INFLUENCE DES CONVENTIONS TEMPORELLES ET DES CONDITIONS DE MESURE CORRESPONDANTES SUR LES EQUATIONS DE LA THERMODYNAMIQUE ET DE L'HYDRODYNAMIQUE RELATIVISTES

INFLUENCE OF THE TIME CONVENTIONS AND OF THE CORRESPONDING MEASURING CONDITIONS ON THE FUNDAMENTAL EQUATIONS OF RELATIVISTIC THERMODYNAMICS AND HYDRODYNAMICS

PAR H. ARZELIÈS*

Université de Gent, Belgique

(Reçu le 5 octobre 1976)

We may imagine two measuring conditions: we adopt simultaneity in only one reference system (NS theory) or in every reference system (S theory). According to the adopted convention we obtain in hydrodynamics the usual equation (S theory) or the equation previously proposed by the author (NS theory). The operational definition of the measuring conditions seems to favour the new equation.

1. Introduction: théorie S et théorie NS

Soit, rapporté à un référentiel K_1, un système de δn_1 particules d'un gaz parfait à un constituant contenues dans un élément de volume $\delta\bar{\omega}_1$. Ce système est caractérisé dans K_1 par des *grandeurs ponctuelles* (les coordonnées x_1^i de $\delta\bar{\omega}_1$) et par des *grandeurs étendues* (volume $\delta\bar{\omega}_1$, densité de particules $\nu_1 = \delta n_1/\delta\bar{\omega}_1$, fonction de distribution, etc.). Si nous exprimons les résultats de la *même observation* dans un autre référentiel K_2, nous obtenons les grandeurs x_2^i, $\delta\bar{\omega}_2$, ν_2, ...

Nous disons alors que nous avons effectué une *transformation* de Lorentz de K_1 à K_2. La mesure des grandeurs étendues implique une hypothèse de distribution temporelle, même s'il s'agit d'une grandeur attachée à un élément de volume. Si donc, par exemple, la mesure est effectuée simultanément dans K_2, elle est non simultanée dans K_1. Nous disons que nous sommes en théorie NS et nous écrivons

$$x_2^i \to x_1^i, \quad \nu_2^{S} = \nu_1^{NS}, \quad \delta\bar{\omega}_2^{S} \to \delta\bar{\omega}_1^{NS}.$$

* Address: Le Truel, 48150 Meyrueis, France.

On peut aussi vouloir imposer la simultanéité dans les deux référentiels. Il faut alors laisser évoluer le système dans K_1 de façon à rétablir la simultanéité. Nous disons que nous établissons: une *correspondance* entre deux *observations différentes* et que nous sommes en théorie S. Nous écrivons

$$x_2^i \to x_1^i, \quad v_2^{\mathrm{S}} \to v_1^{\mathrm{S}}, \quad \delta\varpi_2^{\mathrm{S}} \to \delta\varpi_1^{\mathrm{S}}.$$

On obtient alors [1i, 5b], moyennant certaines hypothèses restrictives mais assez largement vérifiées (il faut que, pendant la durée de l'évolution, l'influence des chocs soit négligeable ou statistiquement compensée)

$$v_1^{\mathrm{NS}} = v_2^{\mathrm{S}} \sqrt{1-\beta^2}, \quad v_1^{\mathrm{S}} = v_2^{\mathrm{S}} \frac{1+\dfrac{V}{c^2}\langle \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$\boldsymbol{u}_2$ étant la vitesse d'une particule dans K_2 et $V = \beta c$ la vitesse de K_2 par rapport à K_1 [1].

Les deux théories fournissent également des résultats différents pour la fonction de distribution $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}, t)$. En théorie S, la fonction est invariante $f_1^{\mathrm{S}} = f_2^{\mathrm{S}}$. En théorie NS, par exemple, avec simultanéité dans K_2, on obtient

$$f_1^{\mathrm{NS}} = f_2^{\mathrm{S}} \frac{1-\beta^2}{1+\dfrac{V}{c^2}u_{2x}}.$$

Il faut insister sur le fait — insuffisamment reconnu, et même rejeté par de nombreux auteurs — que les deux théories sont également admissibles, sous réserve de préciser leurs conditions d'application. D'un certain point de vue, la théorie NS constitue le cas général puisque le calcul ne nécessite aucune hypothèse restrictive; mais on peut dire aussi que c'est un cas particulier en ce sens qu'un état physique se correspond à lui-même. La théorie S, par contre, exige des hypothèses restrictives pour son développement. Mais elle peut être considérée comme plus générale que la théorie NS, car elle établit une correspondance entre deux états différents (et, en principe, ces deux états peuvent être définis de façon quelconque bien que, en pratique ce soient des états simultanés).

J'estime donc que cette distinction entre théorie S et théorie NS devrait constituer l'une des idées directrices *de tout traité actuel sur la relativité.*

Depuis les articles indépendants de Ott et d'Arzeliès, à partir de 1965, la thermodynamique relativiste, longtemps en sommeil, est devenue un sujet de recherche actuel et très discuté. Les résultats sont fréquemment contradictoires parce que la plupart des auteurs raisonnent implicitement, et sans en avoir conscience, soit en théorie S, soit en théorie NS; et même parfois mélangent les deux points de vue au cours du même raisonnement. Ce fait a déjà relevé à propos des discussions sur la thermodynamique d'équilibre. Je vais examiner içi les conséquences pour les concepts fondamentaux de la thermodynamique de non-équilibre et pour les équations de l'hydrodynamique.

---

[1] Remarque sur deux notations. Les symboles $\overline{m}$ ou $\langle m \rangle$ signifient: valeur moyenne de m.

Remarque: Certains auteurs (Grøn [4], Cavalleri et Salgarelli (2) utilisent le vocabulaire S → synchrone, NS → asynchrone; je n'emploie pas ces termes qui suggèrent des idées fausses (confusion entre les concepts de durée et de distribution temporelle).

2. Les concepts fondamentaux de la thermodynamique de non-équilibre

1°. Les deux référentiels de repos. Dans des textes antérieurs [1] j'ai introduit deux référentiels de repos: — le référentiel de *repos dynamique* K_0 défini par la condition $\langle \boldsymbol{p} \rangle = 0$ à satisfaire dans K_0, $\boldsymbol{p}$ étant la quantité de mouvement d'une particule;
— le référentiel de *repos cinématique* K_V défini par la condition $\langle u \rangle = 0$ à satisfaire dans K_V.

Ces deux concepts constituent à mon sens un prolégomène indispensable à l'édification de la thermodynamique irréversible des gaz parfaits, et donc a fortiori des systèmes quelconques. Les remarques I nous conduisent à une précision importante qui manque dans mes textes antérieurs. Il faut spécifier les conditions temporelles d'observation, [1i], même si le système occupe un élément de volume $\delta\omega$.

Si nous sommes en théorie NS, nous avons deux cas particuliers importants:
— l'observation est simultanée dans K quelconque, et donc non simultanée dans K_0 (ou K_V) et nous noterons K_S, K_0^{NS}, K_V^{NS};
— l'observation est simultanée dans K_0 (ou K_V) et donc non simultanée dans tout autre K et nous noterons K_{NS}, K_0^S (ou K_V^S). Pour passer à la théorie S, nous partons par exemple de K^S, K_0^{NS} et nous laissons évoluer le gaz de façon à rétablir la simultanéité dans K_0. Il est intuitif, et on peut le montrer rigoureusement, que le référentiel $K_0'^S$ correspondant à K^S est différent de K_0^S. Nous noterons $(K^S, K_0'^S)$.

2°. Densité de masse ϱ et densité de courant de masse $\boldsymbol{j}$.
(a) Théorie NS. J'ai montré [1] que l'on a, par exemple avec simultanéite dans K

$$\boldsymbol{j} = \nu\langle \boldsymbol{p} \rangle = \varrho \boldsymbol{Y}, \qquad \varrho = \nu\langle m \rangle = \frac{\varrho_0}{1 - Y^2/c^2},$$

$\boldsymbol{Y}$ = vitesse de K_0^{NS} dans K.

(b) Théorie S. On obtient alors [1i, 5b], p_0 étant la pression

$$\varrho = \frac{1}{1 - \dfrac{Y^2}{c^2}}\left(\varrho_0 + p_0 \frac{Y^2}{c^4}\right), \qquad \boldsymbol{j} = \frac{1}{1 - \dfrac{Y^2}{c^2}}\left(\varrho_0 + \frac{p_0}{c^2}\right)\boldsymbol{Y} \neq \varrho \boldsymbol{Y}.$$

3. Les équations des fluides relativistes

1°. Théorie phénoménologique. A partir de 1965, j'ai été conduit, dans mes publications, à mettre en question certains résultats usuellement admis et fondamentalement liés: transformation des grandeurs thermodynamiques, courant de von Laue, équations des fluides relativistes. Ces publications concluaient une assez longue période de réflexion, la prudence étant nécessaire en raison du large accord des physiciens sur les dits résultats.

L'équation qué j'ai proposée pour les fluides [1e] s'obtient par la méthode usuelle des milieux continus, en assimilant la goutte fluide à un point matériel; la seule différence avec la théorie non relativiste consiste à remplacer la dynamique newtonienne à masse propre constante par la dynamique relativiste à masse propre variable.

A la suite de discussions avec Codaccioni, au cours de sa préparation de thèse, les idées de base des théories S et NS ont été introduites dans cette théorie phénoménologique; il a été reconnu nécessaire de tenir compte de la relativité de la simultanéité même pour une goutte quasi ponctuelle [5a, 1h]. Suivant la théorie (S ou NS), on obtient l'équation usuelle ou l'équation que je propose. Citons également l'article de Costa de Beauregard [3] favorable à l'ancienne équation, mais sans conclusion contraignante.

2°. Théorie statistique pour les gaz parfaits.

(a) Equations de transfert relativistes. Elles ont été données dans un texte antérieur (1c)

$$\frac{\partial}{\partial t}(vQ) = -\sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x}(v\overline{u_x Q}) + \sum_{xyz} \overline{\frac{\partial Q}{\partial u_x}\frac{du_x}{dt}} + \Delta Q, \tag{1}$$

où Q est une fonction de la vitesse $\boldsymbol{u}$ et ΔQ la variation de Q dûe aux chocs.

Je dois ajouter une précision fondamentale qui ne figure pas dans la note [1c]: le système étant rapporté à un référentiel K, la mesure des grandeurs étendues *suppose la simultanéité dans* K. Celà résulte de la démonstration de (1).

(b) Equations du mouvement: les deux théories. Dans un texte antérieur [1c], j'ai dejà obtenu ces équations à partir des équations de transfert. Des remarques critiques très pertinentes de Codaccioni me conduisent à reprendre la question en tenant compte de la distinction entre théorie NS et théorie S. Supposons nulle la force extérieure. Désignons par m la masse de chaque particule. Si on fait $Q = m$ dans (1), on obtient l'équation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}(v\bar{m}) + \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x}(v\bar{p}_x) = 0. \tag{2}$$

Si on fait $Q = p_x$ dans (1), on obtient l'équation du mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}(v\bar{p}_x) + \sum_{xyz} \frac{\partial}{\partial x}(v\overline{u_x p_x}) = 0. \tag{3}$$

Ces équations sont valables dans tout K, avec simultanéité dans K. Opérationnellement, la dérivée en $\partial/\partial t$ a pour valeur

$$\frac{\partial}{\partial t}(v\bar{p}_x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[(v\bar{p}_x)_{t+\Delta t} - (v\bar{p}_x)_t\right]$$

les observations étant simultanées à t et $t+\Delta t$. Prenons comme référentiel de mesure K le référentiel K_0 à *l'instant* $t = t_0$

$$\frac{\partial}{\partial t_0}(v_0\overline{p_{0x}}) = \lim_{\Delta t_0 \to 0} \frac{1}{\Delta t_0}(v_0\overline{p_{0x}})_{t_0+\Delta t_0} \tag{4}$$

puisque par définition de K_0, $(v_0\,\overline{p_{0x}})_{t_0} = 0$. A $t_0+\Delta t_0$, le référentiel de repos *n'est plus* K_0, mais un nouveau référentiel K_0'. Exprimons $(v_0\,\overline{p_{0x}})_{t_0+\Delta t_0}$ en fonction des paramètres de K_0'. Pour cela nous devons distinguer entre la théorie S et la théorie NS [1c].

Théorie NS. Nous avons alors, entre un référentiel galiléen quelconque K et son référentiel K_0^{NS} correspondant

$$v\overline{p_x} = \varrho Y_x, \qquad \varrho = \frac{\varrho_0}{1-Y^2/c^2}, \tag{5}$$

Içi en raison du choix du référentiel K, nous effectuons la transposition $K \to K_0$, $K_0 \to K_0'^{\mathrm{NS}}$. Comme à l'instant t_0 la vitesse Y_0 est nulle, à l'instant $t_0+\Delta t_0$ de K_0, $K_0'^{\mathrm{NS}}$ a la vitesse ΔY_0 par rapport à K_0. D'où

$$(v_0\overline{p_{0x}})_{t_0+\Delta t_0} \simeq (\varrho_0)_{t_0+\Delta t_0}\Delta Y_0.$$

Par application de (5)

$$\lim_{\Delta t_0\to 0}(v_0\overline{p_{0x}})_{t_0+\Delta t_0} = \lim_{\Delta t_0\to 0}\frac{\varrho_0'\Delta Y_0}{1-\Delta Y_0^2/c^2} = \lim_{\Delta t_0\to 0}\varrho_0'\Delta Y_0,$$

ϱ_0' étant relatif à $t_0+\Delta t_0$.
On a

$$(\varrho_0)_{t_0+\Delta t_0} = \varrho_0',$$

$$(\varrho_0)_{t_0+\Delta t_0} = (\varrho_0)_{t_0} + \left(\frac{\partial\varrho_0}{\partial t_0}\right)_{t_0}\Delta t_0 + \dots .$$

A la limite $\Delta t_0 = 0$, $\varrho_0' = (\varrho_0)\,t_0$, ϱ_0 étant mesuré simultanément à l'instant t_0 dans K_0. Enfin la dérivée γ_x a les composantes

$$\gamma_x = \frac{dY_x}{dt} = \frac{\partial Y_x}{\partial t} + (Y\ \mathrm{grad})Y_x$$

soit içi

$$\gamma_{0x} = \frac{\partial Y_x}{\partial t}.$$

En portant dans (4)

$$\frac{\partial}{\partial t_0}(v_0\overline{p_{0x}}) = \varrho_0\gamma_{0x}.$$

Le deuxième terme de (3) fait intervenir le tenseur élastique; dans le cas d'une pression uniforme, il se réduit à $-\partial p_0/\partial x_0$. D'où

$$\varrho_0\gamma_{0x} = -\frac{\partial p_{0x}}{\partial_{x0}}. \tag{6}$$

Théorie S. Au lieu de (5) il faut poser

$$v\overline{p_x} = \frac{Y_x}{1-Y^2/c^2}\left(\varrho_0 + \frac{p_0}{c^2}\right), \qquad \varrho = \frac{\varrho_0 + p_0\,\dfrac{Y^2}{c^4}}{1-\dfrac{Y^2}{c^2}}.$$

Le même raisonnement qu'au *b*) donne

$$\frac{\partial}{\partial t_0}(v_0\overline{p_{0x}}) = \left(\varrho_0 + \frac{p_0}{c^2}\right)\gamma_{0x}$$

et donc

$$\left(\varrho_0 + \frac{p_0}{c^2}\right)\gamma_{0x} = -\frac{\partial p_{0x}}{\partial x_0}. \tag{7}$$

Comparaison entre les deux théories — il semble y avoir contradiction. Les deux théories sont obtenues à partir des mêmes postulats par les mêmes raisonnements et les mêmes approximations, et elles font intervenir les mêmes grandeurs v_0, $\overline{p_{0x}}$, ϱ_0 et p_0 mesurées simultanément dans le référentiel K_0. La solution à cette apparente contradiction réside dans le sens physique de γ_{0x}. Dans (6), dY_0 est la vitesse de K_0^{NS}, dans (7) celle de $K_0'^{\mathrm{S}}$. A une situation donnée instantanée dans K_0 correspond $K_0'^{\mathrm{NS}}$. Pour obtenir $K_0'^{\mathrm{S}}$, il faut laisser évoluer les particules; $K_0'^{\mathrm{S}}$ est un référentiel de repos fictif qui ne correspond pas à l'état réel du système. C'est donc la vitesse de K_0^{NS} qui est une grandeur physique attachée à cet état réel. Pour cette raison opérationnelle, mon choix se porte sur l'équation (6).

4. Le double concept de covariance

1°. Généralités. L'idée usuelle de covariance relativiste est attachée à la transformation de Lorentz. Une expression covariante exprime, sous forme quadridimensionnelle, les caractéristiques d'un état physique dans tous les référentiels; cette covariance relativiste usuelle n'est donc autre chose que le point de vue NS. Pour les phénomènes étendus, il faut donc élargir le concept de covariance et considérer deux types d'expressions covariantes correspondant respectivement aux théories S et NS. C'est la deuxième idée directrice qui doit désormais *apparaître explicitement dans tout traité relativiste*. Examinons, du point de vue de la covariance, l'équation des gaz parfaits relativistes.

Nous avons donné çi-dessus l'équation des fluides (gaz parfaits), en théorie NS et en théorie S, en rapportant la goutte fluide à son référentiel de repos dynamique K_0 à l'instant t_0 considéré. Pour les deux théories, l'observation est supposée simultanée dans K_0. Nous nous proposons d'écrire içi cette équation pour un référentiel galiléen K quelconque. Deux cas d'observation sont à considérer suivant que la simultanéité est, ou n'est pas, imposée dans K.

2°. Observations simultanées dans K galiléen quelconque.

a) Equation valable pour les deux théories, S et NS. A partir des équations de transfert, avec la condition de simultanéité dans K, nous avons obtenu çi-dessus:
équation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{vm})+\sum_{xyz}\frac{\partial}{\partial x}(\overline{vp_x}) = 0, \tag{2}$$

équation du mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{vp_x})+\sum_{xyz}(\overline{vu_x p_x}) = 0. \tag{3}$$

Introduisons le tableau T^{ij} défini par $(i, j = 1, 2, 3, 4;\ \alpha, \beta = 1, 2, 3)$

$$T^{\alpha\beta} = \overline{vp^{\alpha}u^{\beta}} = T^{\beta\alpha} = \overline{vp^{\beta}u^{\alpha}}, \tag{8}$$

$$T^{\alpha 4} = T^{4\alpha} = icv\overline{p^{\alpha}}, \qquad T^{44} = -c^2\overline{m}.$$

Les équations (2) et (3) se condensent en

$$\partial_j T^{ij} = 0. \tag{9}$$

b) Interprétation de (9) en théorie S. Soit une observation simultanée effectuée dans un référentiel K_1 au point $\boldsymbol{x}_1$ à l'instant t_1. A $(\boldsymbol{x}_1, t_1)$ correspond un référentiel de repos dynamique K_0^S, et pour T^{ij} les composantes T_1^{ij}.

A $(\boldsymbol{x}_1, t_1)$ nous pouvons faire correspondre une observation également simultanée $(\boldsymbol{x}_2, t_2)$ dans un autre référentiel K_2, avec les composantes T_2^{ij}; et à $(\boldsymbol{x}_2, t_2)$ correspond le même K_0^S qu'à $(\boldsymbol{x}_1, t_1)$. La transformation des composantes T^{ij} de K_1 à K_2 montre que T_2^{ij} est un tenseur dout les composantes peuvent s'exprimer en fonction des grandeurs d'un K_0^S unique (pour K_1 et K_2, donc quel que soit K). On a

$$T^{ij} = \left(\varrho_0 + \frac{p_0}{c^2}\right)u^i u^j + p_0\delta^{ij}. \tag{10}$$

L'équation (9), (10) est l'équation usuellement admise. Cette équation covariante, qui est une autre forme de la théorie S, est néanmoins admise par certains auteurs qui rejettent la théorie S. Une telle attitude est illogique et même contradictoire. Mais elle se rencontre surtout chez les auteurs mathématiciens qui raisonnent toujours exclusivement en formalisme quadridimensionnel, sans expliciter les interprétations physiques tridimensionnelles. Ces auteurs ont par ailleurs l'impression que la théorie S remet en vigueur les idées prérelativistes sur la simultanéité absolue, et la rejettent donc sans examen. C'est de leur part une idée fausse qu'une étude objective de la théorie S éliminerait sans difficulté.

Cette équation (9,10) correspond à l'équation (7) que j'ai rejetée en raison des conditions de mesure impliquées. Quoi qu'il en soit de cette conclusion personnelle, toute discussion sur la validité de l'équation (9,10) doit désormais tenir compte des dites conditions de mesure. Les arguments purement mathématiques n'ont aucune valeur. Une autre raison semble militer en faveur du rejet de cette théorie S. Si on l'applique à une particule complexe de type électrostatique, la théorie S conduit à une expression de la masse différente de celle de la dynamique du point (il s'introduit un terme supplémentaire en $\beta^2/3$).

c) Interprétation de (9) en théorie NS. A une observation (x_1, t_1) simultanée dans K_1 nous avons attaché un référentiel K_{01}^{NS}. Nous pouvons exprimer les grandeurs de K_1 en fonction de K_{01}^{NS}. Si nous considérons dans K_2 l'observation simultanée (x_2, t_2) qui correspond à (x_1, t_1), nous aurons un référentiel $K_{02}^{NS} \neq K_{01}^{NS}$. Le référentiel K_0^{NS} dépend du référentiel K choisi pour les mesures simultanées. Il n'est donc pas possible d'exprimer les T^{ij} en fonction d'un K_0 unique.

L'écriture (9) reste valable pour tout K, mais seulement avec les composantes (8) définies par ce référentiel K; l'expression (10) n'est plus valable. Pour utiliser (9), il faut connaitre la fonction de distribution du gaz ou faire des hypothèses supplémentaires sur l'expression macroscopique des T^{ij}.

3°. Observations simultanées dans K_0 et non simultanées dans K galiléen quelconque. Pour avoir les équations dans K, nous ne pouvons plus utiliser les équations de transfert puisqu'elles supposent la simultanéité dans K. La solution sera obtenue en partant des équations écrites dans K_0, et en leur donnant une forme covariante. C'est seulement ce point de vue qui est exploité dans mon livre sur les fluides [1f]. Pour les fluides parfaits, on est conduit, au lieu de la forme tensorielle (9), à l'équation vectorielle

$$\varrho_0 \Gamma^i = \Phi^i,$$

avec

$$\Phi_k = \Psi_k - \partial_k p_0 - \frac{V_k V^i}{c^2}\, \partial_i p_0.$$

Ψ_k force extérieure, Γ^i accélération.

L'observation s'effectue dans K avec la distribution temporelle non simultanée déterminée par la simultanéité dans K_0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Arzeliés, a) *Thermodynamique relativiste et quantique*, Gauthier-Villars, Paris 1968; b) *C. R. Acad. Sci.* **A268**, 1056 (1969); c) *C. R. Acad. Sci.* **A271**, 332, 442 (1970); d) *Critical Review of Thermodynamics*, Mono Book Corp., Baltimore 1970, p. 49, Actes du Symposium Pittsburgh, Avril 1969; e) *Scientia*, **IX-X**, 186, 552 (1970); f) *Fluides relativistes*, Masson, Paris 1971; g) *Symposia Mathematica*, Istituto Naz. Alta. Mat., XII, Acad. Press London 1973, p. 199, Actes Congrès Roma, Février 1972; h) *C.R. Acad. Sci.* **A280**, 1471 (1975); i) Cours donné à l'Université de GAND du 16 Février au 26 Mars 1976, dans le cadre de la chaire Franqui.

[2] G. Cavalleri, G. Salgarelli, *Nuovo Cimento* **A62**, 722 (1969).

[3] O. Costa de Beauregard, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **16**, 103 (1972).

[4] O. Grøn, *Nuovo Cimento* **B13**, 141 (1973).

[5] J. P. Codaccioni, a) C. *R. Acad. Sci.* **A279**, 975 (1974); b) Thèse doctorat ès science physiques, Toulouse, 22 Juin 1976.