DIRAC MATRIZEN IN GEKRÜMMTEN RÄUMEN

DIRAC MATRICES IN CURVED SPACES

VON R. COLLIER

Sektion Physik der Universität Jena*

(Eingegangen am 18. Mai 1974)

Will man Quantentheorie in gekrümmten Räumen treiben, so braucht man Lösungen der Gleichung $[\gamma_\mu,\gamma_\nu]^+ = 2g_{\mu\nu}$. Für ein beliebiges vorgebbares metrisches Tensorfeld werden eine hochdimensionale Lösung sowie eine allgemeinkovariante Tetradenlösung obiger Vertauschungsregeln angegeben.

1. Einleitung

Ausgangspunkt jeder Ein-Teilchen-Quantentheorie in gekrümmten Räumen (oder in krummlinigen Koordinaten) ist die allgemein-kovariante Dirac-Gleichung[1]

$$\gamma^\mu \Psi_{\|\mu} + \frac{m_0 c}{\hbar}\Psi = 0 \tag{1}$$

oder

$$\gamma^\mu(\Psi_{|\mu} + A_\mu \Psi) + \frac{m_0 c}{\hbar} = 0. \tag{2}$$

Hierin sind: Ψ — Bispinor, A_μ — Bispinoraffinität, γ_μ — metrische Bispintensoren (Dirac-Matrizen).

Die γ^μ müssen den Vertauschungsregeln (VR)

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \tag{3}$$

genügen.

Will man für eine vorgegebene Metrik $g_{\mu\nu}$ eine in sich konsistente Ein-Teilchen-Quantentheorie konstruieren, so wird man zunächst auf die Ermittlung der γ^μ-Matrizen

* Adresse: Sektion Physik der Universität Jena, DDR — 69 Jena, Max-Wien-Platz 1.

[1] Kleine griechische Indizees laufen von 1 bis 4, kleine lateinische Indizees von 1 bis 3, große griechische Indizees sollen von 1 bis 16 laufen. Über zwei ko- und kontravariant stehende gleiche Indizees wird summiert!

nach (3) geführt. Erst wenn man eine Lösung dieser Gleichung gefunden hat, kann man die Bispinoraffinitäten $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu(\gamma_\mu, \gamma_{\varrho|\mu})$ berechnen und eine günstige Aufspaltung, eine Reduktion oder eine Entwicklung nach $1/c$ (Übergang zur Pauli-Gleichung) an der Dirac-Gleichung vornehmen!

Wir geben daher im folgenden zwei grundsätzlich verschiedene Lösungen der VR (3) an.

2. *Eine hochdimensionale Darstellung der γ^μ*

Die physikalischen Aussagen der Dirac-Gleichung werden von der Dimension der Darstellung der γ^μ nicht berührt. Dies ist klar, da es beim Rechnen mit den γ^μ letzten Endes nur auf die Erfüllung der Definitionsgleichung (3) der γ^μ ankommt. Alle Aussagen über Eigenwerte von Operatoren, die aus γ^μ-Matrizen aufgebaut sind, können im Prinzip immer über die Rechenregeln (3) gewonnen werden.

Wir stellen die Forderung, daß die gesuchten Darstellungen der γ^μ möglichst „einfache" Funktionen der Metrik $g_{\mu\nu}$ sein sollen.

Als Vorbild verwenden wir etwa die Darstellungen der γ^μ in orthogonalen Koordinaten

$$\gamma_\mu = \sqrt{g_{\mu\mu}}\,\gamma_{(\mu)}. \tag{4}$$

Dabei sind die $\gamma_{(\mu)}$, die für den flachen Raum zutreffenden Dirac-Matrizen

$$\gamma_{(\mu)}\gamma_{(\nu)}+\gamma_{(\nu)}\gamma_{(\mu)} = 2\eta_{(\mu)(\nu)}, \tag{5}$$

$$\eta_{(\mu)(\nu)} = \operatorname{diag}(+1,\ +1,\ +1,\ -1). \tag{6}$$

Für ein beliebiges Tensorfeld $g_{\mu\nu}$ machen wir den Ansatz

$$\gamma_\mu = \sum_\alpha \sqrt{g_{\mu\alpha}}\,\gamma_{\mu\alpha}. \tag{7}$$

Dies hat mit (3) für die in (7) auftretenden konstanten $\gamma_{\mu\alpha}$ ($\gamma_{\mu\alpha|\varrho} = 0$) die Vertauschungsregeln

$$\gamma_{\mu\alpha}\gamma_{\nu\beta}+\gamma_{\nu\beta}\gamma_{\mu\alpha} = 2\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} \tag{8}$$

zur Folge. Da $\gamma_{\mu\alpha} \neq \gamma_{\alpha\mu}$ ist, also $\Omega = 16$ Matrizen $\gamma_{\mu\alpha}$ benötigt werden, stecken in (8) $\frac{1}{2}\Omega(\Omega+1) = 136$ Gleichungen, in denen die Metrik $g_{\mu\nu}$ nicht mehr auftritt.

Die Gleichungen (8) werden durch folgende Ansätze befriedigt ($A, B = 1, \ldots, 16$)

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}(\Gamma_A - i\Gamma_B), \qquad && \mu < \nu,\\
\gamma_{\mu\nu} &= \Gamma_\mu, && \mu = \nu,\\
\gamma_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2}(\Gamma_A + i\Gamma_B), && \mu > \nu.
\end{aligned} \tag{9}$$

Dabei müssen die 16 Matrizen Γ_Ω den einfachen VR

$$\Gamma_\Omega\Gamma_\Sigma+\Gamma_\Sigma\Gamma_\Omega = 2\delta_{\Omega\Sigma} \tag{10}$$

genügen. 16 Größen Γ_Ω, die Gleichung (10) erfüllen, können aber aus 4 Matrizen, die der

Gleichung

$$\mathring{\gamma}_\mu \mathring{\gamma}_\nu + \mathring{\gamma}_\nu \mathring{\gamma}_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{11}$$

gehorchen, mit Hilfe von Kronecker-Produkten zwischen den $\mathring{\gamma}_\nu$ aufgebaut werden

$$\Gamma_A = I \otimes I \otimes I \otimes \mathring{\gamma}_\mu, \quad A = \mu,$$

$$\Gamma_B = I \otimes I \otimes \mathring{\gamma}_\mu \otimes \mathring{\gamma}, \quad B = 4+\mu,$$

$$\Gamma_C = I \otimes \mathring{\gamma}_\mu \otimes \mathring{\gamma} \otimes \mathring{\gamma}, \quad C = 8+\mu,$$

$$\Gamma_D = \mathring{\gamma}_\mu \otimes \mathring{\gamma} \otimes \mathring{\gamma} \otimes \mathring{\gamma}, \quad D = 12+\mu. \tag{12}$$

Dabei ist $\mathring{\gamma} = \mathring{\gamma}_1 \cdot \mathring{\gamma}_2 \cdot \mathring{\gamma}_3 \cdot \mathring{\gamma}_4$ mit

$$\mathring{\gamma}_\nu \mathring{\gamma} + \mathring{\gamma} \mathring{\gamma}_\nu = 0 \tag{13}$$

und I die vierdimensionale Einheitsmatrix!

Da 4 konstante Matrizen, die (11) befriedigen, sofort angegeben werden können, prüft man mit Hilfe der wichtigen Rechenregeln für Kronecker-Produkte von Matrizen A, B, C, D (siehe etwa [1])

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C) \otimes (B \cdot D) \tag{14}$$

sofort das Erfülltsein von (10) nach!

Die Darstellung (12) der Γ_Ω in (9) eingesetzt ergibt für die im ursprünglichen Ansatz (7) auftretenden $\gamma_{\mu\alpha}$ folgende Form

$$\gamma_{\mu\mu} = I \otimes I \otimes I \otimes \mathring{\gamma}_\mu \qquad \text{für } \mu = \nu,$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= I \otimes I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathring{\gamma}_\mu - i\mathring{\gamma}_\nu) \otimes \mathring{\gamma}, \ (\mu, \nu) = (1, 2), (3, 4) \\ \gamma_{\mu\nu} &= I \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathring{\gamma}_\mu - i\mathring{\gamma}_\nu) \otimes \mathring{\gamma} \otimes \mathring{\gamma}, \ (\mu, \nu) = (1, 3), (2, 4) \\ \gamma_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathring{\gamma}_\mu - i\mathring{\gamma}_\nu) \otimes \mathring{\gamma} \otimes \mathring{\gamma} \otimes \mathring{\gamma}, \ (\mu, \nu) = (1, 4), (2, 3) \end{aligned}\right\} \text{für } \mu < \nu. \tag{15}$$

Für $\mu > \nu$ ist in (15) $-i$ durch $+i$ zu ersetzen!

Zum Schluß dieses Abschnittes noch einige Bemerkungen:
Eine Algebra von $M\Gamma_\Omega$-Größen, die (10) genügen soll, besteht aus 2^M linear unabhängigen Grundelementen (Erzeugende dieser 2^M-dimensionalen Clifford-Algebra):

$$1, \Gamma_{\Omega_1}, \Gamma_{\Omega_1}\Gamma_{\Omega_2}, \ldots, \Gamma_{\Omega_1}\Gamma_{\Omega_2} \ldots \Gamma_{\Omega_M}; \quad \Omega_1 < \Omega_2 < \ldots < \Omega_M.$$

Da bei uns $M = 16$ Γ_Ω-Matrizen auftreten, muß die Dimension D der Darstellung der

Γ_Ω-Matrizen mindestens $D = \sqrt{2^M} = 2^8$ sein, wie man an der konkreten Darstellung (12) der Γ_Ω auch direkt sieht.

Wählt man $\overset{\circ}{\gamma}_\mu$-Darstellungen, für die Spur $(\overset{\circ}{\gamma}_\mu) = 0$ und $\overset{\circ}{\gamma}{}_\mu^+ = \gamma_\mu$ gilt (was immer möglich ist!), so zeigt man ohne Schwierigkeiten, daß

1. die Γ_Ω-Darstellungen (12) irreduzibel sind (und da dimensionsmäßig kleinere Darstellungen nicht möglich sind, sind die Darstellungen (12) auch zugleich die dimensionsmäßig kleinsten irreduziblen Darstellungen der Γ_Ω-Algebra)
2. alle 2^{16} Grundelemente der Γ_Ω-Algebra linear unabhängig sind
3. $\Gamma_\Omega^+ = \Gamma_\Omega$ und daher $\gamma_{\mu\nu}^+ = \gamma_{\mu\nu}$ gilt.

Trotz der Tatsache, daß die Γ_Ω-Darstellungen (12) irreduzibel sind, sind es die additiv aus ihnen nach Formel (7) aufgebauten γ_μ natürlich nicht!

Allerdings zeigt man mit Hilfe des auf unsere Γ_Ω-Algebra verallgemeinderten Pauli-Theorems, daß immer eine Äquivalenztransformation der Art

$$\tilde{\gamma}^\mu = C\gamma^\mu C^{-1} \tag{16}$$

existiert, so daß die $\tilde{\gamma}^\mu$ eine Vierer-Quasidiagonalform annehmen.

Die Berechnung der Bispinoraffinitäten Λ_ν erfolgt mit unseren γ^μ-Darstellungen (7) unter Ausnutzung von (8) ohne weitere Schwierigkeiten etwa nach Kramer [2]. Da die γ^μ aber in Vierer-Quasidiagonalform überführbar sind, sind es die Bispinoraffinitäten Λ_μ durch

$$\tilde{\Lambda}_\mu = C\Lambda_\mu C^{-1} - C_{|\mu} C^{-1}$$

ebenfalls, womit der Anschluß an die übliche Dirac-Theorie, die allein mit 4-dimensionalen γ^μ-Darstellungen arbeitet, vollzogen ist.

Rechnungen mit unseren hochdimensionalen γ^μ-Darstellungen (7) und daran anknüpfend der Umgang mit Kronecker-Produkten in der Dirac-Gleichung sollen jedoch einer anderen Arbeit vorbehalten bleiben.

3. Eine Tetradendarstellung der γ^μ

Um bei beliebig vorgegebener Metrik $g_{\mu\nu}$ eine Lösung von (3) zu erhalten, setzen wir an

$$\gamma_\mu = \lambda_\mu^{(\varrho)} \gamma_{(\varrho)}, \tag{17}$$

wobei die $\gamma_{(\varrho)}$ der VR (5) genügen sollen und die 16 $\lambda_\mu^{(\varrho)}$ Funktionen von $g_{\mu\nu}$ allein sind. Mit (17) und (3) unter Berücksichtigung von (5) ergeben sich für die $\lambda_\mu^{(\varrho)}$ die Bestimmungsgleichungen

$$\lambda_\mu^{(\varrho)} \lambda_\nu^{(\sigma)} \eta_{(\varrho)(\sigma)} = g_{\mu\nu}. \tag{18}$$

Wegen der Symmetrie von $g_{\mu\nu}$ sind dies 10 nichtlineare Gleichungen für die 16 Größen $\lambda_\mu^{(\varrho)}$. Es werden daher in unseren Lösungen irgendwelche $6\lambda_\mu^{(\varrho)}$ als freie Parameter erscheinen. Unterscheiden wir diese 6 freien $\lambda_\mu^{(\sigma)}$ von den als Unbekannte gesetzten 10 $\lambda_\mu^{(\varrho)}$ vorübergehend durch folgende Abkürzungen

$$\lambda_\nu^{(\sigma)} = a_{\nu\sigma}, \quad (\sigma) < \nu,$$
$$\lambda_\nu^{(\sigma)} = x_{\nu\sigma}, \quad (\sigma) \geqq \nu \tag{19}$$

und setzen wir noch

$$G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \sum_{\sigma<\nu} a_{\mu\sigma} a_{\nu\sigma}, \quad \mu \lesseqgtr \nu \tag{20}$$

dann zerfällt das nichtlineare Gleichungssystem (18) in folgende 4 Gruppen von gekoppelten nichtlinearen Gleichungssystemen

$$\left.\begin{aligned} x_{11}^2 + \quad x_{12}^2 + \quad x_{13}^2 - \quad x_{14}^2 &= G_{11} \\ a_{21}x_{11} + x_{22}x_{12} + x_{23}x_{13} - x_{24}x_{14} &= G_{12} \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{12} + x_{33}x_{13} - x_{34}x_{14} &= G_{13} \\ a_{41}x_{11} + a_{42}x_{12} + a_{43}x_{13} - x_{44}x_{14} &= G_{14} \end{aligned}\right\} \text{1. Gruppe} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{22}^2 + \quad x_{23}^2 - \quad x_{24}^2 &= G_{22} \\ a_{32}x_{22} + x_{33}x_{23} - x_{34}x_{24} &= G_{23} \\ a_{42}x_{22} + a_{43}x_{23} - x_{44}x_{24} &= G_{24} \end{aligned}\right\} \text{2. Gruppe} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{33}^2 - \quad x_{34}^2 &= G_{33} \\ a_{43}x_{33} - x_{44}x_{34} &= G_{34} \end{aligned}\right\} \text{3. Gruppe} \tag{23}$$

$$- \quad x_{44}^2 = G_{44} \quad \text{4. Gruppe} \tag{24}$$

welche sich nach einem einfachen Algorithmus sukzessiv auf lösenlassen. Die Gleichungen der μ-ten Gruppe sind nämlich lösbar, sobald die Lösungen der $(\mu+1)$-ten Gruppe bekannt sind. Da die Lösung der 4. Gruppe (24) aber sofort angebbar ist, kann man das gesamte Gleichungssystem (21)–(24) allein durch Wurzelziehen exakt bewältigen! Wir wollen die Gesamtlösung wegen ihrer Kompliziertheit hier nicht aufschreiben, sondern das Verfahren an dem Spezialfall verschwindender Parametertetraden, also unter den Bedingungen

$$\lambda_\nu^{(\sigma)} = a_{\nu\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad (\sigma) < \nu \tag{25}$$

testen. In diesem Fall lassen sich die Lösungen in der Form

$$\lambda_\nu^{(\sigma)} = \begin{cases} 0 & \text{für } (\sigma) < \nu, \\ \dfrac{\overset{(\sigma)}{h}{}_\nu^{(\sigma)}}{\sqrt{\overset{(\sigma)}{h}{}_\sigma^{(\sigma)}}} & \text{für } (\sigma) \geqq \nu \end{cases} \tag{26}$$

aufschreiben, wobei sich die $\overset{(\alpha)}{h}_{\mu(\nu)}$ mit $\overset{(4)}{h}_{\mu(\nu)} = g_{\mu\nu}$ nach folgender Rekursionsformel berechnen

$$\overset{(\alpha-1)}{h}_{\mu(\nu)} = \overset{(\alpha)}{h}_{\mu(\nu)} - \frac{\overset{(\alpha)}{h}_{\mu(\alpha)}\overset{(\alpha)}{h}_{\nu(\alpha)}}{\overset{(\alpha)}{h}_{\alpha(\alpha)}}. \tag{27}$$

Wir geben noch die nach (26) und (27) errechneten Tetradenlösungen $\lambda_\mu^{(\nu)}$ und $\lambda^\mu_{(\nu)}$ explizit an (über ν und (ν) unter der Wurzel wird nicht summiert!)

$$\lambda_\mu^{(\nu)} = + \frac{H_\mu^{(\nu)}}{\sqrt{H_{\nu(\nu)}H^{\nu(\nu)}}}. \tag{28}$$

Dabei haben die $H_{\mu(\nu)}$ und $H^{\mu(\nu)}$ folgende Gestalt (μ Zeilen- und (ν) Spaltenindex in diesen Matrizen)

$$H_{\mu(\nu)} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} g_{11}g_{12}g_{13}g_{14} \\ g_{21}g_{22}g_{23}g_{24} \\ g_{31}g_{32}g_{33}g_{34} \\ g_{41}g_{42}g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g_{12}g_{13}g_{14} \\ g_{32}g_{33}g_{34} \\ g_{42}g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g_{13}g_{14} \\ g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & g_{14} \\ 0 & \begin{vmatrix} g_{22}g_{23}g_{24} \\ g_{32}g_{33}g_{34} \\ g_{42}g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g_{23}g_{24} \\ g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & g_{24} \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} g_{33}g_{34} \\ g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & g_{34} \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$H^{\mu(\nu)} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} g_{22}g_{23}g_{24} \\ g_{32}g_{33}g_{34} \\ g_{42}g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ -\begin{vmatrix} g_{12}g_{13}g_{14} \\ g_{32}g_{33}g_{34} \\ g_{42}g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} g_{33}g_{34} \\ g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & 0 & 0 \\ +\begin{vmatrix} g_{12}g_{13}g_{14} \\ g_{22}g_{23}g_{24} \\ g_{42}g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} g_{24}g_{24} \\ g_{43}g_{44} \end{vmatrix} & +g_{34} & 0 \\ -\begin{vmatrix} g_{12}g_{13}g_{14} \\ g_{22}g_{23}g_{24} \\ g_{32}g_{33}g_{34} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} g_{23}g_{24} \\ g_{33}g_{34} \end{vmatrix} & -g_{34} & +(-1) \end{bmatrix} \tag{30}$$

Eine Lösung der Gleichung (18) im Parameter-Nullfall gibt auch Namysłowski [3] an. Seine Lösung geht in unsere Lösung (28) für die $\lambda^\mu_{(\nu)}$ über, wenn man in [3] überall die Indexvertauschungen $1 \leftrightarrow 4$ und $2 \leftrightarrow 3$ vornimmt sowie die Wahl der Signatur $S = -2$ im Gegensatz zu unseren $S = +2$-Rechnungen beachtet.

Wir bemerken noch, daß die Tetradenlösungen des Gleichungskomplexes (21)–(24) allgemein kovariant sind, da in ihnen alle $16\lambda_{\varrho}^{(\sigma)}$ ohne irgendwelche Einschränkungen vorkommen. Die Lösungen (26) bzw. ihre explizite Form (28) hingegen sind wegen der nichtkovarianten Zusatzbedingungen (24) insgesamt nicht kovariant.

Zum Schluß geben wir noch zwei Beispiele an. Wir wollen die Dirac-Matrizen γ_μ für die folgenden Metriken berechnen

Fall a: $$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + 2\,\frac{\omega}{c}\,(x^2dx^1 - x^1dx^2)dx^4. \tag{31}$$

Fall b: $$ds^2 = \sum_\mu g_{\mu\mu}dx^\mu dx^\mu + 2g_{34}dx^3dx^4. \tag{32}$$

Fall a) entspricht einer Metrik, wie sie in einem rotierenden Bezugssystem herrscht, falls man überall die Bedingung $|\vec{\omega}\times\vec{r}| \ll c$ oder $g_{14}^2 \approx g_{24}^2 \approx g_{14}\cdot g_{24} \ll 1$ berücksichtigt.

Rechnen wir mit (31) unter Beachtung obiger Nährungen unsere $\lambda_\mu^{(\nu)}$ nach (28), (29) und (30) aus und setzen in (17) ein, so erscheint bei Verwendung der Abkürzung

$$g_{(a)} = \frac{g_{4a}}{\sqrt{-g_{44}}} = g_{a4}, \tag{33}$$

das Resultat

$$\begin{aligned}\gamma_a &= \gamma_{(a)} - g_{(a)}\gamma_{(4)}, \quad \gamma^a = \gamma^{(a)},\\ \gamma_4 &= \gamma_{(4)}, \quad \gamma^4 = \gamma^{(4)} + g_{(a)}\gamma^{(a)}.\end{aligned} \tag{34}$$

Die γ_μ wurden für diesen Fall bereits von Schmutzer [4] elementar konstruiert und stimmen mit unserem Ergebnis überein.

Fall b) entspricht der Kerr-Metrik, wie sie Ernst [5] verwendet. Für die γ_μ erscheint nach (28) und (17) dann

$$\gamma_1 = \sqrt{g_{11}}\,\gamma_{(1)}; \quad \gamma^1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\gamma^{(1)},$$

$$\gamma_2 = \sqrt{g_{22}}\,\gamma_{(2)}; \quad \gamma^2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\gamma^{(2)},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}\{\sqrt{g_{34}^2 - g_{33}g_{44}}\,\gamma_{(3)} - g_{34}\gamma_{(4)}\}; \quad \gamma^3 = \frac{\sqrt{-g_{44}}}{\sqrt{g_{34}^2 - g_{33}g_{44}}}\gamma^{(3)},$$

$$\gamma_4 = \sqrt{-g_{44}}\,\gamma_{(4)}; \quad \gamma^4 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}\left\{\gamma^{(4)} + \frac{g_{34}}{\sqrt{g_{34}^2 - g_{33}g_{44}}}\gamma^{(3)}\right\}. \tag{35}$$

Weitere Beispiele einer elementaren γ_μ-Bestimmung bei einfachen, fest vorgegebenen speziellen Metriken findet man u.a. noch bei Mitskievic [6] und Papapetrou [7]. Durch unsere allgemeinen Tetradenlösungen (21) oder (28) im Verein mit (17) lassen sie sich jedoch alle rasch verifizieren!

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. Schmutzer, *Relativistische Physik*, Leipzig 1968.
[2] D. Kramer, Diss. an der Math.-Nat. Fak., Jena 1965.
[3] J. Namysłowski, *Acta Phys. Pol.* **20**, 927 (1961).
[4] E. Schmutzer, *Ann. Phys.* (Leipzig) **29**, 75 (1973).
[5] F. Ernst, *Phys. Rev.* **167**, 1177 (1968).
[6] N. V. Mitskievic, *Physical Fields in General Theory of Relativity*, Moscow 1969, russ.
[7] A. Papapetrou, *Ann. Phys. (Leipzig)* **17**, 214 (1956).