[(ik), l(ik)]$. Под δ_{AB} здесь понимаются *обобщенные символы Кронекера* [2, 5, 6]. Эти величины удовлетворяют следующим соотношениям

$$\delta_{AB} = \delta_{BA}, \quad f_A \delta_{AB} = f_B, \tag{10}$$

характерным для обычных символов Кронекера. Отличие от последних заключается в том, что индексы A, B, C ... представляют собой некоторые комбинации четырехзначных индексов i, k, l ... и символ δ_{AB} выражается через обычные символы Кронекера так, чтобы выполнялись условия (10). В нашем случае символы δ_{AB} имеют следующие значения [1, 5]

$$\delta_{l(ik),p(mn)} = \delta_{lp}\delta_{(ik),(mn)}, \qquad \delta_{(ik),l(mn)} = \delta_{l(mn),(ik)} = 0,$$

$$\delta_{(ik),(mn)} = \tfrac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{kn} + \delta_{in}\delta_{km}). \tag{11}$$

Во всех случаях матрицу Λ мы будем представлять в виде матричного вектора [1]

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^{(ik)} \\ \Lambda^{l(ik)} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\Lambda^{(ik)}$ и $\Lambda^{l(ik)}$ представляют собой квадратные матрицы размерности 50×50.

С помощью I, (9)—(12) для γ^j, Λ получаются следующие выражения [1]

$$\gamma^j_{\mathrm{I}} = e^{(ik),j(ik)} - e^{(ij),k(ik)} + e^{j(ik),(ik)} - 2e^{i(jk),(ik)},$$

$$\Lambda^{(ik)}_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}(e^{l(ik),n(ln)} + e^{n(ln),l(ik)} - e^{n(ik),l(kn)} - e^{l(kn),n(il)}),$$

$$\Lambda^{l(ik)}_{\mathrm{I}} = e^{(ln),n(ik)} + e^{n(ik),(ln)}. \tag{13}$$

Если ввести обозначение $\hat{P}_{\mathrm{I}} = P_j \gamma^j$, $P^2 = P_j P_j = P_j^2$, где P_j — произвольные числа или коммутирующие между собой операторы, то из (9), (11), (13) получаем [1]

$$\hat{P}^3_{\mathrm{I}}(\hat{P}^2_{\mathrm{I}} - P^2) = 0, \tag{14}$$

что совпадает с минимальным уравнением для 30-мерных матриц, описывающих частицу со спином 2 [7, 8]. Отсюда следует, что каждая из четырех матриц γ^i удовлетворяет минимальному уравнению

$$\gamma^3(\gamma^2 - 1) = 0.$$

Сравнивая между собой системы I—IV нетрудно убедиться, что

$$\Lambda^{(ik)}_{\mathrm{I}} = \Lambda^{(ik)}_{\mathrm{II}} = \Lambda^{(ik)}_{\mathrm{III}} = \Lambda^{(ik)}_{\mathrm{IV}} \quad \text{и} \quad \gamma^j_{\mathrm{II}} = \gamma^j_{\mathrm{III}} = \gamma^j_{\mathrm{IV}} = e^{(ik),j(ik)} + e^{j(ik),(ik)} - e^{(ij),k(ik)}, \tag{15}$$

$$\Lambda^{l(ik)}_{\mathrm{II}} = -\tfrac{1}{2}(e^{(in),n(lk)} + e^{n(lk),(in)} + e^{(kn),n(il)} + e^{n(il),(kn)}), \tag{16}$$

$$A_{\mathrm{III}}^{l(ik)} = \tfrac{1}{2}\left(e^{i(ln),(kn)} + e^{(kn),i(ln)} + e^{k(ln),(in)} + e^{(in),k(ln)}\right), \tag{17}$$

$$A_{\mathrm{IV}}^{l(ik)} = A_{\mathrm{III}}^{l(ik)} - \tfrac{1}{2}\left(e^{(ik),n(ln)} + e^{n(ln),(ik)}\right). \tag{18}$$

Что же касается операторов $\hat{P}_{\mathrm{II}} = P_j\gamma^j_{\mathrm{II}} = \hat{P}_{\mathrm{III}} = \hat{P}_{\mathrm{IV}}$ (см. (15)), то они удовлетворяют минимальному уравнению

$$\hat{P}^3(\hat{P}^2 - \tfrac{1}{2}P^2)(\hat{P}^2 - P^2) = 0, \tag{19}$$

откуда следует для матриц γ^j ; $\gamma^3(\gamma^2 - \frac{1}{2})(\gamma^2 - 1) = 0$.

Заметим, что система II получается из I путем умножения на матрицу A:

$$A = e^{(ik),(ik)} - e^{l(ik),i(lk)}, \qquad A^{-1} = 1 - 2e^{l(ik),i(lk)}. \tag{20}$$

Здесь $1 = e^{(ik),(ik)} + e^{l(ik),l(ik)}$ означает единичную матрицу во всем 50-мерном пространстве. Соответственно справедливы соотношения

$$\gamma^j_{\mathrm{II}} = A\gamma^j_{\mathrm{I}}, \qquad A_{\mathrm{II}}^{(ik)} = AA_{\mathrm{I}}^{(ik)} = A_{\mathrm{I}}^{(ik)}, \qquad A_{\mathrm{II}}^{l(ik)} = AA_{\mathrm{I}}^{l(ik)}.$$

Рассмотрим вопрос о получении уравнений вида (1), (2) с помощью лагранжева формализма. Если исходить из обычного выражения для действия

$$S = \int L(dx), \qquad (dx) = dx^1dx^2dx^3dx^4, \tag{21}$$

то согласно [2] лагранжиан уравнений вида (1), (2) можно записать в следующей форме

$$L = C\Psi Q(\tfrac{1}{2}\gamma^j\partial_j + \tfrac{1}{3}A\Psi)\Psi. \tag{22}$$

Здесь C — константа, Q — квадратная матрица, которая должна обладать следующими свойствами ($\sim$ знак транспозиции):

$$Q\gamma^j = \beta^j = -\tilde{\beta}^j, \qquad Q_{AD}A_{DBC} = Q_{BD}A_{DAC} = M_{ABC}, \qquad |Q| \neq 0. \tag{23}$$

Иными словами матрицы $\beta^j = Q\gamma^j$ должны быть антисимметричными, а матрица $M = QA$ — симметричной по всем трем индексам. Рассмотрение уравнений I—III показывает, что для них не существует матрицы Q, удовлетворяющей условиям (23). В то же время для системы IV матрица Q (23) имеет следующий вид

$$Q = 1 - 2e^{l(ik),l(ik)} + e^{l(il),k(ik)}, \qquad Q^{-1} = Q - \tfrac{1}{3}e^{l(il),k(ik)}. \tag{24}$$

При этом для матриц β^j и $M = \begin{pmatrix} M^{(ik)} \\ M^{l(ik)} \end{pmatrix}$ получаем: $M^{(ik)} = A_{\mathrm{IV}}^{(ik)}$,

$$\beta^j = e^{(ik),j(ik)} - e^{j(ik),(ik)} + e^{k(ik),(ij)} - e^{(ij),k(ik)}, \tag{25}$$

$$M^{l(ik)} = -A_{\mathrm{IV}}^{l(ik)} + \tfrac{1}{2}\left(\delta_{il}A_{\mathrm{IV}}^{n(kn)} + \delta_{kl}A_{\mathrm{IV}}^{n(in)}\right). \tag{26}$$

Таким образом мы убеждаемся на данном примере, что для уравнений вида (1) возможна такая ситуация, когда из двух (или более) эквивалентных между собой систем, получающихся друг из друга путем нелинейных преобразований компонент функции, одна система может быть получена из лагранжиана вида

(22), а другие нет. В частности, из четырех разновидностей уравнений поля I—IV лишь последняя система допускает в нашем формализме лагранжеву формулировку. Таким образом выбор в качестве компонент функции Ψ величин $\mathring{g}^{ik}$, как уже отмечалось выше, обладает определенными преимуществами. Этот наш вывод полностью согласуется с [4] § 67, где преимущества выбора переменных $\mathring{g}^{ik}$ были обоснованы рядом соображений совершенно иного характера.

Обозначая $\hat{P} = P_j\beta^j$, находим для этого оператора минимальное уравнение

$$\hat{P}(\hat{P}^2+P^2)(\hat{P}^2+\tfrac{3}{2}P^2)(\hat{P}^2+\tfrac{5}{4}P^2) = 0, \tag{27}$$

откуда следует

$$\beta(\beta^2+1)(\beta^2+\tfrac{3}{2})(\beta^2+\tfrac{5}{4}) = 0, \tag{28}$$

где β — любая из матриц β^j.

Лагранжиан (22), используя (23), можно написать в виде

$$L = C(\tfrac{1}{2}\,\Psi\beta^j\partial_j\Psi+\tfrac{1}{3}\,\Psi M\Psi\Psi). \tag{29}$$

Очевидно из этого лагранжиана в результате варьирования следует система уравнений

V. $$\beta^j\partial_j\Psi+M\Psi\Psi = 0, \tag{30}$$

которая получается из IV (8) умножением на матрицу Q (24).

Исходя из инвариантности лагранжиана (29) по отношению к трансляциям координат на основании теоремы Нетер (см. напр. [9]) обычным образом получаем аналогично [10]

$$\partial_k t_n^k = 0, \tag{31}$$

где

$$t_n^k = C\,\tfrac{1}{2}\,\Psi\beta^k\partial_n\Psi-\delta_n^k L. \tag{32}$$

Очевидно соотношение (31) можно рассматривать как закон сохранения энергии--импульса гравитационного поля, причем t_n^k является соответствующим псевдотензором.

Из уравнений поля (30) следует

$$\Psi\beta^j\partial_j\Psi+\Psi M\Psi\Psi = 0, \tag{33}$$

поэтому в L в формуле (32) можно исключить любой из двух членов, входящих в последнее соотношение. В результате получаем еще два выражения для псевдотензора энергии-импульса

$$t_n^k = C(\tfrac{1}{2}\,\Psi\beta^k\partial_n\Psi+\tfrac{1}{6}\,\Psi M\Psi\Psi\delta_n^k), \tag{34}$$

$$t_n^k = C\,\tfrac{1}{2}\,\Psi(\beta^k\partial_n-\tfrac{1}{3}\,\beta^j\partial_j\delta_n^k)\Psi. \tag{35}$$

Таким образом, используя уравнения поля, величины t_n^k можно выразить билинейно через функцию Ψ, как в линейных теориях поля.

С помощью (25), (26), (18), (17), используя значения компонент функции Ψ (8), получаем

$$\Psi\beta^j\partial_n\Psi = \overset{\circ}{g}{}^{ik}\partial_n\Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ik}\partial_n\overset{\circ}{g}{}^{ik} + \Gamma^k_{ik}\partial_n\overset{\circ}{g}{}^{ij} - \overset{\circ}{g}{}^{ij}\partial_n\Gamma^k_{ik}, \tag{36}$$

$$\Psi\beta^j\partial_j\Psi = 2\overset{\circ}{g}{}^{ik}(\partial_j\Gamma^j_{ik} - \partial_k\Gamma^j_{ij}) + \partial_j(\overset{\circ}{g}{}^{ij}\Gamma^k_{ik} - \overset{\circ}{g}{}^{ik}\Gamma^j_{ik}), \tag{37}$$

$$\Psi M\Psi\Psi = 3\overset{\circ}{g}{}^{ik}(\Gamma^l_{ik}\Gamma^n_{ln} - \Gamma^l_{nk}\Gamma^n_{li}). \tag{38}$$

На основании этих соотношений получаем для лагранжиана (29) выражение

$$L = \sqrt{-g}\,R + \partial_j F^j. \tag{39}$$

Здесь $R = g^{ik}R_{ik}$ — скалярная кривизна и

$$F^j = \tfrac{1}{2}(\overset{\circ}{g}{}^{ij}\Gamma^k_{ik} - \overset{\circ}{g}{}^{ik}\Gamma^j_{ik}) = \Psi\alpha^j\Psi, \tag{40}$$

причем $\alpha^j = \frac{1}{4}(e^{(ij),k(ik)} + e^{k(ik),(ij)} - e^{(ik),j(ik)} - e^{j(ik),(ik)})$.

Таким образом, лагранжиан L (39) отличается от известного выражения $\sqrt{-g}\,R$ (см. напр. [4]) лишь членом $\delta_j F^j$, имеющим характер дивергенции и поэтому не влияющим на вид уравнений поля.

Сравним полученные здесь выражения для t^k_n с другими известными выражениями. Эйнштейн (см. [11]) получил псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля в следующем виде

$$t^k_n = -\frac{c^4}{16\pi\gamma}[(\Gamma^l_{il}\partial_n\overset{\circ}{g}{}^{ik} - \Gamma^k_{il}\partial_n\overset{\circ}{g}{}^{il}) - \delta^k_n\overset{\circ}{g}{}^{il}(\Gamma^m_{ij}\Gamma^j_{ml} - \Gamma^j_{il}\Gamma^m_{jm})]. \tag{41}$$

С другой стороны, используя лагранжиан $L_R = -\dfrac{c^4}{16\pi\gamma}\sqrt{-g}\,R$, можно представить псевдотензор энергии-импульса в виде (см. [12, 13])

$$t^k_n = \frac{\partial L_R}{\partial\Gamma^i_{lm,k}}\Gamma^i_{lm,n} - \delta^k_n L_R = -\frac{c^4}{16\pi\gamma}[(\overset{\circ}{g}{}^{il}\partial_n\Gamma^k_{il} - \overset{\circ}{g}{}^{ik}\partial_n\Gamma^l_{il}) - \delta^k_n\sqrt{-g}\,R]. \tag{42}$$

У нас из выражения (32) с учетом (36)—(38) при $C = -\dfrac{c^4}{16\pi\gamma}$ получается следующий псевдотензор

$$t^k_n = -\frac{c^4}{16\pi\gamma}[\tfrac{1}{2}(\Gamma^l_{il}\partial_n\overset{\circ}{g}{}^{ik} - \Gamma^k_{il}\partial_n\overset{\circ}{g}{}^{il}) + \tfrac{1}{2}(\overset{\circ}{g}{}^{il}\partial_n\Gamma^k_{il} - \overset{\circ}{g}{}^{ik}\partial_n\Gamma^l_{il})] - \delta^k_n L.$$

Нетрудно убедиться, что этот псевдотензор равен полусумме псевдотензоров (41) и (42).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. И. Федоров, *ДАН СССР* **179**, 802 (1968).
[2] Ф. И. Федоров, В. И. Кувшинов, *Изв. АН БССР, сер. ф.—м.* **5**, 69 (1970).
[3] A. Palatini, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **43**, 203 (1919).
[4] В. А. Фок, *Теория пространства, времени и тяготения*, Москва 1961.

[5] А. А. Богуш, Ф. И. Федоров, *Докл. АН БССР* **12**, 21 (1968).
[6] А. А. Богуш, Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров, *Изв. АН БССР, сер. ф.—м.* **1**, 74 (1968).
[7] Ф. И. Федоров, *Уч. зап. Бел. гос. ун-та* **12**, 156 (1951).
[8] Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров, *Докл. АН БССР* **11**, 681 (1967).
[9] А. А. Богуш, Л. Г. Мороз, *Введение в теорию классических полей,* Минск 1968.
[10] В. И. Кувшинов, Ф. И. Федоров, *Изв. АН БССР, сер. ф.—м.* **1**, 83 (1071).
[11] А. Эйнштейн, *Сборник научных трудов*, т. I, Москва 1967.
[12] C. Møller, *Ann. Phys.* (USA) **4**, 347 (1958).
[13] Н. В. Мицкевич, *Ann. Phys.* (Germany) **1**, 319 (1958).