ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

S. E. Szczeniowski i L. Infeld.

O wpływie chmury elektronowej na strukturę fali de Broglie'a[1].

The influence of space charge on the structure of de Broglie waves.

S u m m a r y.

The present paper endeavors to ascertain the eventual influence of the space charge due to the electrons themselves upon the structure of a plane de B r o g l i e wave.

The potential Φ of the space charge can be computed by means of the P o i s s o n equation which in the one-dimensional case considered here takes the form

$$\frac{d^2 \Phi}{d x^2} = 4 \pi \varrho . = \frac{4 \pi j}{v} . \tag{1}$$

In the above equation ϱ stands for the absolute value of the space charge density, j for the electron current density and v for the electron velocity, which is given by the equation

$$\frac{1}{2} m_0 v_0^2 - \frac{1}{2} m_0 v^2 = - e \Phi . \tag{2}$$

We will assume that the electrons are moving freely in the space

$$- d \leqq x \leqq + d \tag{3}$$

and that for $x = \pm d$

$$\Phi = 0. \tag{4}$$

In the experiments on the diffraction of electron beams this corresponds to the beam going through the field free space between the slit, which the electrons are leaving with the velocity v_0, and the surface of the diffracting crystal.

---

[1]) Obszerniejszy tekst angielski tej pracy ukaże się w Bull. Acad. Pol.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

To simplify the calculations it will be assumed that

$$\frac{v_0 - v}{v_0} \ll 1. \tag{5}$$

which is true for most experimental cases. Under this assumption the equation *(1)* takes the form

$$\frac{d^2 \Phi}{d x^2} = 4\pi \varrho_0 \left(1 - \frac{e\,\Phi}{m_0 v_0^2}\right); \quad \varrho_0 = \frac{j}{v_0}. \tag{6}$$

A sufficiently approximate solution of this equation for

$$d \ll \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m_0}{\pi \varrho_0 e}} \tag{7}$$

(which is equivalent to (5)), is

$$\Phi = 2\pi \varrho_0 x^2 - 2\pi \varrho_0 d^2. \tag{8}$$

On the whole, the inequality (7) is true for the experiments on the diffraction of electrons. As an example we can take the data from a paper of D a v i s s o n and G e r m e r[1])

$$\left.\begin{aligned} j &= \frac{I}{s} = \frac{10^{-6}}{10^{-2}} = 10^{-4}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}^2}, \\ 2d &= 0{,}7\ \mathrm{cm}, \\ v &= 10^9\ \mathrm{cm/sek}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(I intensity of the electron current, s the area of the slit). We find

$$0{,}35 = d \ll \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m_0}{\pi \varrho_0 e}} \cong 25. \tag{10}$$

The S c h r ö d i n g e r equation which takes into account the influence of the space charge is

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2}\left(E - 2\pi\varrho_0 e d^2 + 2\pi\varrho_0 e x^2\right)\psi = 0. \tag{11}$$

The exact solution of this equation can be expressed by means of the confluent hypergeometric (or parabolic cylinder) functions. An approximate solution consistent with the inequalities (5) or (7) is given by:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= e^{-i\left(\frac{B^2 x^3}{24A} + Ax\right)} \\ A &= \frac{2\pi}{h}\sqrt{2m_0\left(E - 2\pi\varrho_0 e d^2\right)}\ ; \quad \frac{B^2}{4} = \frac{16\pi^3 \varrho_0 e m_0}{h^2} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

---

[1]) L. H. D a v i s s o n and C. G e r m e r : Phys. Rev. *30*, 705, 1927.

The complete wave function u which corresponds to the equation (11) is therefore

$$u = \psi e^{i 2\pi\nu t} = e^{-i\frac{B^2 x^3}{24A}} e^{+i\left\{\frac{2\pi}{h}(E-\Delta E)\, t - Ax\right\}} \tag{13}$$

where

$$\Delta E = 2\pi\varrho_0 e d^2 \, . \tag{14}$$

I. The equation (13) indicates that the influence of space charge causes a decrease of energy of the electron, *i.e.* an increase of the wavelength of the corresponding de Broglie wave. On the other hand, as the refractive index of crystals for the de Broglie waves is larger than unity, the electron wave going through a crystal undergoes a decrease of the length of wave. The wavelength of the undisturbed electron wave is

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} \; ; \tag{15}$$

let $\bar\lambda - \lambda$ be the change due to the influence of space charge and Λ the resultant length of wave in the crystal. Then

$$\left.\begin{aligned} \frac{\bar\lambda}{\lambda} - 1 &= \frac{\Delta E}{2E} = \frac{2\pi j e d^2}{m_0 v_0^3} \, , \\ n &= \frac{\lambda}{\Lambda} = 1 + \frac{K - \Delta E}{2E} \, , \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

where n is the experimentally observed value of the refractive index and K the additional potential energy of electron in crystal.

On the whole ΔE is small compared with K. However, K is a constant, whereas ΔE increases with the intensity of electron current, the distance traversed through the space charge and the inverse of the velocity of the electrons. It is therefore possible in some (on the whole exceptional) cases, that ΔE can become to be comparable with K. A further decrease of energy of the electrons can therefore cause a decrease (instead of an increase) of the observed refractive index which would mean something like of anomalous dispersion. Davisson and Germer in one of their experiments on the diffraction of electrons[1]) have observed an analogous case for electrons of comparatively small velocity. It is clear that special experiments would be needed to show that the suggested explanation of the anomalous dispersion of electron waves

---

[1]) L. H. Davisson and C. Germer: Proc. Nat. Acad. *14*, 619, 1928.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

is true. The experiments of Davisson and Germer give only some indication that this might be possible.

2. Instead of a plane wave as in the case of undisturbed problem we get a wave with a group structure. Let $\triangle x_0$ designate the length of the group in the neighborhood of x_0. We find:

$$\triangle x_0 = \frac{8\pi A}{B^2 x_0^2} \,. \tag{17}$$

For $x = d$, that is in the immediate neighborhood of the crystal surface, the length of the group becomes

$$\triangle x_d = \frac{8\pi A}{B^2 d^2} \,. \tag{18}$$

The existence of this group structure causes a diffuseness of the diffracted beams, which is measured by the ratio $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$. It can be shown that

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \triangle x_d \cong 1 \tag{19}$$

and therefore

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\triangle x_d} = \frac{4\pi j e d^2}{m_0 v^3} = \frac{\triangle E}{E} = \frac{2(\lambda - \lambda)}{\lambda} \,. \tag{20}$$

We see that both the widening of the diffracted electron beam and the shift to the longer wavelengths caused by the space charge are of the same order of magnitude. The computation of the value of $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ on the basis of above cited experimental data of Davisson and Germer leads to the value 10^{-4}. The observed value 0,07 was incomparably larger. It follows that in this case the influence of both the space charge and the crystal de not suffice to explain the observed width of the diffracted electron beams[1]). Nevertheless, the influence of space charge could become quite marked for larger values of the intensity of electron beam and greater length of the field free space traversed by the electrons, as is the case in some of the experiments on the diffraction of electrons.

Lwow, Institute of Theoretical Physics of the University.

Received 23 June 1931.

[1]) L. Infeld, Bull. Acad. Pol. March, 1931.

§ 1. Z równania S c h r ö d i n g e r a

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{8\pi^2 m_0}{h^2}(E-V)\,\psi=0, \tag{1}$$

otrzymujemy w przypadku najprostszym

$$V=0,$$

funkcję falową, odpowiadającą elektronom poruszającym się ruchem jednostajnym, w kierunku osi x, z prędkością

$$v_0=\sqrt{\frac{2E}{m_0}}.$$

Zakładając $V=0$, zaniedbujemy tem samem działanie ładunków przestrzennych, tworzących się w przestrzeni wolnej od działania pól zewnętrznych. Praca niniejsza usiłuje dać odpowiedź na pytanie, czy i w jakim stopniu działania tych ładunków przestrzennych wpłyną na strukturę fali d e B r o g l i e'a.

Obliczamy potencjał Φ, utworzony przez chmurę elektronową, na podstawie równania P o i s s o n a:

$$\nabla^2\Phi=4\pi\varrho, \tag{2}$$

jeżeli przez ϱ oznaczamy b e z w z g l ę d n ą wartość gęstości ładunków przestrzennych. Zakładając zależność Φ oraz ϱ jedynie od x (jeżeli prędkość elektronów skierowana jest wzdłuż osi x), otrzymujemy z (2):

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}=4\pi\varrho=4\pi\frac{j}{v}. \tag{3}$$

W równaniu ostatniem oznaczono przez j gęstość prądu elektronowego, przez v prędkość elektronów (obydwie wielkości zależne tylko od x). Pomiędzy prędkością v_0, a prędkością w danym punkcie, zachodzi związek:

$$\frac{1}{2}m_0 v_0^2-\frac{1}{2}m_0 v^2=-e\Phi. \tag{4}$$

(e jest bezwzględną wartością ładunku elektronowego).

Z równań (3) i (4) znajdujemy pod warunkiem $\frac{v_0-v}{v_0}\ll 1$:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}=4\pi\varrho_0\left(1-\frac{e\Phi}{m_0 v_0^2}\right);\qquad \varrho_0=\frac{j}{v_0}. \tag{5}$$

Całkę ogólną tego równania stanowi wyrażenie:

$$\Phi=\frac{m_0 v_0^2}{e}+a\sin\frac{2}{v_0}\sqrt{\frac{\pi\varrho_0 e}{m_0}}\,x+b\cos\frac{2}{v_0}\sqrt{\frac{\pi\varrho_0 e}{m_0}}\,x. \tag{6}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

Zarówno równanie (5), jak i wyrażenie (6), określone są dla wszystkich wartości na x, spełniających nierówność

$$-d \leqq x \leqq d. \tag{7}$$

Przez $2d$ oznaczamy odległość pomiędzy powierzchniami, ograniczającemi przestrzeń wolną od działania pól zewnętrznych, t. j. pomiędzy szczeliną, którą opuszczają elektrony z prędkością v_0, a powierzchnią kryształu. Zakładamy, że

$$d \ll \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m_0}{\pi \varrho_0 e}}. \tag{8}$$

Rozważania następne odnosić się będą tylko do wypadków, dla których nierówność powyższa jest spełniona.

W doświadczeniach nad ugięciem elektronów jest istotnie nierówność (8) naogół spełniona. Podajmy dla przykładu dane zaczerpnięte z pracy Davissona i Germera:[1])

$$\left.\begin{array}{l} j = \dfrac{I}{s} = \dfrac{10^{-6}}{10^{-2}} = 10^{-4}\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}^2} \\ 2d = 0{,}7 \text{ cm} \\ v = 10^9 \dfrac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sek}}\,. \end{array}\right\} \quad 9)$$

(I = natężenie prądu elektronowego, s = powierzchnia szczeliny). Mamy w tym wypadku:

$$0{,}35 = d \ll \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m_0}{\pi \varrho_0 e}} \cong 25 \tag{10}$$

Rozwińmy wyrażenie (6) na szereg. Ze względu na (8) uwzględniamy tylko dwa pierwsze wyrazy w rozwinięciu funkcyj sin i cos. W wypadku przez nas rozpatrywanym, warunki graniczne są zupełnie określone i dane przez doświadczenie. Stałe dowolne a, b, wyznaczamy z warunku, by zarówno szczelina którą elektrony opuszczają, z prędkością v_0 jak i powierzchnia kryształu, posiadały potencjał równy zeru, t. zn., by

$$\Phi = 0, \text{ dla } x = \pm d. \tag{11}$$

Wyrażenie

$$\Phi = 2\pi\varrho_0 x^2 - 2\pi\varrho_0 d^2 \tag{12}$$

jest przybliżonem rozwiązaniem równania (5), spełniającem zadane warunki graniczne, pod warunkiem, że zachodzi nierówność (8).

---

[1]) L. H. Davisson and C. Germer: Phys. Rev. 30, 705, 1927.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

§ 2. Równanie S c h r ö d i n g e r a, uwzględniające działanie chmury elektronowej, posiada postać następującą:

$$\frac{d^2 \psi}{d x^2} + \frac{8 \pi^2 m_0}{h^2} (E + e \Phi) \psi = 0. \tag{13}$$

Po podstawieniu wyrażenia na Φ, znajdujemy:

$$\frac{d^2 \psi}{d x^2} + \frac{8 \pi^2 m_0}{h^2} (E - 2 \pi \varrho_0 e d^2 + 2 \pi \varrho_0 e x^2) \psi = 0. \tag{14}$$

Równanie powyższe określone jest tylko dla x zawartego w granicach $(-d, +d)$. Napiszemy (14) w postaci:

$$\frac{d^2 \psi}{d x^2} + \frac{8 \pi^2 m_0}{h^2} (E - \triangle E + 2 \pi \varrho_0 e x^2) \psi = 0, \tag{15}$$

gdzie

$$\triangle E = 2 \pi \varrho_0 e d^2. \tag{16}$$

Wnioskujemy z ostatnich dwóch równań, że działanie chmury elektronowej ujawni się w zmniejszeniu częstości, a więc w p r z e s u n i ę c i u f a l i w k i e r u n k u w i ę k s z y c h d ł u g o ś c i. Kryształ i chmura elektronowa przesuwają falę w kierunkach przeciwnych; kryształ w kierunku fal krótszych, chmura elektronowa w kierunku fal dłuższych. Oznaczamy przez λ długość fali, odpowiadającą prędkości v_0 elektronów $(\lambda = \frac{h}{m_0 v})$, przez $\bar{\lambda} - \lambda$ przesunięcie dokonane działaniem chmury elektronowej, a wreszcie przez Λ zaobserwowaną długość fali, a więc uzyskaną po uwzględnieniu zarówno działania kryształu, jak i chmury elektronowej. Mamy wówczas:

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} - 1 = \frac{\triangle E}{2 E} = \frac{2 \pi j e d^2}{m_0 v_0^3}, \tag{17}$$

$$n = \frac{\lambda}{\Lambda} = 1 + \frac{K - \triangle E}{2 E}, \tag{18}$$

jeżeli przez n oznaczymy w y p a d k o w y spółczynnik załamania, a przez K dodatkowy potencjał siatki krystalicznej.

$\triangle E$ jest naogół małe w stosunku do K. Potencjał K jest jednakże stały, a $\triangle E$ rośnie, gdy maleje prędkość elektronów, oraz gdy rośnie natężenie prądu i długość drogi przebytej przez elektron poprzez chmurę elektronową. $\triangle E$ może więc w pewnych (naogół wyjątkowych) wypadkach być tego samego rzędu co K. Dalsze przejście do mniejszych prędkości spowodować może z j a w i s k o d y s p e r s j i a n o m a l n e j.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

Istotnie Davisson i Germer stwierdzili[1]) w jednej z prac swych analogiczne zjawisko, zachodzące dla małych stosunkowo prędkości elektronów. Jasną jest rzeczą, że ewentualne potwierdzenie uzyskanych tutaj wniosków wymagałoby specjalnych doświadczeń. Doświadczenia Davissona i Germera dają (nikłą zresztą) wskazówkę, że efekt tego rodzaju jest możliwy.

§ 3. Przechodzimy do rozwiązania równania (15). Napiszmy je w formie:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left(A^2 + \frac{B^2}{4} x^2\right) \psi = 0, \tag{19}$$

gdzie

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= \frac{8 \pi^2 m_0}{h^2} (E - 2\pi \varrho_0 e d^2), \\ \frac{B^2}{4} &= \frac{16\pi^3 \varrho_0 e m_0}{h^2}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Podstawiając

$$z = \sqrt{-i}\, Bx, \quad 2k = \frac{A}{B} i, \tag{21}$$

otrzymujemy:

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \left(2k - \frac{z^2}{4}\right) \psi = 0. \tag{22}$$

Rozwiązanie równań (22) możemy napisać explicite za pośrednictwem zwyrodniałych szeregów hypergeometrycznych: [2])

$$\psi = a z^{-\frac{1}{2}} M_{k, -\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} z^2\right) + b z^{-\frac{1}{2}} M_{k, \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} z^2\right). \tag{23}$$

gdzie $M_{k, m}$ jest określone przez:

$$M_{k, m}(y) = y^{\frac{1}{2} + m} e^{-\frac{1}{2} y} \times$$
$$\times \left\{ 1 + \frac{\frac{1}{2} + m - k}{1!(2m+1)} y + \frac{(\frac{1}{2} + m - k)(\frac{3}{2} + m - k)}{2!(2m+1)(2m+2)} y^2 + \dots \right\} \tag{24}$$

Uzyskana tutaj funkcja ψ posiada postać zawiłą, utrudniającą wyciągnięcie dalszych wniosków fizykalnych. Możemy jednakże w prosty sposób zorjentować się w charakterze rozwiązania równania (19). Napiszmy w tym celu raz jeszcze równanie (19) w formie:

---

[1]) L. H. Davisson and C. Germer: Proc. Nat. Acad. 619, 1928.
[2]) Whittaker and Watson: Modern Analysis, 1920, 336.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

$$\frac{A^2\psi}{dx^2} + A^2(1 + \lambda x^2)\,\psi = 0,$$

gdzie (25)

$$\lambda = \frac{B^2}{4A^2}.$$

Podstawiamy

$$\psi = e^{-iAx + \lambda\varphi}, \tag{26}$$

zakładając, że A jest bardzo duże, oraz $\lambda \ll 1$. W pierwszem przybliżeniu znajdujemy:

$$\varphi = -\frac{i x^3}{6} A, \tag{27}$$

a więc

$$\psi = e^{-i\left(Ax + \frac{B^2}{24A}x^3\right)}, \tag{28}$$

a stąd funkcja falowa

$$u = \psi e^{i2\pi\nu t} = e^{-\frac{iB^2x^3}{24A}} e^{+i\left\{\frac{2\pi}{h}(E - \Delta E)t - Ax\right\}}. \tag{29}$$

W miejsce fali płaskiej, jak w przypadku zagadnienia niezakłóconego, uzyskujemy falę o s t r u k t u r z e g r u p o w e j. Oznaczmy przez Δx_0 rozmiary grupy utworzonej w sąsiedztwie punktu x_0. Znajdujemy:

$$\Delta x_0 = \frac{8\pi A}{B^2 x_0^2}. \tag{30}$$

W sąsiedztwie kryształu, a więc dla $x = d$, wyniosą rozmiary grupy:

$$\Delta x_d = \frac{8\pi A}{B^2 d^2}. \tag{31}$$

Istnienie tych grup spowoduje rozszerzenie linij ugięcia. Miarą tego rozszerzenia jest stosunek $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$. Pomiędzy $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, a Δx_d, zachodzi związek:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\Delta x_d = 1, \tag{32}$$

a więc:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta x_d} = \frac{4\pi j\, e\, d^2}{m_0 v^3} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{2(\lambda' - \lambda)}{\lambda}. \tag{33}$$

Zarówno uzyskane tutaj rozmycie linij, jak i przesunięcie w kierunku fal dłuższych, wywołane działaniem chmury elektronowej, są t e g o

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 1–2

samego rzędu. Obliczając dla przykładu na podstawie danych wypisanych w § 1 stosunek $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$, znajdujemy, że jest on rzędu 10^{-4}. Rozmycie zaobserwowane wynosiło w tym wypadku bezporównania więcej, a mianowicie 0,07. Zarówno działanie chmury elektronowej, jak i działanie kryształu, nie tłumaczą nam wielkiego stosunkowo rozmycia linij ugięcia fali elektronowej. [1])

Lwów, Instytut Fizyki Teoretycznej U. J. K.

Rękopis otrzymany dn. 23 czerwca, 1931.

[1]) L. Infeld: Bull. Acad. Pol., Mars 1931.