О ВНУТРЕННИХ СИММЕТРИЯХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ABOUT INTERNAL SYMMETRIES OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD

В. И. Стражев, С. И. Круглов

Институт физики Академии наук Белорусской ССР, Минск*

(Поступила в редакцию 1 марта 1977 г.)

Internal symmetries of the two potential formulation of electrodynamics are considered. Dual and Larmor transformations of the field are shown to be rotations in the three-dimensional space of all complex linear combinations of Lorentz invariants of the field while the mixed gauge transformations of Cabibbo and Ferrari are shown to form translations in the same space.

1. Введение

Уравнения Максвелла для свободного поля

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \tag{1}$$

инвариантны, как известно, относительно следующих дуальных преобразований

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\cos\theta - \tilde{F}_{\mu\nu}\sin\theta,$$
$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\sin\theta + \tilde{F}_{\mu\nu}\cos\theta, \tag{2}$$

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$, $\varepsilon_{1234} = -i$, $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный тензор, $x_4 = it$, и используется система единиц Хевисайда-Лоренца при $c = 1$. Общее решение уравнений (1) выглядит следующим образом (см. например [1—3])

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu M_\nu - \partial_\nu M_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha N_\beta = M_{\mu\nu} - \tilde{N}_{\mu\nu},$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu N_\nu - \partial_\nu N_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha M_\beta = N_{\mu\nu} + \tilde{M}_{\mu\nu}, \tag{3}$$

где относительно пространственных отражений $\boldsymbol{M}$, φ_M векторный и скалярный потенциалы, а $\boldsymbol{N}$, φ_N — псевдовекторный и псевдоскалярный потенциалы

* Address: Institute of Physics, Lenin Avenue-70, Minsk-72, 220072, USSR.

и $M_{\mu\nu} = \partial_\mu M_\nu - \partial_\nu M_\mu$, $N_{\mu\nu} = \partial_\mu N_\nu - \partial_\nu N_\mu$. $M_{km} = \varepsilon_{kmn} H_n^M$, $M_{4k} = iE_k^M$, $N_{km} = \varepsilon_{kmn} E_n^N$, $N_{4k} = iH_k^N$, $\varepsilon_{123} = 1$.

Из определения (3) следует, что уравнения Максвелла (1) могут быть записаны в виде следующих двух систем уравнений

$$\partial_\nu M_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu \tilde{M}_{\mu\nu} = 0, \tag{4a}$$

$$\partial_\nu N_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu \tilde{N}_{\mu\nu} = 0. \tag{4b}$$

Если не вводить дополнительной связи между потенциалами M_μ и N_μ, то система уравнений (4) описывает два взаимнонезависимых безмассовых поля: векторное и псевдовекторное. Поэтому система уравнений (4) может обладать более широкой группой внутренней симметрии, чем уравнения (1).

Полевую теорию, основанную на системе уравнений (4) будем называть теорией безмассового поля максвелловского типа. Определение (3) инвариантно относительно следующих преобразований

$$M_\mu \to M'_\mu = M_\mu + M_\mu^0, \quad N_\mu \to N'_\mu = N_\mu + N_\mu^0, \tag{5}$$

где калибровочные потенциалы M_μ^0, N_μ^0 удовлетворяют условию "нулевого поля"

$$\partial_\mu M_\nu^0 - \partial_\nu M_\mu^0 - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha N_\beta^0 = 0. \tag{6}$$

Преобразования (5) были впервые введены в работе Кабиббо и Феррари [4] и получили название „смешанных градиентных" преобразований. С учетом преобразований (5) описание свободного поля на основе определения (3) не приводит к увеличению числа степеней свободы (см., например. [5—7].)

Преобразования внутренней симметрии системы уравнений (4) могут быть описаны как вращения в некотором внутреннем трехмерном (комплексном) пространстве. Координатами этого пространства служат линейные комплексные комбинации шести лоренц-инвариантных величин I_i, $i = 1, \ldots, 6$, характеризующих теорию безмассового поля максвелловского типа

$$\begin{gathered} I_1 = M_{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad I_2 = N_{\mu\nu} N_{\mu\nu}, \quad I_3 = M_{\mu\nu} \tilde{N}_{\mu\nu}, \\ I_4 = M_{\mu\nu} N_{\mu\nu}, \quad I_5 = \tilde{M}_{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad I_6 = N_{\mu\nu} \tilde{N}_{\mu\nu}. \end{gathered} \tag{7}$$

Дуальные преобразования (2) с учетом определения (3) являются частным случаем преобразований этой группы симметрии. Во введенном нами внутреннем пространстве возможно рассмотрение также группы сдвигов. Преобразования (5) отражают при этом сдвиги, оставляющие неизменными два лоренц-инварианта электромагнитного поля. Внутренняя симметрия электромагнитного поля в двухпотенциальном представлении может быть выражена через инвариантность теории относительно следующих преобразований

$$M'_\mu = M_\mu \cos\frac{\theta}{2} - N_\mu \sin\frac{\theta}{2} + M_\mu^0, \quad N'_\mu = N_\mu \sin\frac{\theta}{2} + N_\mu \cos\frac{\theta}{2} + N_\mu^0, \tag{8}$$

которые будем называть неоднородными ларморовскими преобразованиями потенциалов.

Необходимо сделать пояснение по используемой терминологии. Дуальные преобразования, согласно их исходному определению [8, 9] (см. также [6]) связывают между собой дуально сопряженные тензора (см. (2)). Ларморовскими[1] преобразованиями мы называем преобразования типа (8), которые связывают тензорные и псевдотензорные величины одинаковой тензорной валентности. Дуальные преобразования (2) являются частным случаем ларморовских, когда тензор и псевдотензор (здесь $F_{\mu\nu}$, $\tilde{F}_{\mu\nu}$) связаны между собой операцией дуального сопряжения.

2. *Спиноры и векторы в ларморовском пространстве*

Введем в рассмотрение следующие величины

$$\Psi^a_{(\mu\nu)} = \begin{pmatrix} M_{\mu\nu}+i\tilde{M}_{\mu\nu} \\ N_{\mu\nu}+i\tilde{N}_{\mu\nu} \end{pmatrix}, \qquad \Psi_{b(\mu\nu)} = (-N_{\mu\nu}-i\tilde{N}_{\mu\nu}, M_{\mu\nu}+i\tilde{M}_{\mu\nu}), \tag{9}$$

где a, b принимают значения 1, 2, так что $\Psi^1_{(\mu\nu)} = M_{\mu\nu}+i\tilde{M}_{\mu\nu}$, $\Psi^2_{(\mu\nu)} = N_{\mu\nu}+i\tilde{N}_{\mu\nu}$, $\Psi_{1(\mu\nu)} = -N_{\mu\nu}-i\tilde{N}_{\mu\nu}$, $\Psi_{2(\mu\nu)} = M_{\mu\nu}+iM_{\mu\nu}$. Связь между $\Psi^a_{(\mu\nu)}$ и $\Psi_{b(\mu\nu)}$ осуществляется с помощью следующих двух матриц

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Система уравнений (4) эквивалентна при этом уравнению

$$\sigma_0 \partial_\nu \Psi^a_{\mu\nu} = 0 \tag{11}$$

где σ_0 — единичная 2×2 матрица.

Выражение для квадратичной формы введем согласно следующему определению:

$$D^a_b = \Psi^a_{(\mu\nu)} \overline{\Psi}_{b(\mu\nu)} = 2\begin{pmatrix} -I_4-iI_3, & -I_1-iI_5 \\ I_2+iI_6, & I_4+iI_3 \end{pmatrix}. \tag{12a}$$

Выражение (12) может быть разложено по базису, составленному из матриц Паули $\boldsymbol{\sigma}$, т.е.

$$D^a_b = L_i \sigma_i, \tag{12b}$$

где

$$L_1 = -(I_1-I_2)-i(I_5-I_6), \; L_2 = -(I_5+I_6)+i(I_1+I_2), \; L_3 = -(I_4+iI_3) \tag{13}$$

Можно ввести трехмерное комплексное внутреннее пространство (назовем его ларморовским пространством), координатами которого служат линейные комплексные комбинации лоренц-инвариантных величин

$$x_1 = L_1, \quad x_2 = L_2, \quad x_3 = L_3.$$

---

[1] В работах [10] построена теория бозонного поля, инвариантная относительно дискретных преобразований, названных ларморовскими, которые связывают между собой тензорные и псевдотензорные величины, характеризующие два взаимнонезависимых бозонных поля.

В этом случае выражение $\boldsymbol{L}$ есть вектор в этом пространстве. Квадратичная форма (12) является здесь спин-тензором, поскольку обладает обычными свойствами спиноров:

$$\mathrm{Sp}\, D_b^a = 0, \qquad |D_b^a|^2 = 4[(I_4+iI_3)-(I_1+iI_5)(I_2+iI_6)]\sigma_0. \tag{14}$$

Выражения $\Psi^a_{(\mu\nu)}$ и $\overline{\Psi}_{b(\mu\nu)}$ являются здесь спинорами, выражения g_{ab}, g^{ab} — метрическими спинорами, отвечающими за поднятие и опускание спинорных индексов. Предложенное рассмотрение является обобщением на двухпотенциальный формализм подхода, предложенного Пеннеем в [11] (см. также [12]). Пенней ввел спинор (по отношению к двумерному пространству, координатами которого служили два лоренц-инварианта: $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$), компонентами которого являлись тензоры $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$. В работах [12] изучалось трехмерное действительное внутреннее пространство, в качестве координат которого были взяты три лоренц-инварианта $E_{\mu\nu}E_{\mu\nu}$, $\check{E}_{\mu\nu}\check{E}_{\mu\nu}$, $E_{\mu\nu}\check{E}_{\mu\nu}$($\check{E}_{\mu\nu} \neq \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}E_{\alpha\beta}$, в наших обозначениях $E_{\mu\nu} \equiv M_{\mu\nu}$, $\check{E}_{\mu\nu} \equiv N_{\mu\nu}$). Как это очевидно, введенные в [11, 12] варианты внутренних пространств, являются частными случаями нашего рассмотрения.

3. *Группа вращений в комплексном ларморовском пространстве*

Определим следующие линейные преобразования спиноров

$$\Psi'_{(\mu\nu)} = U\Psi_{(\mu\nu)}, \qquad \overline{\Psi}'_{(\mu\nu)} = \overline{\Psi}_{(\mu\nu)}U^+, \tag{15}$$

где U — комплексная матрица второго порядка, удовлетворяющая условию унимодулярности ($\det U = 1$) и зависящая от шести вещественных (трех комплексных) параметров. По определению эти преобразования не действуют на пространственно-временные переменные. Матрицы типа U образуют бинарную группу, изоморфную группе $SL(2,C)$.

Матрицу преобразований U можно задать следующим образом:

$$U = \exp(\boldsymbol{n\sigma}), \tag{16a}$$

где $\boldsymbol{n}$ — комплексный 3-вектор, $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули. Группа преобразований U является универсальной накрывающей группы вращений трехмерного комплексного пространства (в данном случае — ларморовского пространства). Нетрудно убедиться, что преобразования типа (15) спин-тензора (12) эквивалентны вращению вектора $\boldsymbol{L}$ (13) в этом пространстве.

Уравнение (11) инвариантно относительно преобразований этой группы. Ограничимся рассмотрением ее трехпараметрической подгруппы, соответствующей выбору чисто мнимого 3-вектора $\boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{n} = i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{k}\right)$. В этом случае

$$U = \exp\left(i\frac{\theta}{2}\boldsymbol{k\sigma}\right) = \sigma_0\cos\frac{\theta}{2} + i(\boldsymbol{k\sigma})\sin\frac{\theta}{2}, \tag{16b}$$

где $\boldsymbol{k}$ — вещественный единичный вектор ($\boldsymbol{k}^2 = 1$).

Используя явный вид преобразований (16) можно получить закон преобразований тензоров $M_{\mu\nu}$, $N_{\mu\nu}$ (а также $\tilde{M}_{\mu\nu}$, $\tilde{N}_{\mu\nu}$)

$$M'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} - \tilde{M}_{\mu\nu}k_3\sin\frac{\theta}{2} - N_{\mu\nu}k_2\sin\frac{\theta}{2} - \tilde{N}_{\mu\nu}k_1\sin\frac{\theta}{2},$$

$$N'_{\mu\nu} = N_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} + \tilde{N}_{\mu\nu}k_3\sin\frac{\theta}{2} + M_{\mu\nu}k_2\sin\frac{\theta}{2} - \tilde{M}_{\mu\nu}k_1\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (17)$$

Закон преобразования тензоров $\tilde{M}_{\mu\nu}$, $\tilde{N}_{\mu\nu}$ следует из (17) после проведения операции дуального сопряжения над тензорами в правой и левой частях (17).

Относительно преобразований (17) (и соответствующих преобразований полевых тензоров $\tilde{M}_{\mu\nu}$, $\tilde{N}_{\mu\nu}$) инвариантна система уравнений (4), а также следующее выражение для тензора энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}(M_{\mu\alpha}M_{\alpha\nu} + \tilde{M}_{\mu\alpha}\tilde{M}_{\alpha\nu} + N_{\mu\alpha}N_{\alpha\nu} + \tilde{N}_{\mu\alpha}\tilde{N}_{\alpha\nu}). \qquad (18)$$

Тензор (18) соответствует сумме тензоров энергии-импульса, соответствующих полям $M_{\mu\nu}$ и $N_{\mu\nu}$.

Рассмотрим частные случаи преобразований (17), которые будем называть обобщенными ларморовскими преобразованиями безмассового поля максвелловского типа:

(1) если $k_1 = k_3 = 0$, $k_2 = 1$, то

$$M'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} - N_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad N'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2} + N_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2}. \qquad (19)$$

(2) если $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$, то

$$M'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} - \tilde{M}_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad N'_{\mu\nu} = N_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} + \tilde{N}_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (20)$$

(3) если $k_2 = k_3 = 0$, $k_1 = 1$, то

$$M'_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} - \tilde{N}_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad N'_{\mu\nu} = N_{\mu\nu}\cos\frac{\theta}{2} - \tilde{M}_{\mu\nu}\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (21)$$

Дуальные преобразования (20) отражают внутреннюю симметрию поляризационного пространства полей $\boldsymbol{E}^M$, $\boldsymbol{H}^M$ и $\boldsymbol{E}^N$, $\boldsymbol{H}^N$, ларморовские преобразования (19) индуцируются увеличением числа степеней свободы при описании электромагнитного поля.

Из определения (3) следует, что ларморовские преобразования (19) приводят к дуальным преобразованиям (2), но с половинным углом поворота. К этому же результату приводят и преобразования (20), если рассматривать повороты тензоров $M_{\mu\nu}$, $\tilde{M}_{\mu\nu}$ и $N_{\mu\nu}$, $\tilde{N}_{\mu\nu}$ на угол, равный как по абсолютной величине, так и по знаку (одновременно добиться таких поворотов в рамках группового рассмотрения не-возможно). Преобразования (19)—(21) при $\theta = 2\pi$ реализуют в классической теории аналог операции зарядового сопряжения применительно к полевым величинам.

Преобразования (21) для системы (4) являются обобщенным выражением принципа суперпозиции. Этот вывод очевиден, если перейти к векторным обозначениям, поскольку преобразования (21) записываются при этом следующим образом: $\boldsymbol{E}^{M'} = \boldsymbol{E}^M \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{E}^N \sin\frac{\theta}{2}$, и так далее. Итак, в рамках двухпотенциального подхода к описанию электромагнитного поля дуальные преобразования (2) есть, следовательно, частный случай обобщенных ларморовских преобразований (17). К ларморовским преобразованиям (19) приводят ларморовские преобразования потенциалов M_μ, N_μ:

$$M'_\mu = M_\mu \cos\frac{\theta}{2} - N_\mu \sin\frac{\theta}{2}, \qquad N'_\mu = M_\mu \sin\frac{\theta}{2} + N_\mu \cos\frac{\theta}{2}. \tag{22}$$

Полная группа преобразований внутренней симметрии полевых уравнений (4) содержит, вообще говоря, еще и группу однопараметрических преобразований $U(1)$, которая индуцирует ларморовские преобразования полей $M_{\mu\nu}$, $N_{\mu\nu}$, но с полным углом поворота.

4. *Группа сдвигов*

Рассмотрим теперь наряду с вращениями и преобразования сдвигов в ларморовском пространстве. Ограничимся обсуждением только сдвигов, относительно которых инвариантны два лоренц-инварианта электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = I_1 - I_2 + 2I_3, \qquad F_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = I_5 - I_6 + 2I_4. \tag{23}$$

Следовательно, мы требуем, чтобы

$$I_1^0 - I_2^0 + 2I_3^0 = 0, \qquad I_5^0 - I_6^0 + 2I_4^0 = 0, \tag{24}$$

где $I_1^0 = (\partial_\mu M_\nu^0 - \partial_\nu M_\mu^0)(\partial_\mu M_\nu^0 - \partial_\nu M_\mu^0) = M_{\mu\nu}^0 M_{\mu\nu}^0$ и так далее характеризуют сдвиги в ларморовском пространстве. Условие (24) может быть удовлетворено только при установлении следующей взаимосвязи между тензорами $M_{\mu\nu}^0$, $N_{\mu\nu}^0$:

$$\partial_\mu M_\nu^0 - \partial_\nu M_\mu^0 = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha N_\beta^0. \tag{25}$$

Потенциалы M_μ^0, N_ν^0, удовлетворяющие условию (25), эквивалентны калибровочным потенциалам в преобразованиях (5). Таким образом „смешанные градиентные“ преобразования (5) могут быть интерпретированы как некоторый частный случай сдвигов в ларморовском пространстве, оставляющих инвариантными два лоренц-инварианта электромагнитного поля.

Всегда можно выбрать калибровочные потенциалы M_μ^0, N_μ^0 таким образом, чтобы перейти к использованию только одного потенциала (либо M_μ, либо N_μ), либо двух потенциалов, но связанных между собой, например, условием

$$\partial_\mu M_\nu - \partial_\nu M_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha N_\beta = 0. \tag{26}$$

Как было показано [13], возможна непротиворечивая формулировка квантовой теории при использовании двух *независимых* потенциалов, если выбор волновых функций Φ электромагнитного поля ограничить условием

$$(\partial_\mu M_\nu - \partial_\nu M_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha N_\beta)_+ \Phi = 0, \tag{27}$$

где знак плюс означает ограничение положительно-частотными членами операторного выражения. Без введения дополнительных условий типа (26) (или (27)) дуальные и ларморовские преобразования полей имеют различное физическое содержание.

Условие (26) (в квантовой теории условие (27)) восстанавливает физическую эквивалентность ларморовских и дуальных преобразований полей. Таким образом, внутренняя симметрия электромагнитного поля может быть описана в двухпотенциальной формулировке трехмерными вращениями и сдвигами в ларморовском пространстве. На языке потенциалов эта симметрия выражается в рассмотрении неоднородных ларморовских преобразований потенциалов (8).

5. *Заключение*

В настоящей работе развит новый подход к описанию внутренней симметрии электромагнитного поля, учитывающий его потенциальную формулировку.

Мы ограничились обсуждением пока только классической теории. В последующем будет рассмотрено применение этого подхода в квантовом случае, что, как нам представляется, может дать новый метод описания поляризационных свойств электромагнитного поля.

Необходимо сказать и о симметрии уравнений Максвелла в присутствии электрических и магнитных источников. В последнем случае они инвариантны относительно преобразований (2) и аналогичных преобразований, связывающих между собой электрический J^e_μ и магнитный J^g_μ токи.

Определение (3) является при этом наиболее естественным решением уравнений Максвелла (тогда ток J^e_μ является источником поля $M_{\mu\nu}$, а ток J^g_μ — поля $N_{\mu\nu}$). Дуальные преобразования источников являются по своей сути ларморовскими. И, говоря о внутренней симметрии электродинамики, следует иметь в виду ларморовскую симметрию, преобразования которой связывают между собой поля, созданные *различными* ти пами источников. Условием, обеспечивающим эквивалентность физического содержания ларморовской и дуальной симметрии в классической электродинамике с источниками, является требование неразличимости действия полей, созданных электрическими и магнитными источниками, на пробные заряды[2]. Это требование, как показано в [14], является одной из существенных черт релятивистского рассмотрения электромагнетизма. В галилеевско инвариантной формулировке электродинамики, в которой оно не выполняется, из ларморовской инвариантности не следует ее дуальная инвариантность. Иными словами,

[2] То есть речь идет о физической эквивалентности полей $\boldsymbol{E}^M$, $\boldsymbol{H}^M$ и $\boldsymbol{E}^N$, $\boldsymbol{H}^N$, соответственно.

теория оказывается уже неинвариантной относительно дуальных преобразований, определенных для суперпозиции полей $E = E_e + E_g$, $H = H_e + H_g$, где поля E_e, $H_e(E_e \equiv E^M$, $H_e \equiv H^M)$ и E_g, $H_g(E_g \equiv E^N$, $H_g \equiv H^N)$ создаются электрическими и магнитными источниками, соответственно. Заметим, что широко используемые в радиофизике преобразования: $D \to B$, $B \to -D$, $E \to H$, $H \to -E$, $J^e_\mu \to J^g_\mu$, являются ларморовскими, но не дуальными (это маскируется тем, что у полей обычно опускаются индексы e, g). Подчеркнем, что неразрывная связь между ларморовской и дуальной симметриями обусловлена лоренц-инвариантной структурой электродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] W. V. D. Hodge, *Theory and Applications of Harmonic Integrals*, Cambridge University Press, Cambridge 1951.

[2] R. L. Gamblin, *J. Math. Phys.* **10**, 46 (1968).

[3] E. I. Post, *Phys. Rev.* **D9**, 3379, (1974).

[4] N. Cabibbo, E. Ferrari, *Nuovo Cimento* **23**, 1147 (1962).

[5] M. Y. Han, L. C. Biedenharn, *Nuovo Cimento* **2A**, 544 (1970).

[6] В. И. Стражев, Л. М. Томильчик, *Электродинамика с магнитным зарядом*, Наука и техника, Минск 1975, глава II.

[7] R. Acharya, Z. Horvath, *Lett. Nuovo Cimento* **8**, 513 (1973).

[8] G. Y. Rainich, *Trans Am. Math. Soc.* **27**, 106 (1925).

[9] C. Misner, J. A. Wheeler, *Ann. Phys. (USA)* **2**, 523 (1957).

[10] A. A. Боргардт, *ЖЭТФ* **33**, 791 (1957); **34**, 1233 (1958).

[11] R. Penney, *J. Math. Phys.* **5**, 1431 (1964).

[12] В. И. Воронцов, А. Е. Левашев, В сб. *Современные проблемы гравитации*, Тбилиси 1967, стр. 242; В. И. Воронцов, *Непрерывные дуальные преобразования в изотопическом пространстве бивекторов электромагнитного поля*, препринт ИТФ-74-99Р, Киев, 1974.

[13] В. И. Стражев, Ю. В. Кресин, *Теоретическая и математическая физика*, в печати.

[14] V. I. Strazhev, *Int. J. Theor. Phys.* **13**, 113 (1975).