ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

Felix Joachim Wiśniewski.

Wyrażenie liczby i masy fotonów pola elektromagnetycznego w próżni.

Les expressions du nombre et de la masse des photons du champ électromagnétique dans le vide.

S t r e s z c z e n i e.

Jeżeli przez E i H oznaczać będziemy rozwiązania zespolone równań M a x w e l l a w próżni, a przez $\bar{E}$ i $\bar{H}$ rozwiązania zespolone sprzężone z poprzedniemi, to, jak łatwo wykazać, rozwiązania te spełniają dwa następujące równania ciągłości:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{E}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \frac{\bar{E}}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{H}{c^2}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \frac{\bar{H}}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}\right\} = \tag{1}$$
$$= div\left\{\sum_{x,\,y,\,z}(E_s \nabla \bar{E}_s - \bar{E}_s \nabla E_s + H_s \nabla \bar{H}_s - \bar{H}_s \nabla H_s)\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{E\bar{E} + H\bar{H}\right\} + div\left\{c\,[\bar{E}H] + c\,[E\bar{H}]\right\} = o. \tag{2}$$

Interpretację tych dwu równań ciągłości otrzymamy, biorąc pod uwagę, że dla E i H można położyć:

$$E = E_0\,(x, y, z, t)\, e^{-2\pi i \nu\left(t - \frac{n}{c}\right)}; \qquad H = H_0\,(x, y, z, t)\, e^{-2\pi i \nu\left(t - \frac{n}{c}\right)};$$

$$\bar{E} = E_0\,(x, y, z, t)\, e^{2\pi i \nu\left(t - \frac{n}{c}\right)}; \qquad \bar{H} = H_0\,(x, y, z, t)\, e^{2\pi i \nu\left(t - \frac{n}{c}\right)}.$$

Wprowadzając te wyrażenia na E i H do równań (1) i (2), otrzymujemy 1^0 z równania (1), mnożąc je przez $\frac{h}{4\pi i}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{h\nu}{c^2}(E_0^2 + H_0^2)\right\} + div\left\{\nabla n\,\frac{h\nu}{c}(E_0^2 + H_0^2)\right\} = o \tag{3}$$

2^0 z równania (2):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{E_0^2 + H_0^2\right\} + div\left\{2c\,[E_0 H_0]\right\} = o. \tag{4}$$

Biorąc pod uwagę, że $\frac{h\nu}{c^2}$ jest to masa fotonu, a $\frac{h\nu}{c}\cdot\nabla n$ impuls fotonu, możemy interpretować równanie (3) jako wyrażenie zachowania masy fotonów, o ile dla gęstości N_0 fotonów przyjmiemy wyrażenie:

$$N_0 = \varkappa\,(E_0^2 + H_0^2); \qquad (\varkappa\text{—stała}).$$

Biorąc pod uwagę tę definicję gęstości fotonów, otrzymujemy z równania (4) równość:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{N_0\right\} + div\left\{2c\varkappa\,[E_0 H_0]\right\} = 0,$$

która wyraża zachowanie liczby fotonów.

Dla prędkości v fotonów otrzymujemy zatem wyrażenie:

$$v = 2c\,\frac{[E_0 H_0]}{E_0^2 + H_0^2}\,.$$

Zatem równanie (1) wyraża zachowanie masy fotonów, a równanie (2) zachowanie liczby fotonów.

Przyjmując tę interpretację równań (1) i (2) będziemy mieli dla gęstości N_0 fotonów, gęstości ϱ masy fotonów oraz impulsów $\vec{p}$ i prędkości v tychże fotonów następujące wyrażenia:

$$N_0 = \varkappa\,(E\bar{E} + H\bar{H})\,, \tag{6}$$

$$\varrho = \varkappa\,\frac{h}{4\pi i}\left\{\frac{E}{c^2}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \frac{\bar{E}}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{H}{c^2}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \frac{\bar{H}}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}\right\} \tag{7}$$

$$\vec{p} = n\,\frac{h}{4\pi i}\,\frac{1}{\varrho}\left\{\sum_{x,y,z}\left[(E_s\nabla\bar{E}_s - \bar{E}_s\nabla E_s) + (H_s\nabla\bar{H}_s - \bar{H}_s\nabla H_s)\right]\right\} \tag{8}$$

$$\vec{v} = c\,\frac{[E\bar{H}] + [\bar{E}H]}{E\bar{E} + H\bar{H}}\,.$$

Jeżeli w przestrzeni znajdować się będą fotony o różnej częstotliwości, to można wykazać, że rozmieszczenie tych fotonów w przestrzeni jest funkcją perjodyczną.

Rękopis otrzymany dn. 8 czerwca 1931.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

Les équations de Maxwell pour le vide s'écrivent:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} = -\,rot\, E; \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = rot\, H\,. \tag{1}$$

Si E et H sont des solutions imaginaires, les mêmes équations seront satisfaites par les expressions $\bar{E}$ et $\bar{H}$ imaginaires et conjuguées de E et H, de sorte que:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\,rot\, \bar{E}; \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = rot\, \bar{H}\,. \tag{2}$$

A l'aide de (1) et (2) on vérifie aisément la relation:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{E\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \bar{E}\frac{\partial E}{\partial t}\right\} = \sum_{x,y,z}\left\{E_s\nabla^2\bar{E}_s - \bar{E}_s\nabla^2 E_s\right\},$$

d'où, en remarquant que:

$$\bar{E}_s\nabla^2 E_s = div\{\bar{E}_s\nabla E_s\} - \nabla E_s\nabla\bar{E}_s\,,$$

$$E_s\,\nabla^2 \bar{E}_s = div\{E_s\nabla \bar{E}_s\} - \nabla E_s\nabla\bar{E}_s\,,$$

on obtient:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{E\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \bar{E}\frac{\partial E}{\partial t}\right\} = div\left\{\sum_{x,y,z}(E_s\nabla\bar{E}_s - \bar{E}_s\nabla E_s)\right\}.$$

De la même manière on vérifie que.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{H\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \bar{H}\frac{\partial H}{\partial t}\right\} = div\left\{\sum_{x,y,z}(H_s\nabla\bar{H}_s - \bar{H}_s\nabla H_s)\right\}.$$

En ajoutant ces équations on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{E}{c^2}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} - \frac{\bar{E}}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{H}{c^2}\frac{\partial\bar{H}}{\partial t} - \frac{\bar{H}}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}\right\} =$$

$$= div\left\{\sum_{x,y,z}\Big(E_s\nabla\bar{E}_s - \bar{E}\nabla E_s + H_s\nabla\bar{H}_s - \bar{H}_s\nabla H_s\Big)\Big]\right\}. \tag{3}$$

On peut mettre cette équation aussi sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{E\bar{E}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}log\frac{\bar{E}}{E} + \frac{H\bar{H}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\,log\frac{\bar{H}}{H}\right\} = div\left\{\sum_{x,y,z}\left(E_s\bar{E}_s\nabla\,log\frac{\bar{E}_s}{E_s} + H_s\bar{H}_s\nabla\,log\frac{\bar{H}_s}{H_s}\right)\right\}. \tag{3a}$$

D'autre part, les équations (1) et (2) conduisent à la relation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(E\bar{E} + H\bar{H}) + div\{c[\bar{E}H] + c[E\bar{H}]\} = 0\,. \tag{4}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

Nous avons donc deux relations entre les composantes du champ électromagnétique qui ont la forme des équations de continuité.

On cherchera maintenant le sens physique de ces relations.

Comme E et H sont des imaginaires, on peut poser:

$$E = E_0\,(t, x, y, z)\, e^{-2\pi i \nu\left(t-\frac{n}{c}\right)};\quad H = H_0\,(t, x, y, z)\, e^{-2\pi i \nu\left(t-\frac{n}{c}\right)}$$

$$\overline{E} = E_0\,(t, x, y, z)\, e^{2\pi i \nu\left(t-\frac{n}{c}\right)};\quad \overline{H} = H_0\,(t, x, y, x)\, e^{2\pi i \nu\left(t-\frac{n}{c}\right)}.$$

En introduisant ces expressions de E et H dans (3) et multipliant par $\frac{h}{4\pi i}$, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{h\nu}{c^2}\,(E_0^2 + H^2)\right\} + div\left\{\frac{h\nu}{c}\,(E_0^2 + H_0^2)\,\nabla n\right\} = 0. \qquad (5)$$

En les introduisant dans (4), on trouve:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{E_0^2 + H_0^2\} + div\{2c\,[E_0 H_0]\} = 0. \qquad (6)$$

Vu que $\frac{h\nu}{c^2}$ est la masse du photon et $\frac{h\nu}{c}\,\nabla n$ — la quantité de mouvement du photon, on doit interpréter l'équation (5) comme l'équation qui exprime la conservation de la masse des photons si l'on prend pour mesure de la densité du nombre des photons la grandeur $(E_0^2 + H_0^2)$.

En désignant par N_0 la densité des photons on aura alors:

$$N_0 = \varkappa\,(E_0^2 + H_0^2).$$

En tenant compte de cette expression de la densité des photons dans l'équation (6) on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{N_0\right\} + div\left\{2\,c\,\varkappa\,[E_0\,H_0]\right\} = 0. \qquad (7)$$

Cette équation exprime alors la conservation du nombre de photons.

Pour la vitesse des photons on trouve l'expression:

$$v = 2\,c\,\frac{[E_0\,H_0]}{E_0^2 + H_0^2}. \qquad (8)$$

On est donc conduit à admettre que pour les solutions imaginaires des équations de Maxwell dans le vide l'expression (3) exprime la conservation de la masse des photons dans le vide et l'expression (4) la conservation du nombre des photons dans le vide.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

On doit alors poser pour la densité N_0 du nombre des photons, pour la densité ϱ de la masse des photons, pour la quantité de mouvement p d'un photon et pour la vitesse v des photons les expressions suivantes:

$$N_0 = \varkappa\,(E\overline{E}+H\overline{H})\,, \tag{9}$$

$$\varrho = \varkappa\frac{h}{4\pi i}\left\{\frac{E}{c^2}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}-\frac{\overline{E}}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{H}{c^2}\frac{\partial\overline{H}}{\partial t}-\frac{\overline{H}}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t}\right\}\,, \tag{10}$$

$$\vec{p} = \varkappa\frac{\lambda}{4\pi i}\frac{1}{\varrho}\left\{\sum_{x,y,z}(E_s\nabla\overline{E}_s-\overline{E}_s\nabla E_s+H_s\nabla\overline{H}_s-\overline{H}_s\nabla H_s)\right\}\,, \tag{11}$$

$$v = c\cdot\frac{[E\overline{H}]+[\overline{E}H]}{E\overline{E}+H\overline{H}}\,. \tag{12}$$

Si nous avons plusieurs sortes de photons de différentes fréquences ν_j on aura:

$$E = \Sigma E_{oj}\,e^{-2\pi i\nu_j\left(t-\frac{n_j}{c}\right)}\,,$$

$$H = \Sigma H_{oj}\,e^{-2\pi i\nu_j\left(t-\frac{n_j}{c}\right)}\,.$$

En introduisant ces expressions de E et H dans (9) et (10) on obtient pour les densités de la masse et du nombre de photons:

$$N_o = \varkappa\sum_j\left\{E^2_{oj}+H^2_{oj}+\sum_m(E_{oj}E_{om}+H_{oj}H_{om})\cos 2\pi\left[(\nu_j-\nu_m)\,t-\frac{n_i\nu_j-n_m\nu_m}{c}\right]\right\},$$

$$\varrho = \varkappa\sum_j\left\{\frac{h\nu_j}{c^2}\left[E^2_{oj}+H^2_{oj}+\sum_m(E_{oj}E_{om}+H_{oj}+H_{om})\cos 2\pi\left[(\nu_j-\nu_m)\,t-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{n_i\nu_j-n_m\nu_m}{c}\right]\right]\right\}\,.$$

Pour la densité partielle du nombre de photons de fréquence ν_j on doit poser:

$$N_{oj} = \varkappa\left\{E^2_{oj}+H^2_{oj}+\sum_m(E_{oj}E_{om}+H_{oj}H_{om})\cos 2\pi\left[(\nu_j-\nu_m)\,t-\frac{n_j\nu_j-n_m\nu_m}{c}\right]\right\}\,.$$

Il suit de ces expressions que s'il y a plusieurs sortes de photons de fréquences différentes, la densité partielle N_{oj} de chaque sorte de photons dépend des composantes des champs des photons étrangers et elle est une fonction périodique du temps et dans l'espace.

Manuscrit reçu le 8 juin 1931.