ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

A. Melamid.

Bemerkungen zur Quasiergodenhypothese.

Uwagi o hipotezie quasi-ergodycznej.

S t r e s z c z e n i e.

A. R o s e n t h a l opublikował w r. 1914 pracę, której przedmiot stanowią rozważania nad hipotezą quasi-ergodyczną. Autor pragnie wykazać, że hipoteza ta wystarcza dla celów mechaniki statystycznej, t. zn., że można nią zastąpić hipotezę ergodyczną. Dowód R o s e n t h a l a zawiera jednak tak zasadnicze luki (jak to uzasadniłem poniżej w tekście niemieckim), iż wydaje się rzeczą możliwą, a nawet prawdopodobną, że twierdzenie, które R o s e n t h a l usiłuje udowodnić, nie jest słuszne.

Chciałbym usprawiedliwić publikację tych uwag faktem, iż omawiana praca R o s e n t h a l a jest bardzo często cytowana przez różnych autorów.

Pozwolę sobie wreszcie zaznaczyć, że na jeden z błędów, wyszczególnionych w tekście niemieckim, zwrócił mi łaskawie uwagę prof. H. S t e i n h a u s.

Instytut Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu J. Kaz. we Lwowie.

Rękopis otrzymany dn. 27 lutego 1932.

Wie bekannt, lautet die Quasiergodenhypothese folgendermassen: Die Phasenkurve eines ungestörten mechanischen Systems soll bei unbegrenzter Fortsetzung jedem Punkt der Energiefläche (der im Phasenraume einen physikalisch möglichen Zustand darstellt) beliebig nahe kommen.

A. R o s e n t h a l[1]) versuchte zu beweisen, dass die Quasiergodenhypothese für die physikalischen Anwendungen ausreicht, d. h.,

[1]) A. R o s e n t h a l, Aufbau der Gastheorie mit Hilfe der Quasiergodenhypothese, Ann. d. Phys. *43*, 894, 1914.

dass man auf Grund dieser Hypothese den Beweis führen kann, dass die Zeitmittelwerte durch die Scharmittelwerte ersetzt werden können. Da die genannte Arbeit von vielen Autoren zitiert wird, erscheint es nicht unzweckmässig, darauf hinzuweisen, dass der Rosenthalsche Beweis illusorisch ist und dass die Möglichkeit der Ausfüllung der im Beweise vorhandenen Lücken wenig wahrscheinlich erscheint.

Es soll nun im folgenden auf zwei prinzipielle Fehler des Rosenthalschen Beweises hingewiesen werden.

α_1 und α_2 bilden zwei auf der Energiefläche liegende isometrische Gebiete, wenn

$$\int_{\alpha_1} \frac{1}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{dq_s}{dt}\right)^2 + \Sigma\left(\frac{dp_s}{dt}\right)^2}}\, dS = \int_{\alpha_2} \frac{1}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{dq_s}{dt}\right)^2 + \Sigma\left(\frac{dp_s}{dt}\right)^2}}\, dS$$

(q_s bezeichnen — wie üblich — die generalisierten Koordinaten, p_s die generalisierten Impulse der materiellen Punkte).

Es sei T das Zeitintervall, in welchem die Bewegung des Phasenpunktes längs der Phasenkurve betrachtet wird, und t_1 bzw. t_2 die Verweilzeiten des Phasenpunktes in den Gebieten α_1 bzw. α_2. Dann sollte die Gleichung

$$\lim_{T=\infty} \frac{t_1}{t_2} = 1 \tag{1}$$

gelten.

Wäre (1) bewiesen, dann liesse sich schon leicht der Beweis der Gleichheit der Schar- und Zeit-Mittelwerte erbringen.

Die Relation (1) wurde von Rosenthal in korrekter Weise für die Strömungsröhren bewiesen[1]). Von diesen Strömungsröhren soll dann ein Übergang zu äquivalenten[2]) und von diesen zu isometrischen Gebieten mit Hilfe mengentheoretischer Betrachtungen vollzogen werden. Eben dieser Übergang von äquivalenten zu isometrischen Gebieten enthält einen prinzipiellen Fehler, auf den im folgenden hingewiesen werden soll.

Es seien nun α_1 und α_2 zwei isometrische Gebiete. Mit Hilfe der Quasiergodenhypothese kann immer erreicht werden, dass dem Gebiete α_1 ein äquivalentes Gebiet $\bar{\alpha}_1$ zugeordnet werden kann, so dass $\bar{\alpha}_1$ und α_2 ein gemeinsames Teilgebiet haben. Es existiert also ein Gebiet γ, welches sowohl in $\bar{\alpha}_1$ als auch in α_2 enthalten ist. Wir betrachten nun die Mengen $(\bar{\alpha}_1 - \gamma)$ und $(\alpha_2 - \gamma)$, die gewiss innere Punkte ent-

[1]) l. c. S. 899.

[2]) Zwei isometrische Gebiete heissen äquivalent, wenn das eine Gebiet in das andere durch zeitliche Strömung übergeht.

halten und für die wieder das Verfahren der Aufsuchung gemeinsamer Gebiete in der vorher angegebenen Weise fortgesetzt werden kann. Wenn dieses Verfahren bei einer weiteren n-maligen Fortsetzung abbricht, sind α_1 und α_2 zu einer stückweisen Deckung gebracht worden. Bricht es aber nicht ab, so soll es über die Grenzsummen aller Reste $\Sigma_\omega(\alpha_1)$, $\Sigma_\omega(\alpha_2)$ fortgesetzt werden [1]). In diesem Punkte eben ist der Beweis fehlerhaft. Wie leicht zu sehen ist, kann im allgemeinen der Fall eintreten, dass die oben erwähnten Reste zwar ein positives Mass, jedoch keine innere Punkte haben.

Prof. H. Steinhaus hat mich freundlichster Weise auf einen zweiten Fehler aufmerksam gemacht, der den Übergang von den Strömungsröhren zu den äquivalenten Gebieten betrifft. Zwei äquivalente Gebiete R_1 und R_2 können wir als Summen von Strömungsröhren darstellen:

$$R_1 = \sum_{n=1}^{\infty} K_i^1,$$

$$R_2 = \sum_{n=1}^{\infty} K_i^2,$$

Da (1) für die Strömungsröhren gilt, so ist

$$\lim_{T=\infty} \frac{t_i^1}{t_i^2} = 1, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

wo t_i^1 bzw. t_i^2 die Verweilzeiten des Phasenpunktes in K_i^1 bzw. K_i^2 bezeichnen.

Nun liesse sich aber daraus nicht der Schluss ziehen, dass für die Verweilzeiten t_1 bzw. t_2 des Phasenpunktes in R_1 bzw. R_2 die Relation

$$\lim_{T=\infty} \frac{t_1}{t_2} = 1$$

gelte.

Es folgt also aus der Bemerkung von Prof. Steinhaus, dass die Gültigkeit von (1) weder für isometrische noch für äquivalente Gebiete erbracht wurde.

Es sei noch bemerkt, dass unlängst eine tiefgehende Untersuchung von Birkhoff [2]) erschien, in welcher der Satz (1) unter der Voraussetzung die der Verfasser „strong transitivity" nennt, bewiesen wurde.

Institut für theoretische Physik der Universität Lemberg.

Eingegangen am 27. Februar 1932.

[1]) Näheres darüber vgl. S. 900 l. c.

[2]) G. D. Birkhoff, Proc. Nat. Acad., *17*, 656, 1931.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2