Vol. B9 (1978) ACTA PHYSICA POLONICA No 5

О ДИАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ОВЩЕГО ТИПА

ON DYAL SYMMETRY OF THE VECTOR FIELD OF GENERAL TYPE

В. И. Стражев

Институт физики Академии наук Белорусской ССР, Минск*

(Поступила в редакцию 3-го ноября 1977 г.)

The quaternion formulation of the theory of classical vector field of general type is given. It is invariant under transformations of a 6 parameter group (the dyal symmetry group) which are defined on the field functions and do not involve the space-time coordinates. For the massless case the full group of internal symmetry is 10 parameter.

1. *Введение*

Наряду с пространственно-временными симметриями линейных релятивистских уравнений возможно рассмотрение преобразований в пространстве волновых функций, действие которых не имитируется преобразованиями пространственно-временных координат. Требование инвариантности теории относительно преобразований подобного типа является существенным ограничением ее структуры. К числу таких преобразований относятся, например, γ_5 преобразования нейтринного поля, дуальные преобразования электромагнитного поля (см., например [1—3]), преобразования группы Паули-Гюрши (см., например [4]).

В ряде работ (см., например [5—10]) изучались уравнения которые являются обобщением известных уравнений, описывающих частицы со спином 1. Суть обобщения состояла в рассмотрении с единой точки зрения векторных, псевдовекторных, скалярных и псевдоскалярных полей. Теория такого поля называется теорией векторного поля общего типа. Совместное рассмотрение векторных и скалярных частиц привлекательно, если вспомнить, что оно является обязательным элементом калибровочных теорий со спонтанно нарушенной симметрией.

Тензорная запись уравнений векторного поля общего типа такова:

$$\partial_\nu F_{\mu\nu}+kA_\mu = \partial_\mu\psi, \quad \partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu}+kB_\mu = \partial_\mu\tilde{\psi}, \tag{1}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha B_\beta, \tag{2}$$

$$\partial_\mu A_\mu = \psi, \quad \partial_\mu B_\mu = \tilde{\psi}, \tag{3}$$

* Address: Institute of Physics, Lenin Avenue 70, Minsk-72, 220072, USSR.

где $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$, $\varepsilon_{1234} = -i$, $E_k = iF_{4k}$, $H_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kmn}F_{mn}$, $\varepsilon_{123} = 1$, E_k, H_k — напряженности „электрического" и „магнитного" полей, константа k характеризует массу поля, $A_\mu = (\boldsymbol{A}, i\varphi_A)$, $B_\mu = (\boldsymbol{B}, i\varphi_B)$ — векторный и псевдовекторный потенциалы, соответственно.

Уравнения (1)—(3) описывают как единое целое векторное, псевдовекторное, скалярное и псевдоскалярное поля. Если записать эти уравнения в матричном виде, используя 16-рядное приводимое представление алгебры Даффина-Кеммера, то матрицы будут удовлетворять алгебре Дирака (см. [5—7, 9—10]).

Рассматривая уравнения (1) как уравнения для нейтрального поля, можно ввести источники двух типов: „электрический" — J^e_μ и „магнитный" J^g_μ. Уравнения (1) примут следующий вид:

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} + kA_\mu = J^e_\mu + \partial_\mu \psi, \qquad \partial_\nu \tilde{F}_{\mu\nu} + kB_\mu = J^g_\mu + \partial_\mu \tilde{\psi}. \tag{4}$$

Полагая ψ, $\tilde{\psi}$ и k равными нулю получим уравнения Максвелла с электрическими и магнитными источниками при использовании двухпотенциального подхода (ур. (3)) (см. например [1, 11]).

Система уравнений (1)—(3) может быть истолкована также как двухпотенциальное обобщение уравнений Штюкельберга [12].

В настоящей работе будет показано, что теории векторного поля общего типа присуща симметрия, которую мы назовем диальной. Ее преобразования определены в пространстве полевых функций и не затрагивают пространственно-временных координат. Для безмассового поля эта (шестипараметрическая) группа симметрии может быть расширена до десятипараметрической группы. Структура последней изоморфна структуре группы Пуанкаре.

Наше исследование использует кватернионную формулировку теории, поэтому в приложении дается краткое изложение основных понятий. Для удобства сравнения и анализа в ряде случаев приводится также векторная и тензорная формы рассматриваемых уравнений и соотношений.

2. Кватернионная формулировка теории и ее симметрии

Кватернионная запись уравнений (1) и (2) такова:

$$\nabla F + kG = 0, \tag{5}$$

$$F = -\bar{\nabla} G, \tag{6}$$

где

$$F = e_\mu f_\mu, \quad G = e_\mu G_\mu, \quad \nabla = e_\mu \partial_\mu, \quad \bar{\nabla} = \bar{e}_\mu \partial_\mu, \quad f_k = H_k - iE_k,$$

$$f_4 = -(\psi + i\tilde{\psi}), \quad G_\mu = A_\mu + iB_\mu, \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{i\partial t}\right), \quad e_\mu = (e_k, e_4),$$

$$\bar{e}_\mu = (-e_k, e_4).$$

(см. Приложение).

Уравнения (5), (6) приводят к следующему уравнению второго порядка ($\nabla\overline{\nabla} = \square$):

$$(\square - k)\, G = 0.$$

Уравнения (5) следуют из лагранжиана вида:

$$\mathscr{L} = -\overline{F}F - k\overline{G}G + (\ )^*, \tag{7}$$

где выражение в скобках содержит комплексно сопряженные члены. Варьируя лагранжиан по потенциалам G_μ, G_μ^* как координатам поля получаем (для комплексно сопряженных членов полностью справедливы последующие рассуждения, и поэтому они опущены в (8), (9)):

$$\delta\mathscr{L} = \delta\overline{G}\overleftarrow{\nabla}F + \overline{F}\overline{\nabla}\delta G - k\delta\overline{G}G - k\overline{G}\delta G + \delta(\ )^*. \tag{8}$$

Используя, что $\delta\overline{G}\overleftarrow{\nabla}\, F = \partial_\alpha\delta\overline{G}e_\alpha F = \partial_\alpha(\delta\overline{G}e_\alpha F) - \delta\overline{G}\nabla F$ вариацию лагранжиана можно переписать следующим образом:

$$\delta\mathscr{L} = \left[-\delta\overline{G}(\nabla F + kG) - (\overline{F}\overleftarrow{\overline{\nabla}} + k\overline{G})\delta G + \partial_\alpha(\delta\overline{G}e_\alpha F + \overline{F}\overline{e}_\alpha\delta G)\right] + [\ ]^*. \tag{9}$$

Последний член в (9) обращается в нуль после проведения интегрирования в интеграле действия. Из алгебраической независимости δG и $\delta\overline{G}$ из (9) следуют уравнения (5), а также кватернионно сопряженные уравнения

$$\overline{F}\overleftarrow{\overline{\nabla}} + kG = 0,$$

где стрелка показывает направление действия оператора $\overline{\nabla}$. Из (9) следуют уравнения для комплексно сопряженных величин F^*, G^*.

Выберем теперь конкретный базис для элементов кватернионной алгебры, т.е. положим $e_k = i\sigma_k$, $e_4 = I$, где I — единичная матрица, σ_k — матрицы Паули.

Введем следующие преобразования потенциалов

$$G \to G' = GD, \tag{10a}$$

где D — комплексная матрица второго порядка, удовлетворяющая условию унимодулярности ($\det D = 1$) и зависящая от шести вещественных параметров. По определению преобразования (10a) не затрагивают пространственно-временных координат. Матрицы типа D образуют бинарную группу, изоморфную группе $SL(2,\ C)$.

Из (10a) и (6) следует закон преобразования полевых величин F:

$$F \to F' = -\overline{\nabla}G' = FD. \tag{10b}$$

Относительно преобразований (11) инвариантны полевые уравнения (5). Нетрудно убедиться, что

$$\nabla F' + kG' = (\nabla F + kG)D = 0,$$

т.е. используя закон ассоциативности уравнение для преобразованных величин приводится к исходному виду, умноженному справа на матрицу D. Очевидно, что такое умножение не меняет вида уравнений (5).

Преобразования (10) оставляют инвариантным лагранжиан теории (7) (заметим, что $\overline{F}' = \overline{D}\,\overline{F}, F\overline{F} = \overline{F}F = \mathrm{inv}$).

Относительно группы Лоренца кватернионы F, G преобразовываются следующим образом (при этом $\nabla' = S\nabla\overline{S}^*$):

$$F' = S^*F\overline{S}^*, \qquad G' = SG\overline{S}^*, \qquad \overline{S}S = \overline{S}^*S^* = 1. \tag{11}$$

Преобразования вида (11) сохраняют условие равенства нулю скалярной части кватерниона, чего нельзя сказать о преобразованиях (10). Последнее обстоятельство объясняет с алгебраической точки зрения причину инвариантности уравнений (5), (6) заданных для кватернионов с отличной от нуля скалярной частью, относительно преобразований вида (10).

Полная группа симметрии уравнений (5), (6) является 8-ми параметрической, поскольку алгебра комплексных кватернионов является алгеброй 8-го ранга, т.е. наряду с преобразованиями (10) могут быть рассмотрены также „масштабные" преобразования полевых величин ($\lambda^* = \lambda$)

$$F \to F' = \lambda F, \qquad G \to G' = \lambda G, \tag{12}$$

а также преобразования вида (дуальные преобразования)

$$F \to F' = F\exp(i\Theta), \qquad G \to G' = G\exp(i\Theta). \tag{13}$$

Преобразования (15), (16) изоморфны алгебре комплексных чисел второго ранга. Очевидно, что лагранжиан теории (7) не инвариантен относительно преобразований (12), (13).

Преобразования D могут быть параметризованы следующим образом: $D = \exp(\boldsymbol{q\sigma})$, где $\boldsymbol{q}$ — комплексный 3-вектор. Относительно преобразований (10) потенциалы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ преобразуются следующим образом (для иллюстрации рассмотрим трехпараметрическую подгруппу SU(2) преобразований (10), когда $\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}\Theta\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}^2 = 1$, $\boldsymbol{n}^* = \boldsymbol{n}e_k = i\sigma_k$:

$$\boldsymbol{A}'(x) = \boldsymbol{A}\cos\frac{\Theta}{2} + (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{n})\sin\frac{\Theta}{2} - \varphi_B\boldsymbol{n}\sin\frac{\Theta}{2},$$

$$\boldsymbol{B}'(x) = \boldsymbol{B}\cos\frac{\Theta}{2} + (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n})\sin\frac{\Theta}{2} + \varphi_A\boldsymbol{n}\sin\frac{\Theta}{2}. \tag{14}$$

Как видно из (14) эти преобразования связывают между собой векторные и псевдовекторные величины, т.е. являются преобразованиями кирального типа, так же как и дуальные преобразования электромагнитного поля [3]. В работе [13] дуальные преобразования предлогалось называть диальными (от английского слова *dyal*) преобразованиями для отличия от понятия дуальности в физике адронов, но это предложение поддержки не нашло. Слово „диальность" удобно использовать для названия преобразований (10), и мы будем называть преобразования (10) группой диальных преобразований (D-группой), а инвариантность теории D-инвариантностью.

„Координатным" пространством для D-группы является 4-мерное комплексное линейное пространство потенциалов $G_\mu = A_\mu + iB_\mu$. Группой инвариантности такого пространства является 12-ти параметрическая группа SO(4, C), так что преобразования „координатного" кватерниона G имеют следующий вид (см. здесь например [14]):

$$G \to G' = AG\bar{R}, \tag{15}$$

где A, R — два комплексных кватерниона и $R\bar{R} = A\bar{A} = 1$. Относительно преобразований (15) инвариантны уравнения (5) следует учесть, что $F \to F' = -\bar{\nabla}(AG\bar{R})$, $\nabla F' + kG' = -\nabla\bar{\nabla}(AG\bar{R}) + kAG\bar{R} = A(-\nabla\bar{\nabla}G + kG)R = A(\nabla F + kG)\bar{R} = 0$, но лагранжиан (7) инвариантен только относительно ее 6-ти параметрической подгруппы, соответствующей (10)[1].

3. *Группа симметрии безмассового поля*

Наряду с преобразованиями (10) могут быть рассмотрены преобразования типа сдвигов:

$$G \to G' = G + G^0 d, \tag{16}$$

где кватернион G^0 удовлетворяет условию „нулевого поля"

$$\bar{\nabla} G^0 = 0, \tag{17}$$

и $d = e_\alpha d_\alpha$ — канонические параметры. Преобразования (16) образуют четырехпараметрическую абелеву группу в пространстве потенциалов G_μ. Относительно сдвигов (16) полевые величины F инвариантны. При преобразованиях (11) величина d должна преобразовываться также, как релятивистский 4-вектор относительно преобразований из группы Лоренца:

$$d \to d' = \bar{D} d D. \tag{18}$$

Можно ввести в рассмотрение 10-ти параметрическую группу, являющуюся полупрямым произведением группы преобразований (10) с группой преобразований (16). Ее структура изоморфна структуре десятипараметрической группы Пуанкаре, являющейся полупрямым произведением группы Лоренца на группу сдвигов. Будем называть ее группой неоднородных диальных преобразований.

Уравнения (5) не инвариантны относительно преобразований этой группы, поскольку поле обладает массой покоя. Требование инвариантности теории относительно неоднородных диальных преобразований может быть удовлетворено

---

[1] Подробное исследование преобразований (15) еще будет дано.

только для безмассового поля. Соответствующие уравнения следуют из (5) при $k = 0$, так что (мы записываем их при наличии источников)

$$\nabla F = J, \tag{19}$$

где $J_\mu e_\mu = J$, $J_\mu = J_\mu^e + iJ_\mu^g$. Уравнения (19) могут быть рассмотрены как обобщенные уравнения Максвелла. В векторной форме они имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \dot{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{J}^e + \operatorname{grad} \psi, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \varrho^e - \dot{\psi}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\dot{\boldsymbol{H}} - \boldsymbol{J}^g - \operatorname{grad} \tilde{\psi}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = \varrho^g - \dot{\tilde{\psi}}, \end{aligned} \tag{19'}$$

где $\psi = \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \dot{\phi}_A$, $\tilde{\psi} = \operatorname{div} \boldsymbol{B} + \dot{\phi}_B$, J_μ^e и J_μ^g — „истинные" электрический и магнитный токи. Если положить их равными нулю, то уравнения (19) являются алгебраическим обобщением уравнений Коши-Римана в теории функций комплексной переменной (см., например [15, 16]).

В тензорной записи (в частном случае при $d_k = 0, d_4 = r$) преобразования группы сдвигов (16) и условия (17) имеют вид:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + rA_\mu^0, \quad B_\mu \to B'_\mu = B_\mu + rB_\mu^0, \tag{16a}$$

$$\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0 - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha B_\beta^0 = 0. \tag{17б}$$

Но это есть преобразования (при $r = 1$) названные в [17] смешанными градиентными преобразованиями. При учете преобразований (16) двухпотенциальное описание электромагнитного поля не приводит к увеличению числа степеней свободы (см., например [1]).

Симметрия уравнений вида (19) изучалась в работах [18, 19]. Рассмотренная нами 6-ти параметрическая группа диальных преобразований гомоморфна группе, названной в [18] группой внешних преобразований электромагнитных полевых величин. Введение в [18] указанной группы основывалось на использовании алгебры действительных спиноров (одной из действительных форм алгебры Клиффорда; кватернионная алгебра соответствует частному случаю комплексной формы этой алгебры). Суть способа получения в [18] обобщения уравнений Максвелла в виде (19) и введения на этой основе группы симметрии состояла в разбиении электрического (J_μ^e) и магнитного (J_μ^g) тока на две части: $J_\mu^e = J_\mu^1 + \partial_\mu \psi$, $J_\mu^g = J_\mu^2 + \partial_\mu \tilde{\psi}$, так что в [18, 19] в правой части уравнений (19′) стоят величины J_μ^1, J_μ^2, а не J_μ^e, J_μ^g. Применительно к заряженным частицам такое разбиение не может быть оправдано и создает неверное впечатление, что эта группа требует присутствия источников.

Интерпретация и название этой группы в [18, 19] основано на том, что постулируемое здесь выражение для 4-импульса поля (P_μ) относительной преобразований рассматриваемой группы преобразуется как релятивистский 4-вектор ($P' = \overline{D}{}^*PD$). Хорошо известное выражение для тензора энергии — импульса электромагнитного поля имеет следующую кватернионную запись

$$T_{\mu\nu}e_\nu = \overline{F}{}^*e_\mu F. \tag{20}$$

При сохранении этого определения в теории безмассового векторного поля общего типа, когда $f_4 \neq 0$, получится отмеченный выше характер поведения P_μ. В тензорной записи обобщенное таким образом выражение для $T_{\mu\nu}$ имеет вид:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[F_{\mu\alpha}F_{\alpha\nu} + \tilde{F}_{\mu\alpha}\tilde{F}_{\alpha\nu} - 2F_{\mu\nu}\psi - 2\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{\psi} + \delta_{\mu\nu}(\psi^2 + \tilde{\psi}^2)\right]. \tag{21}$$

В рамках лагранжева подхода к тензорной формулировке теории в работе [20] показано, что из вариационного принципа вытекает следующее выражение для $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = -\partial_\mu A_\alpha \partial_\nu A_\alpha + \partial_\mu B_\alpha \partial_\nu B_\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}F^2_{\mu\nu} + \psi^2 - \tilde{\psi}^2\right)\delta_{\mu\nu}, \tag{22}$$

которое является инвариантом диальных преобразований. Это означает, что предложенная в [18, 19] интерпретация группы и ее название (группа внешних преобразований электромагнитных величин, т.е. преобразующая внешние (интегральные) характеристики поля типа $P_\mu = i\int T_{\mu 4}d^3x$ является неверной и не связанной с природой диальной симметрии как внутренней симметрии полевой теории.

4. *Законы сохранения*

В соответствии с теоремой Нетер (см., например [21, 22]) инвариантность действия относительно преобразований (10) приводит к следующему закону сохранения

$$\partial_\alpha(\bar{F}\bar{e}_\alpha\delta G + \delta\bar{G}e_\alpha F + \bar{F}^*\bar{e}_\alpha\delta G^* + \delta\bar{G}^*e_\alpha F^*) = 0. \tag{23}$$

Учитывая, что

$$\delta G = \delta q_k e_k G, \qquad \delta\bar{G} = -\delta q_k e_k \bar{G}, \tag{24}$$

и подставляя (24) в (23), запишем:

$$\partial_\alpha[\delta q_k(\bar{F}\bar{e}_\alpha G e_k - e_k\bar{G}e_\alpha F) + \delta q_k^*(\bar{F}^*\bar{e}_\alpha G^* e_k - e_k\bar{G}^*e_\alpha F^*)]. \tag{25}$$

Если учесть, что $\delta q_k = \delta n_k + i\delta k_k$, δn_k, dk_k — вещественные параметры, то из (25) видно, что имеется два сохраняющихся 3-вектора: $S_k = \int S_{k\alpha}d\Sigma_\alpha$, $R_k = \int R_{k\alpha}d\Sigma_\alpha$, где

$$S_{k\alpha} = \bar{F}\bar{e}_\alpha G e_k + \bar{F}^*\bar{e}_\alpha G^* e_k - e_k\bar{G}e_\alpha F - e_k\bar{G}^*e_\alpha F^*, \tag{26а}$$

$$R_{k\alpha} = \bar{F}\bar{e}_\alpha G e_k + e_k\bar{G}^*e_\alpha F^* - e_k\bar{G}e_\alpha F - \bar{F}^*\bar{e}_\alpha G^* e_k, \tag{26б}$$

которые соответствуют инвариантности теории относительно преобразований двух трехпараметрических подгрупп SU(1,1) и SU(2) Д-группы. Выражения $R_{k\alpha}$ и $S_{k\alpha}$ являются компонентами тензора третьего ранга $\theta_{\alpha[\mu\nu]}$, антисимметричного по двум индексам, так что

$$\theta_{\alpha[\mu\nu]}e_\mu e_\nu = S_{\alpha k}e_k + iR_{\alpha k}e_k. \tag{27}$$

Выражению (27) отвечает следующая тензорная величина [20]:

$$\theta_{\alpha[\mu\nu]} = \varepsilon_{\mu\nu\eta\xi}(\partial_\alpha A_\eta A_\xi - \partial_\alpha B_\eta B_\xi) + \partial_\alpha A_{[\mu}B_{\nu]} + \partial_\alpha B_{[\mu}A_{\nu]}. \tag{28}$$

Инвариантность теории относительно группы сдвигов приводит к закону сохранения вида: $(d_\alpha^* = d_\alpha)$

$$\partial_\alpha(\bar{F}\bar{e}_\alpha G e_\mu + e_\mu \bar{G} e_\alpha F + \bar{F}^* \bar{e}_\alpha G^* e_\mu + e_\mu \bar{G}^* e_\alpha F^*) \tag{29}$$

и сохраняющийся 4-вектор имеет следующую тензорную запись $(K_\mu = i \int K_{\mu 4} d^3x)$:

$$K_\mu = F_{\mu\nu} A_\nu^0 + \tilde{F}_{\mu\nu} B_\nu^0 + A_\mu^0 \psi + B_\mu^0 \tilde{\psi}. \tag{30}$$

При проверке закона сохранения для K_μ следует учесть, что в силу (17) справедливо: $\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0 = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha B_\beta^0$, $\partial_\mu A_\mu^0 = \partial_\mu B_\mu^0 = 0$. Из (28), (30) можно заключить, что эти сохраняющиеся величины отражают спиновую структуру векторного поля общего типа.

5. *Заключение*

Д-группа может быть рассмотрена и в теории неабелева калибровочного поля. Как показано Бялыницким-Бирула [23] и Мандельстамом [24], уравнения поля Янга-Миллса могут быть записаны следующим образом:

$$\partial_\nu \vec{\mathscr{F}}_{\mu\nu}(x, P) = 0, \qquad \partial_\nu \vec{\tilde{\mathscr{F}}}_{\mu\nu}(x, P) = 0, \tag{31}$$

где стрелка обозначает изотопический вектор и величины $\vec{\mathscr{F}}_{\mu\nu}$, $\vec{\tilde{\mathscr{F}}}_{\mu\nu}$ зависят не только от координат, но и от пространственно-подобного пути P.

Можно задать $\vec{\mathscr{F}}_{\mu\nu}$ через два потенциала $\vec{M}_\mu(x, P)$, $\vec{N}_\mu(x, P)$ так, что

$$\vec{\mathscr{F}}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{M}_\nu - \partial_\nu \vec{M}_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \vec{N}_\beta, \tag{32}$$

и ввести определения: $\partial_\mu \vec{M}_\mu = \vec{\Psi}(x, P)$, $\partial_\mu \vec{N}_\mu = \vec{\tilde{\Psi}}(x, P)$. При добавлении в правые части (31) выражений $\partial_\mu \vec{\Psi}$, $\partial_\mu \vec{\tilde{\Psi}}$, соответственно, мы переходим к уравнениям, тензорная структура которых изоморфна структуре уравнений (19) (при $J_\mu^e = J_\mu^g = 0$). При таком обобщении уравнений Янга-Миллса теория неабелева калибровочного поля также будет обладать диальной симметрией. Разумеется, необходимо детальное исследование этого обобщения основных уравнений теории и вытекающих из него следствий.

В общем случае речь может идти не только о Д-инвариантности уравнений векторного поля общего типа, но о Д-инвариантности кватернионных уравнений вида (5). В виде уравнений (5) могут быть записаны уравнения Дирака для 8-ми компонентных спиноров (см. например [27—29]). Это означает, что диальная симметрия присуща также уравнениям для спинорных частиц. Как будет показано в отдельной работе, трехпараметрической подгруппе SU(2) Д-группы соответствует группа преобразований Паули-Гюрши для безмассового спинорного поля.

Как отмечалось во введении, уравнения векторного поля общего типа имеют 16-компонентную матричную формулировку. Уравнения этого типа широко исследовались в литературе (см. например [29] и цитированную здесь литературу) и положены в основу теории слияния (fusion) де Бройля. Уравнения подобного типа могут описывать не только частицы со спином 0,1, но и со спином 1/2, 3/2, а также 0,1,2. Есть основания полагать, что диальная симметрия является симметрией релятивистских волновых уравнений, в основе которых лежит использование кратных представлений группы Лоренца, описывающих в общем случае частицы с различными значениями спинов.

Выражаю свою признательность А. А. Богушу, С. И. Круглову, Ю. А. Курочкину, Е. А. Толкачеву, Л. М. Томильчику за плодотворное обсуждение различных аспектов настоящей работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Кватернионы[2]

Алгебра кватернионов задается на четырех базисных элементах (e_1, e_2, e_3, e_4) и определяется с помощью следующих соотношений: Произвольный кватернион представляется в виде: $z = z_4 e_4 + z_k e_k = z_0 + \boldsymbol{z}$. Кватернионы вида $z_0 = z_4 e_4$ называются скалярами, а кватернионы вида $\boldsymbol{z} = z_k e_k$ — векторами. Величины z_4, z_k могут быть как вещественными, так и комплексными функциями. В последнем случае выражение $z_\mu e_\mu$ называют комплексным кватернионом или бикватернионом. Произведение кватернионов определяется с помощью следующей формулы:

$$z = AB = z_0 + \boldsymbol{z} = a_4 b_4 + a_4 \boldsymbol{b} + b_4 \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{ab}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}),$$

то есть $z_0 = z_4 e_4 = (a_4 b_4 - a_k b_k)\ e_4$, $\boldsymbol{z} = z_k e_k = (a_4 b_k + b_4 a_k + \varepsilon_{kmn} a_m b_n) e_k$. Алгебра кватернионов изоморфна алгебре матриц Паули, если установить взаимосвязь: $e_k = i\sigma_k$, $e_4 = I$, где I — единичная матрица (выражение для σ_2 отличается от общеупотребительного множителем —1).

Важную роль играют понятия „комплексного" (z^*), „кватернионного" $(\bar{z})$ и „гиперсопряжения" $(z^\dagger)$ кватернионов: $z^* = z_4^* e_4 + z_k^* e_k$, $\bar{z} = z_4 e_4 - z_k e_k$, $z^\dagger = z_4^* e_4 - z_k^* e_k = \bar{z}^*$. Если $z_4 = z_4' + i z_4''$, $z_k = z_k' + i z_k''$, то $z_4^* = z_4' - i z_4''$, $z_k^* = z_k' - i z_k''$. Кроме того, справедливо следующее соотношение: $\overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$, $\bar{\bar{A}} = A$, где A, B — кватернионы.

Для всех матриц 2×2 справедливо следующее равенство: $A\bar{A} = \bar{A}A = \det A$. Для любой матрицы 2×2, удовлетворяющей условию $\det A = 1$ справедливо также, что $\bar{A} = A^{-1}$.

Преобразование

$$X \to X' = AXB^{-1}, \qquad X = X_\mu \sigma_\mu, \qquad \sigma_\mu = (\sigma_k, iI), \tag{П.1}$$

где A, B — произвольные унимодулярные матрицы, сохраняет $\det X$. Если $B \equiv A$, то преобразование (П. 1) сохраняет не только детерминант, но и след матрицы X, причем условие $X_4 = 0$ инвариантно относительно этих преобразований.

---

[2] См., например [16, 25, 26].

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Стражев, Л. М. Томильчик, *Электродинамика с магнитным зарядом*, Наука и техника, Минск 1975.

[2] D. L. Weaver, *Ann. Phys.* **101**, 52 (1976).

[3] V. I. Strazhev, *Int. J. Theor. Phys.* **16**, 111 (1977).

[4] K. Nishijima, *Fundamental Particles*, W. A. Benjamin, Inc., New York 1964.

[5] A. Ericsson, *Ark. f. math. astron. och. phys.* 34/21, 1 (1948).

[6] B. Bruno, *Ark. f. math. astron. och. phys.* 34/22, 1 (1948).

[7] А. А. Боргардт, *ЖЭТФ* **45**, 116 (1963).

[8] А. Б. Пестов, *Препринт ОИЯИ*, Р2-9642, Дубна 1976.

[9] E. Durand, *Phys. Rev.* **D11**, 3405 (1975).

[10] А. А. Богуш, С. И. Круглов, *Известия АН БССР, сер. физ.-мат.* № 3 (1978).

[11] V. I. Strazhev, *Lett. Nuovo Cimento* **9**, 641 (1974).

[12] E. C. S. Stückelberg, *Helv. Phys. Acta* **11**, 299 (1938); J. A. Yang, S. A. Bludman, *Phys. Rev.* **131**, 2326 (1963).

[13] N. Y. Han, L. C. Biedenharn, *Nuovo Cimento* **2A**, 544 (1971).

[14] А. А. Богуш и др., *Известия АН БССР, сер. физ.-мат.*, № 1 (1976); A. A. Bogush, F. I. Fedorov, *Rep. Math. Phys.* **11**, 37 (1977).

[15] Г. А. Зайцев, *Алгебраические проблемы математической и теоретической физики*, Наука, Москва 1974.

[16] K. Imaeda, *Nuovo Cimento* **32B**, 138 (1976).

[17] N. Cabibbo, E. Ferrari, *Nuovo Cimento* **23**, 1147 (1962).

[18] Г. А. Зайцев, *Известия вузов СССР, физика*, № 12 (1969).

[19] Г. А. Зайцев, А. М. Солунин, *Известия вузов СССР, физика*, № 11, (1969).

[20] С. И. Круглов, В. И. Стражев, *Известия вузов СССР, физика* No 4 (1978).

[21] А. А. Богуш, Л. Г. Мороз, *Введение в теорию классических полей*, Наука и техника, Минск 1968.

[22] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва 1973.

[23] I. Białynicki-Birula, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys.* **11**, 135 (1963).

[24] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **175**, 1580 (1968).

[25] Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, гл. VI, Москва **1970**.

[26] J. D. Edmonds Jr., *Int. J. Theor. Phys.* **6**, (1972).

[27] F. Gürsey, *Nuovo Cimento* **3**, 988 (1956); **7**, 411 (1958).

[28] T. Kaneno, *Prog. Theor. Phys.* **23**, 1 (1960).

[29] Г. А. Соколик, *Групповые методы в теории элементарных частиц*, Атомиздат, Москва 1965.

[30] L. De Broglie, *Theorie de particules a spin (methode de fusion)*, Paris 1943.