ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

S. Szczeniowski.

Zur Frage des Übergangs der Elektronen in das Gebiet der negativen Energiewerte.[1]

Prawdopodobieństwo przejścia elektronu do obszaru ujemnej energji.[2]

Streszczenie.

Celem pracy niniejszej jest efektywne obliczenie dla jednowymiarowego ruchu elektronu prawdopodobieństwa przejścia do obszaru ujemnej energji całkowitej, przy założeniu, że zmiana energji potencjalnej w obszarze przejściowym odbywa się w sposób ciągły.

W pierwszej części pracy zostają znalezione przybliżone asymptotyczne wyrażenia na Diracowskie funkcje falowe dla problemów jednowymiarowych, w których potencjał elektrostatyczny dany jest przez dowolną funkcję ciągłą. Wyrażenia te otrzymuje się przez zastosowanie do równań falowych Diraca metody Wentzla-Brillouina, stosowanej dotychczas tylko do równania Schrödingera. Zostaje przytem wykazane, w jaki sposób należy łączyć ze sobą przybliżone wyrażenia, ważne w różnych obszarach, tak, aby odpowiadały one jednemu i temu samemu ścisłemu rozwiązaniu równania Diraca. Używa się w tym celu metody, wzorowanej na analogicznej pracy Kramersa, odnoszącej się do równania falowego Schrödingera.

Otrzymane wzory ogólne zostają w drugiej części pracy zastosowane do interesującego nas tutaj zagadnienia przejścia elektronu do obszaru ujemnej energji całkowitej, przy założeniu, że w obszarze przejściowym energja potencjalna dana jest przez dowolną niemalejącą funkcję ciągłą. Aby uzyskać przejście elektronu do obszaru energji ujemnej, musimy w obszarze przejściowym zwiększyć jego energję potencjalną przynajmniej o $2mc^2$. Rachunek, przeprowadzony przy pomocy przybliżonych asymptotycznych wyrażeń na funkcje falowe, uzyskanych w pierwszej części pracy, prowadzi do wzoru, z którego wynika, że szukane prawdo-

[1]) Vorgetragen bei der VI. Tagung der Poln. Physiker in Warschau, Sept. 1932.

[2]) Praca referowana na VI Zjeździe Fizyków Polsk. w Warszawie, we wrześniu 1932.

podobieństwo przejścia osięga tylko wówczas wartości nie znikomo małe, gdy energja potencjalna elektronu wzrasta w obszarze przejściowym o $2mc^2$ na odcinku, porównywalnym z h/mc. Wynik ten potwierdza przypuszczenie, wypowiedziane przez Bohra i zgadza się z rezultatami, otrzymanemi przez Solomona.

Instytut Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu J. Kaz. we Lwowie.

Rękopis otrzymany dn. 7 listopada 1932.

Wie bekannt, wurde zuerst von O. Klein gezeigt,[1] dass die Schwierigkeiten, die mit der Existenz der negativen Energiezustände in der relativistischen Wellenmechanik zusammenhängen, schon im einfachen Falle des Elektronendurchgangs durch einen Potentialsprung deutlich zutage treten. Bei genügend hohem Potentialsprung erhält man eine unerwartet hohe Wahrscheinlichkeit für den Übergang der Elektronen in das Gebiet der negativen Energiewerte.

Der Umstand, dass der Durchlasskoeffizient einer Potentialschwelle in diesem Falle so hohe Werte annehmen kann, hat Bohr zu der Vermutung veranlasst, dass solche Werte nur durch die Annahme eines unstetigen Potentialsprunges, d. h. einer unendlich hohen Feldstärke, bedingt sind. Man sollte, nach Bohr, im allgemeinen nur dann nicht verschwindend kleine Übergangswahrscheinlichkeiten erwarten, wenn der Potentialanstieg so steil ist, dass die Potentialenergie des Elektrons auf einer Strecke von der Grössenordnung h/mc um Beträge ansteigt, die mit seiner Ruhenergie mc^2 vergleichbar sind.

Die genaue Durchrechnung des Falles, wo die Potentialenergie des Elektrons in dem Schwellengebiet linear ansteigt, d. h. das elektrische Feld homogen ist, wurde von F. Sauter[2]) sowie von dem Verfasser[3]) gegeben. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind mit der Vermutung Bohrs im Einklang. Der Durchlasskoeffizient ergibt sich gleich $e^{-k^2\pi} = D$, wo $k = \sqrt{\frac{2\pi c}{heF}}$ (F — die elektrische Feldstärke), oder, wenn F in Volt/cm angegeben wird, $k = \frac{1{,}15.10^8}{\sqrt{F}}$ ist. Man sieht, dass man merkliche Werte von D nur für Feldstärken, die mindestens von der Grössenordnung $10^{15}\,\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ sind, bekommt, da für solche Feldstärken

---

[1]) O. Klein, ZS. f. Phys. *53*, 157, 1929.

[2]) F. Sauter, ZS. f. Phys. *69*, 742, 1931.

[3]) S. Szczeniowski, C. R. Soc. Pol. de Phys. *V*, 215, 1931; ZS. f. Phys. *73*, 553, 1931.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

k^2 mit 1 vergleichbar wird. Dann ist wirklich $\frac{heF}{mc}$ vergleichbar mit $4\pi^2 mc^2$, d. h. der Potentialenergieanstieg wird auf einer Strecke von der Comptonwellenlänge mit mc^2 vergleichbar. Ein analoges Resultat erhielt F. Sauter[1]) auch für den Fall, wo die Potentialenergie gemäss der Formel $P = \frac{P_0}{2}\, tgh\, \frac{ax}{2}$ ansteigt.

Man kann die Frage der Übergangswahrscheinlichkeit der Elektronen in das Gebiet der negativen Energiewerte noch von einem anderen Standpunkt aus betrachten. Schrödinger[2]) hat gezeigt, dass jeder der Operatoren, die in den Gleichungen der relativistischen Wellenmechanik auftreten, in zwei Teile zerspalten werden kann, die er „gerade" und „ungerade" nennt. Die Anwendung der geraden Operatoren führt nur zu Übergängen von positiven zu positiven, oder von negativen zu negativen Energiezuständen. Die ungeraden Operatoren dagegen, und nur diese, vermitteln Übergänge von positiven zu negativen Energiezuständen oder umgekehrt. Die oben zitierten Ergebnisse der Rechnungen für $P = eFx$ und $P = \frac{P_0}{2}\, tgh\, \frac{ax}{2}$ zeigen, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten für ungerade Teile der entsprechenden Operatoren nur bei sehr starken Feldintensitäten nicht verschwindend kleine Werte erreichen. Der Bohr schen Vermutung nach sollte dasselbe für alle Operatoren gelten. J. Solomon[3]) hat unlängst den Beweis dieser Behauptung erbracht. Er gibt aber den Gang der Beweisführung nicht an.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst die angenäherte Brillouin-Wentzel sche Methode der Berechnung der Wellenfunktion im eindimensionalen Falle auf die Dirac sche Wellengleichung angewandt. Mittels der erhaltenen Formeln wird dann der Durchlasskoeffizient der beliebig gestalteten Potentialenergieschwelle für den Übergang der Elektronen in das Gebiet der negativen Energiezustände berechnet. Das Ergebnis der Rechnung weist volle Übereinstimmung mit der Bohr schen Vermutung und dem Resultat von Solomon auf. Übrigens kann man mit Hilfe dieser angenäherten Ausdrücke die Durchlasskoeffizienten der beliebig gestalteten und beliebig hohen Potentialschwellen bei Anwendung der Dirac schen Wellengleichung berechnen, in der Weise, wie es N. H. Frank und L. A. Young[4]) mit Hilfe der Schrödinger schen Wellengleichung getan haben.

---

1) F. Sauter, ZS. f. Phys. *73*, 547, 1931.
2) E. Schrödinger, Berl. Ber. 1931, 63.
3) J. Solomon, J. de Phys. *2*, 321, 1931, (VII S.).
4) N. H. Frank und L. A. Young, Phys. Rev. *38*, 80, 1931.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

Es soll also die D i r a c sche Wellengleichung im eindimensionalen Falle betrachtet werden. Das Elektron befindet sich im elektrischen Felde, seine Potentialenergie sei gleich $P(x)$, wobei $P(x)$ eine stetige Funktion von x sein soll. Die D i r a c sche Gleichung hat in diesem Falle folgende Form:

$$\left[\frac{W - P(x)}{c} + \alpha_1 \frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dx} + \alpha_4 mc\right]\psi(x) = 0 \,. \tag{1}$$

Es genügt hier für α_1 und α_4 zweireihige Matrizen einzusetzen, die die Beziehung $\alpha_1\alpha_4 + \alpha_4\alpha_1 = 0$ erfüllen. Man kann dann

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

setzen. Es sind also zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen:

$$\begin{aligned} \frac{W - P(x)}{c}\psi_1 + \frac{h}{2\pi i}\frac{d\psi_1}{dx} + mc\,\psi_2 &= 0, \\ \frac{W - P(x)}{c}\psi_2 - \frac{h}{2\pi i}\frac{d\psi_2}{dx} + mc\,\psi_1 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Durch Elimination von ψ_1 bzw. ψ_2 bekommt man daraus:

$$\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \left\{\left[\frac{W - P(x)}{c}\right]^2 - m^2c^2 + \frac{h}{2\pi ic}\frac{dP(x)}{dx}\right\}\psi_1 = 0, \tag{4'}$$

$$\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \left\{\left[\frac{W - P(x)}{c}\right]^2 - m^2c^2 - \frac{h}{2\pi ic}\frac{dP(x)}{dx}\right\}\psi_2 = 0. \tag{4''}$$

Man kann leicht angenäherte asymptotische Lösungen dieser Gleichungen mittels der B r i l l o u i n - W e n t z e l schen Methode erhalten. Man setzt nämlich:

$$\psi_1 = e^{\frac{2\pi i}{h}\left(S_0 + \frac{h}{2\pi i}S_1 + \dots\right)}\,. \tag{5}$$

Die Gleichung (4′) ergibt dann, indem man die Koeffizienten gleicher Potenzen von $\frac{h}{2\pi i}$ in Betracht zieht:

$$\begin{aligned} \frac{dS_0}{dx} &= \pm\sqrt{\left[\frac{W - P(x)}{c}\right]^2 - m^2c^2}\,; \\ S_1 &= -\frac{1}{2}\ln\frac{dS_0}{dx} \pm \int \frac{P'(x)\,dx}{2c\sqrt{\left[\frac{W - P(x)}{c}\right]^2 - m^2c^2}}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Dieselben Formeln gelten auch für ψ_2, man muss nur im Ausdruck für S_1 die Vorzeichen $\mp$ anstatt $\pm$ vor dem Integralzeichen setzen. Dabei ist zu beachten, dass der Ausdruck (5) sowie der entsprechende Ausdruck für ψ_2 von asymptotischem Charakter sind, genau so, wie die analogen Ausdrücke im Schrödingerschen Falle[1]).

Das hier gebrauchte Näherungsverfahren gilt nur dann, wenn $\frac{h}{2\pi c}\,\frac{dP(x)}{dx}$ klein gegen m^2c^2 ist. Da

$$\frac{dP(x)}{dx} = e\,F(x)$$

ist, wobei $F(x)$ die elektrische Feldstärke im Punkte x bedeutet, so sieht man, dass das benutzte Näherungsverfahren nur dann gilt, wenn

$$\frac{eF(x)\,.\,h}{2\pi mc} \ll mc^2$$

ist, m. a. W., wenn der Anstieg der Potentialenergie auf einer Strecke von der Comptonwellenlänge klein gegen die Ruhenergie des Elektrons ist.

Man ersieht auch leicht, dass für die unmittelbaren Umgebungen derjenigen Punkte, welche die Gleichungen

$$(7) \qquad \left[\frac{W-P(x)}{c}\right]^2 = m^2c^2 \quad \text{und} \quad \frac{W-P(x)}{c} = 0 \qquad (8)$$

erfüllen, die Formel (5) ihre Bedeutung verliert. Für die Punkte, welche der Gleichung (7) entsprechen, werden ψ_1 und ψ_2 unendlich. In der unmittelbaren Umgebung der Punkte, welche die Gleichung (8) erfüllen, kann man ψ_1 und ψ_2 von diesen Punkten aus in Potenzreihen entwickeln, unter der Voraussetzung, dass auch $P(x)$ in der Umgebung dieser Punkte sich durch eine Taylorsche Reihe darstellen lässt. Man sieht dann gleich, dass die asymptotischen Formeln an diesen Stellen nicht gelten.

Es sollen nun die zwei folgenden Fälle unterschieden werden:

$$(a)\ \left[\frac{W-P(x)}{c}\right]^2 > m^2c^2 \quad \text{und} \quad (b)\ \left[\frac{W-P(x)}{c}\right]^2 < m^2c^2.$$

Fall (a). Aus den Formeln (6) erhält man:

$$\psi_1 = \frac{e^{\pm\frac{2\pi imc}{h}\int\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{\mp\frac{1}{2}}, \qquad (9)$$

---

[1]) A. Zwaan, Intensitäten im Ca-Funkenspektrum, Diss. Utrecht, 1929, S. 33.

$$\psi_2 = \frac{e^{\pm\frac{2\pi imc}{h}\int\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{\pm\frac{1}{2}}, \tag{9'}$$

wo

$$\frac{W-P(x)}{mc^2}=\chi$$

gesetzt ist. Da dann, wie aus den Gleichungen (3) folgt,

$$\begin{aligned}\psi_2 &= -\left(\chi\pm\sqrt{\chi^2-1}\right)\psi_1,\\ \psi_1 &= -\left(\chi\mp\sqrt{\chi^2-1}\right)\psi_2\end{aligned} \tag{10}$$

ist, findet man leicht als erstes angenähertes Lösungspaar:

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{\psi}_1 &= C_1\,\frac{e^{\frac{2\pi imc}{h}\int\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{\frac{1}{2}},\\ \overset{(1)}{\psi}_2 &= -C_1\,\frac{e^{\frac{2\pi imc}{h}\int\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{11}$$

während das zweite, wie unmittelbar aus den Gleichungen (3) gefolgert werden kann, durch

$$\overset{(2)}{\psi}_1 = \overset{(1)*}{\psi}_2\,, \quad \overset{(2)}{\psi}_2 = \overset{(1)*}{\psi}_1 \tag{12}$$

gegeben ist.

F a l l (*b*). Da dann $\chi^2 < 1$ ist, findet man:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{e^{\pm\frac{2\pi mc}{h}\int\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\,e^{\mp\frac{i}{2}\arcsin\chi},\\ \psi_2 &= \frac{e^{\pm\frac{2\pi mc}{h}\int\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\,e^{\pm\frac{i}{2}\arcsin\chi}.\end{aligned} \tag{13}$$

Indem man beachtet, dass

$$i\ \arcsin\chi = ln\left(i\chi+\sqrt{1-\chi^2}\right) \tag{14}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

ist, findet man leicht mit Hilfe der Gleichungen (3) zwei folgende Lösungspaare:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1^{(1)} &= C_2 \frac{e^{\frac{2\pi mc}{h}\int\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\, e^{-\frac{i}{2}\arcsin\chi}, \\ \psi_2^{(1)} &= C_2 \frac{i\, e^{\frac{2\pi mc}{h}\int\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\, e^{\frac{i}{2}\arcsin\chi} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \psi_1^{(2)} &= C'_2 \frac{i\, e^{-\frac{2\pi mc}{h}\int\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\, e^{\frac{i}{2}\arcsin\chi}, \\ \psi_2^{(2)} &= C'_2 \frac{e^{-\frac{2\pi mc}{h}\int\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\, e^{-\frac{i}{2}\arcsin\chi}. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(Die Ausdrücke (11), (12), (15), (16) gelten nicht in der unmittelbaren Umgebung der Punkte $\chi = \pm 1$ oder $\chi = 0$ [1]).

Um die weiteren Rechnungen nicht zu komplizieren, wird im folgenden, dem Zweck dieser Arbeit entsprechend, vorausgesetzt, dass $P(x)$ eine nicht abnehmende Funktion von x ist. Man kann leicht die erhaltenen Resultate auch für den Fall, wo $P(x)$ nicht monoton ist, verallgemeinern.

Die Gleichungen

$$\chi = 1,\ \chi = 0,\ \chi = -1 \tag{17}$$

seien entsprechend durch x_1, x_2, x_3 erfüllt. Aus den hier formulierten Voraussetzungen folgt

$$x_1 < x_2 < x_3.$$

Für $x < x_1$ und $x > x_3$ (Fall *a*) sind die angenäherten Lösungssysteme (11) und (12), für $x_1 < x < x_3$ (Fall *b*) — die Lösungssysteme (15) und (16) zu benutzen.

Es ist bekannt, dass die Konstanten, die zur Darstellung derselben analytischen Funktion mittels asymptotischer Reihen benutzt werden,

[1]) H. A. Kramers, ZS. f. Phys. *39*, 828, 1926.

in verschiedenen Teilen der komplexen Ebene verschiedene Werte annehmen können; das ist das sogenannte Stokessche Phänomen. Es taucht also das Problem auf, die Werte der in den Formeln (11), (12), (15) und (16) auftretenden Konstanten so zu bestimmen, dass die in verschiedenen Bereichen zu benutzenden asymptotischen Formeln derselben exakten Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems (3) entsprechen. Die dazu benutzte Methode ist derjenigen von Kramers[1]) nachgebildet.

Es sei α der Wert von $\frac{dP(x)}{dx}$ im Punkte x_1, d. h.

$$W - P(x_1) = mc^2; \left[\frac{d\,P(x)}{dx}\right]_{x=x_1} = \alpha\,.$$

In der nächsten Umgebung von x_1 hat man angenähert:

$$P(x) = P(x_1) + \alpha\,(x - x_1) + \ldots \tag{18}$$

In der Nähe von x_1 kann man also anstatt der Gleichungen (3) die angenäherten Gleichungen

$$\frac{m\,c^2 - \alpha\,(x - x_1)}{c}\,\psi_1 + \frac{h}{2\pi i}\,\frac{d\,\psi_1}{d\,x} + m\,c\,\psi_2 = 0,$$

$$\frac{m\,c^2 - \alpha\,(x - x_1)}{c}\,\psi_2 - \frac{h}{2\pi i}\,\frac{d\,\psi_2}{d\,x} + m\,c\,\psi_1 = 0 \tag{19}$$

ansetzen. Werden die Bezeichnungen

$$\frac{m\,c^2 - \alpha\,(x - x_1)}{c}\sqrt{\frac{2\pi c}{h\alpha}} = \zeta; \qquad m\,c\sqrt{\frac{2\pi c}{h\alpha}} = j \tag{20}$$

eingeführt, dann nehmen die Gleichungen (19) die Gestalt

$$\zeta\,\psi_1 + i\,\frac{d\,\psi_1}{d\,\zeta} + j\,\psi_2 = 0, \qquad \psi_2 - i\,\frac{d\,\psi_2}{d\,\zeta} + j\,\psi_1 = 0 \tag{21}$$

an.

Die in der oben zitierten Arbeit des Verfassers gegebenen Lösungssysteme dieser Gleichungen sind:

$$\psi_1^{(1)} = D_{-\frac{j^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right), \tag{22}$$

[1]) In allen in dieser Arbeit gegebenen Formeln soll arc sin den Hauptwert der zyklometrischen Funktion $\left(\text{zwischen } 0 \text{ und } \frac{\pi}{2}\right)$ bezeichnen.

$$\psi_2^{(1)} = -\sqrt{\frac{j^2}{2i}}\, D_{-\frac{j^2 i}{2} - 1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)$$

und $$\psi_1^{(2)} = \psi_2^{(1)\,*}, \qquad \psi_2^{(2)} = \psi_1^{(1)\,*}. \tag{23}$$

Die Ausdrücke $D_n(z)$ bedeuten hier die sogenannten Funktionen des parabolischen Zylinders [1]). Man bekommt zwei neue Lösungspaare des Gleichungssystems (21), wenn man in diesen Gleichungen

$$\zeta = -\eta\ ; \qquad \psi_2 = -\varphi_2\ ; \qquad \psi_1 = \varphi_1$$

setzt. Man sieht dann leicht, dass diese neuen Lösungspaare durch:

$$\psi_1^{(3)} = D_{-\frac{j^2 i}{2}}\left(-\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right), \tag{24}$$

$$\psi_2^{(3)} = \sqrt{\frac{j^2}{2i}}\, D_{-\frac{j^2 i}{2} - 1}\left(-\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)$$

und: $$\psi_1^{(4)} = \psi_2^{(3)\,*}, \qquad \psi_2^{(4)} = \psi_1^{(3)\,*} \tag{25}$$

gegeben sind.

In analoger Weise kann man angenäherte Lösungssysteme der Gleichungen (3) für die Umgebungen der Punkte x_2 bzw. x_3 aufschreiben. An Stelle von j tritt dann

$$k = mc\sqrt{\frac{2\pi c}{h\beta}}; \quad \beta = P'(x_2), \tag{26}$$

bzw.

$$l = mc\sqrt{\frac{2\pi c}{h\gamma}}; \quad \gamma = P'(x_3) \tag{27}$$

auf.

Es sollen die im folgenden benutzten asymptotischen Ausdrücke für die hier gebrauchten Funktionen des parabolischen Zylinders angegeben werden. Es ist bekannt, dass diese Funktionen in zweifacher Weise definiert werden können. Für beliebige Werte von ζ hat man [2]):

---

[1]) Whittaker and Watson, A Course of Modern Analysis, p. 347, Cambridge, 1920.

[2]) Whittaker and Watson, l. c. S. 339 u. 347.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{k^2}{4i}}}{\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)} e^{\frac{i\zeta^2}{2}} \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{k^2}{4i}, \frac{1}{2}, -i\zeta^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}\right)} \frac{\zeta}{\sqrt{i}}\, {}_1F_1\left(-\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -i\zeta^2\right)\right\}, \quad (28)$$

$$-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\, D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = -\frac{k\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{k^2}{4i}-1}}{\sqrt{i}\,\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)} e^{\frac{i\zeta^2}{2}} \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -i\zeta^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)} \frac{\zeta}{\sqrt{i}}\, {}_1F_1\left(\frac{k^2}{4i}+1, \frac{3}{2}, -i\zeta^2\right)\right\}, \quad (29)$$

für

$$-\frac{\pi}{4} < arg\ \zeta < \frac{3\pi}{4}$$

dagegen gilt auch die Darstellung[1]):

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = -\frac{e^{\frac{\pi k^2}{4}}}{2\pi}\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{k^2}{4i}}\zeta \int_{\infty}^{-\frac{i}{2}+} \left(s+\frac{i}{2}\right)^{-\frac{k^2}{4i}-\frac{1}{2}} \left(s-\frac{i}{2}\right)^{\frac{k^2}{4i}} e^{-\zeta^2 s}\, ds, \quad (30)$$

$$-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\, D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = -\frac{k e^{\frac{\pi k^2}{4}}}{4\pi}\, i\, \Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{k^2}{4i}} \int_{\infty}^{-\frac{i}{2}+} \left(s+\frac{i}{2}\right)^{-\frac{k^2}{4i}-\frac{1}{2}} \left(s-\frac{i}{2}\right)^{\frac{k^2}{4i}-1} e^{-\zeta^2 s}\, ds. \quad (31)$$

Die Formeln (30), (31) werden im Folgenden für positive, dagegen die Formeln (28), (29) für negative ζ-Werte benutzt werden. Für grosse k-Werte nehmen die Formeln (28), (29) die Gestalt:

[1]) S. Szczeniowski, Zs. f. Phys. 73, 553, 1931.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,2^{\frac{k^2}{4i}}}{\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)}\left\{e^{\frac{i\zeta^2}{2}}\,{}_1F_1\left(-\frac{k^2}{4i},\frac{1}{2},-i\zeta^2\right) - k\zeta e^{\frac{i\zeta^2}{2}}\,{}_1F_1\left(-\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2},\frac{3}{2},-i\zeta^2\right)\right\}, \tag{32}$$

$$-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\,D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = \frac{i\sqrt{\pi}\,2^{\frac{k^2}{4i}}}{\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)}\times \left\{e^{\frac{i\zeta^2}{2}}\,{}_1F_1\left(-\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2},\frac{1}{2},-i\zeta^2\right) - k\zeta e^{\frac{i\zeta^2}{2}}\,{}_1F_1\left(-\frac{k^2}{4i}+1,\frac{3}{2},-i\zeta^2\right)\right\} \tag{33}$$

an, da dann, nach den Stirlingschen Formeln

$$\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{k\sqrt{2}}{2}\,\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}\right);\ \Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+1\right) = \frac{k\sqrt{2}}{2}\,\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right) \tag{34}$$

und ausserdem

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \tag{35}$$

ist.

Mit Hilfe der Formeln (30), (31) und (32), (33) kann man die asymptotischen Ausdrücke für die hier gebrauchten Funktionen des parabolischen Zylinders angeben.

Für positive ζ-Werte geht man von den Formeln (30), (31) aus.

1. Für $\zeta > k$ findet man mit Hilfe der von Sauter[1]) gegebenen Ausdrücke:

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)2^{\frac{k^2}{4i}}}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{k}{\zeta\sqrt{w}}\,\frac{e^{\frac{i\zeta^2 w}{2}-\frac{k^2 i}{4}\ln\frac{1+w}{1-w}}}{\sqrt{1-w}}, \tag{36}$$

$$-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\,D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = -\frac{\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)2^{\frac{k^2}{4i}}}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{k}{\zeta\sqrt{w}}\,\frac{e^{\frac{i\zeta^2 w}{2}-\frac{k^2 i}{4}\ln\frac{1+w}{1-w}}}{\sqrt{1+w}} \tag{36'}$$

---

[1]) F. Sauter, ZS. f. Phys. 69, 742, 1931.

$$w = \sqrt{1 - \frac{k^2}{\zeta^2}}.$$

2. Für $0 < \zeta < k$ kann man die asymptotischen Ausdrücke für die in (30) und (31) auftretenden Integrale mittels der Sattelpunktmethode berechnen. Die Rechnungen sind denen von S e x l [1]) analog. Man findet:

$$D_{\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = -\frac{e^{-\frac{\pi k^2}{4}}\,\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{\frac{k^2}{4i}}\, e^{-\frac{\zeta\sqrt{k^2-\zeta^2}}{2}-\frac{k^2+i}{2}\arcsin\frac{\zeta}{k}}}{2\sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{1-\frac{\zeta^2}{k^2}}} \tag{37}$$

$$-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\,D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = -\frac{i\,e^{-\frac{\pi k^2}{4}}\,\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)2^{\frac{k^2}{4i}}}{2\sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{1-\frac{\zeta^2}{k^2}}} \times$$

$$\times\, e^{-\frac{\zeta\sqrt{k^2-\zeta^2}}{2}-\frac{k^2-i}{2}\arcsin\frac{\zeta}{k}}. \tag{37'}$$

3. Für $\zeta \backsim k$ ist auch die der von S e x l nachgebildete Sattelpunktmethode anzuwenden. Es ist bequem, das Integrand in eine T a y l o r-sche Reihe nach den Potenzen von $\xi^2 - k^2$ vom Punkte k aus zu entwickeln. Es ergibt sich:

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = -\frac{\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)2^{\frac{k^2}{4i}}}{\pi\sqrt{2}\,(6k)^{2/3}}\, k\, e^{\frac{3\pi i}{4}}\left(1+e^{\frac{\pi i}{3}}\right) \times$$

$$\times\left\{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - e^{-\frac{\pi i}{3}}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{(6k)^{2/3}}\left(k^2-\zeta^2+i\right)\right\}, \tag{38}$$

$$-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\,D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = -\frac{\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)2^{\frac{k^2}{4i}}}{\pi\sqrt{2}\,(6k)^{2/3}}\, k\, e^{\frac{3\pi i}{4}} \times$$

$$\times\left(1+e^{\frac{\pi i}{3}}\right)\left\{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - e^{-\frac{\pi i}{3}}\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{(6k)^{2/3}}\left(k^2-\zeta^2-i\right)\right\}. \tag{38'}$$

Für negative ζ-Werte wendet man die Formeln (32) und (33) an. Die asymptotischen Ausdrücke für die in diesen Formeln auftretenden ent-

---

[1]) T. S e x l, ZS. f. Phys. 56, 72, 1929.

arteten hypergeometrischen Funktionen wurden von Sauter angegeben. Mit Hilfe seiner Formeln findet man leicht:

4. für $0 > \zeta > -k$:

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,2^{\frac{k^2}{4i}}}{\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{\zeta^2}{k^2}}}\,e^{\frac{\zeta^2}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\zeta^2}-1}-\frac{k^2+i}{2}\arcsin\frac{\zeta}{k}}\,, \tag{39}$$

$$-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\,D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)=$$
$$=\frac{i\sqrt{\pi}\,2^{\frac{k^2}{4i}}}{\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\zeta^2}{k^2}}}\,e^{\frac{\zeta^2}{2}\sqrt{\frac{k^2}{\zeta^2}-1}-\frac{k^2-i}{2}\arcsin\frac{\zeta}{k}}\,; \tag{39'}$$

5) für $\zeta < -k$:

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)=-\frac{k\sqrt{\pi}\,e^{\frac{\pi k^2}{4}}\,2^{\frac{k^2}{4i}}}{\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)\zeta\sqrt{w}}\left\{\frac{i\,e^{-\frac{i\zeta^2 w}{2}+\frac{k^2 i}{4}\ln\frac{1+w}{1-w}}}{\sqrt{1+w}}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{\frac{i\zeta^2 w}{2}-\frac{k^2 i}{4}\ln\frac{1+w}{1-w}}}{\sqrt{1-w}}\right\}; \tag{40}$$

$$-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\,D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)=-\frac{k\sqrt{\pi}\,e^{\frac{\pi k^2}{4}}\,2^{\frac{k^2}{4i}}}{\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)\zeta\sqrt{w}}\left\{\frac{i\,e^{-\frac{i\zeta^2 w}{2}+\frac{k^2 i}{4}\ln\frac{1+w}{1-w}}}{\sqrt{1-w}}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{\frac{i\zeta^2 w}{2}-\frac{k^2 i}{4}\ln\frac{1+w}{1-w}}}{\sqrt{1+w}}\right\}; \tag{40'}$$

6) für $\zeta \infty -k$ endlich:

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)=\frac{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\,2^{\frac{k^2}{4i}}}{\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{6}\,(k-\zeta)}{2\,(6\,k)^{2/3}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{(6\,k)^{2/3}}\,(k^2-\zeta^2+i)\right\}, \tag{41}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

$$-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\,D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)=\frac{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\,2^{\frac{k^2}{4i}}}{\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{6}\,(k-\zeta)}{2\,(6\,k)^{2/3}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)}{(6\,k)^{2/3}}\,(k^2-\zeta^2-i)\right\}. \qquad (41')$$

Die asymptotischen Ausdrücke für die Lösungssysteme (24) und (25) folgen unmittelbar aus denen für $D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)$, $-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\,D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)$ indem zu beachten ist, dass die Rollen der Gebiete $\zeta > 0$ und $\zeta < 0$ miteinander vertauscht werden müssen [1]).

Um nun die gesuchten Anschlussformeln für die asymptotischen Ausdrücke (11) — (12) und (15) — (16) zu erhalten, muss man die oben gefundenen asymptotischen Formeln für die Funktionen des parabolischen Zylinders mit den Ausdrücken vergleichen, in welche die Formeln (11) — (12) und (15) — (16) in der Nähe der kritischen Punkte x_1, x_3, x_3 übergehen. Man muss also in den letztgenannten Formeln

$$P(x) = P(x_1) + \alpha\,(x - x_1) + \cdots$$

u. s. w. ansetzen und dann die Bezeichnungen (20), (26) und (27) einführen. Um die Werte der zu findenden Konstanten zu fixieren, wird man dabei statt der unbestimmten Integrale

$$\int\sqrt{\chi^2-1}\;dx;\quad \int\sqrt{1-\chi^2}\,dx,$$

entsprechende bestimmte Integrale

$$\int_{x_1}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\;dx;\quad \int_{x_1}^{x}\sqrt{1-\chi^2}\;dx,$$

u. s. w., deren untere Grenze jeweils durch einen der kritischen Punkte gegeben ist, benutzen. Mit Hilfe der in dieser Weise erhaltenen Formeln, die hier der Kürze halber nicht angeführt sind, sowie der asymptotischen Formeln für die Funktionen des parabolischen Zylinders, kann man einen stetigen Anschluss der angenäherten Lösungen (11) — (12) und (15) — (16), die für verschiedene Gebiete gelten, aneinander erzielen. Wenn man nämlich von der angenäherten Lösung:

[1]) Die Formel (36) war auch in der schon zitierten Note des Verf. in ZS. f. Ph. angegeben. Der Faktor $\sqrt{1-w}$ im Nenner wurde dort aber versehentlich nicht hingeschrieben, was hiermit berichtigt sei.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

$$\psi_1 = -\frac{e^{-\frac{2\pi imc}{h}\int_{x_1}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\,(\chi+\sqrt{\chi^2-1})^{1/2}, \tag{42}$$

$$\psi_2 = \frac{e^{-\frac{2\pi imc}{h}\int_{x_1}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\,(\chi+\sqrt{\chi^2-1})^{-1/2}, \tag{42'}$$

die für das Gebiet $\frac{W-P(x)}{mc^2}=\chi>1$ gilt, ausgeht, so hat man für $0<\chi<1$:

$$\psi_1 = \frac{e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\,e^{-\frac{i}{2}\arcsin\chi}, \tag{43}$$

$$\psi_2 = i\,\frac{e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\,e^{\frac{i}{2}\arcsin\chi}. \tag{43'}$$

Für $-1<\chi<0$ ist dann das Lösungspaar:

$$\psi_1 = -\frac{2\pi e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_2}^{x}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\,e^{-\frac{i}{2}\arcsin\chi}, \tag{44}$$

$$\psi_2 = -\frac{2\pi i e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_2}^{x}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\,e^{\frac{i}{2}\arcsin\chi} \tag{44'}$$

zu gebrauchen und für $\chi<-1$ endlich bilden:

$$\psi_1 = \frac{2\pi e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{-\frac{2\pi imc}{h}\int_{x_3}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\,(\chi+\sqrt{\chi^2-1})^{1/2} -$$

$$-\frac{2\pi i e^{\frac{2\pi m c}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{\frac{2\pi i m c}{h}\int_{x}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{-1/2}, \tag{45}$$

$$\psi_2=-\frac{2\pi e^{\frac{2\pi m c}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{-\frac{2\pi i m c}{h}\int_{x_3}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi-1}\right)^{-1/2}+$$

$$+\frac{2\pi i e^{\frac{2\pi m c}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{\frac{2\pi i m c}{h}\int_{x_3}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi-1}\right)^{1/2} \tag{45'}$$

das richtige Lösungspaar.

Analog, wenn man von dem Lösungspaar

$$\psi_1=\frac{e^{\frac{2\pi i m c}{h}\int_{x_3}^{x}\sqrt{\chi^2-}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{-1/2}, \tag{46}$$

$$\psi_2=-\frac{e^{\frac{2\pi i m c}{h}\int_{x_3}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{46'}$$

das im Gebiet $\chi < -1$ gilt, ausgeht, so hat man für $0 > \chi > -1$:

$$\psi_1=\frac{ie^{-\frac{2\pi m c}{h}\int_{x_3}^{x}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\,e^{\frac{i}{2}\arcsin\chi}, \tag{47}$$

$$\psi_2=\frac{e^{-\frac{2\pi m c}{h}\int_{x_3}^{x}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\,e^{-\frac{i}{2}\arcsin\chi}; \tag{47'}$$

weiter gilt für $0 < \chi < 1$

$$\psi_1=-\frac{2\pi i e^{\frac{2\pi m c}{h}\int_{x_2}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{-\frac{2\pi m c}{h}\int_{x_2}^{x}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\,e^{\frac{i}{2}\arcsin\chi}, \tag{48}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

$$\psi_2 = -\frac{2\pi e}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_2}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}\; e^{-\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_2}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{1-\chi^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\arcsin\chi} \tag{48'}$$

und endlich ist für $\chi > 1$

$$\psi_1 = -\frac{2\pi ie}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}\; e^{-\frac{2\pi imc}{h}\int_{x_1}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{2\pi e}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}\; e^{\frac{2\pi imc}{h}\int_{x_1}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{49}$$

$$\psi_2 = \frac{2\pi ie}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}\; e^{-\frac{2\pi imc}{h}\int_{x_1}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} -$$

$$-\frac{2\pi e}{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2}\,\frac{e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}\; e^{\frac{2\pi imc}{h}\int_{x_1}^{x}\sqrt{\chi^2-1}\,dx}}{\sqrt[4]{\chi^2-1}}\left(\chi+\sqrt{\chi^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{49'}$$

zu gebrauchen. Man erhält zwei neue Gruppen der Anschlussformeln, wenn man in den oben gefundenen Formeln die Funktionen ψ_1 und ψ_2 miteinander vertauscht und zu konjugiert komplexen Ausdrücken übergeht.

Nach der Stirlingschen Formel ist für grosse Werte von k:

$$\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\pi k^2}{8}}\, 2^{-\frac{ik^2}{2}}\, k^{\frac{ik^2}{2}}\, e^{-\frac{ik^2}{4}} \tag{50}$$

und weiter

$$\left|\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)\right|^2 = 2\pi\, e^{-\frac{\pi k^2}{4}}. \tag{51}$$

Es folgt also aus den oben gefundenen Anschlussformeln, dass einer im Gebiete $\chi > 1$ fortschreitenden Welle im Gebiete $\chi < -1$ zwei in entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen als Fortsetzung

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

entsprechen. Die Amplituden dieser Wellen sind in der hier benutzten Näherung einander gleich und um den Faktor

$$e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}$$

grösser als die Amplitude der Welle im Gebiet $\chi > 1$. Umgekehrt, einer im Gebiete $\chi < -1$ fortschreitenden Elektronenwelle entsprechen als Fortsetzung im Gebiete $\chi > 1$ zwei in entgegengesetzten Richtungen fortschreitende Wellen, deren Amplituden näherungsweise einander gleich und im Verhältnis

$$e^{\frac{2\pi mc}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,dx}$$

grösser als die Amplitude der Welle im Gebiete $\chi < -1$ sind.

Mit Hilfe der oben gegebenen Anschlussformeln kann man das Problem des Durchgangs von Elektronen durch eine Potentialenergieschwelle in das Gebiet der negativen Energiewerte in allgemeiner Weise lösen.

Es seien drei Gebiete unterschieden

I, $x < x_0$, $P(x) = P(x_0) = P_1$;
II, $x_0 < x < x_0'$;
III, $x > x_0'$, $P(x) = P(x_0') = P_2$.

Im Gebiete II sei $P(x)$ eine nichtabnehmende, stetige, sonst beliebige, Funktion von x. Ausserdem sei

$$\frac{W-P_1}{mc^2} > 1; \qquad \frac{W-P_2}{mc^2} < -1.$$

Im Gebiete I können die Gleichungen (3) mittels des Ansatzes

$$\psi_1 = r\, e^{\pm\frac{2\pi i p_1 x}{h}} \qquad \psi_2 = s\, e^{\pm\frac{2\pi i p_1 x}{h}} \tag{52}$$

gelöst werden. Es gilt:

$$\left(\frac{W-P_1}{c}\right)^2 = m^2c^2 + p_1^2, \qquad r = -\frac{mcs}{\frac{W-P_1}{c} \pm p_1} \quad (53)\ (54)$$

Analoge Gleichungen gelten im Gebiet III.

Die Dichte des Elektronenstromes ist durch

$$S = ec\varphi\alpha_1\psi = ec(\psi_1\psi_1^* - \psi_2\psi_2^*) \tag{55}$$

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

gegeben. Man findet, dass im Gebiete I positive p_1-Werte einem Strom von Elektronen in positiver x-Richtung, negative dagegen — einem Strom in negativer x-Richtung entsprechen. Im Gebiete III besteht ein gerade umgekehrtes Verhältnis zwischen dem Zeichen von p und der Richtung des Stromes der Elektronen.

An den Grenzen der Gebiete I und II, sowie von II und III, muss man die Wellenfunktionen stetig aneinander anschliessen. Aus den Gleichungen (3) folgt dann aber unmittelbar, dass auch die ersten Ableitungen der Wellenfunktionen sich stetig an den Grenzen aneinanderschliessen. Es folgt auch, dass die Stromdichte S einen konstanten und überall gleichen Wert hat.

Um den Durchlasskoeffizienten der Potentialenergieschwelle zu berechnen, muss man im Gebiete III nur die durchgehende, in der positiven x-Richtung fortschreitende Elektronenwelle ansetzen. In den Gebieten II und I muss man dann aber allgemein die entsprechenden Lösungen der Wellengleichungen, die die Grenzbedingungen erfüllen sollen, als Summen von je zwei in entgegengesetzten Richtungen laufenden Wellen ansetzen.

Man findet leicht, wenn man im Gebiete II für $\chi > 1$ die Lösung (42), (42′) in Betracht nimmt, dass dann

$$S = 2\,ec$$

ist. Diese Lösung entspricht also einem Strom von Elektronen in der negativen x-Richtung. Sie wird im folgenden der Kürze halber mit

$$\psi_1 = f, \qquad \psi_2 = g$$

bezeichnet. Ein Strom der Elektronen in der positiven x-Richtung ist dann durch

$$\psi_1 = g^*, \qquad \psi_2 = f^*$$

gegeben. Die Werte von f und g in den Punkten x_0 und x_0' werden als f_1, g_1 bzw. f_2, g_2 bezeichnet.

Bei der Lösung des vorliegenden Problems müssen also infolge der Stetigkeit der Wellenfunktionen an den Grenzen der betrachteten Gebiete die Beziehungen:

$$a_1 e^{\frac{2\pi i p_1 x_0}{h}} + b_1 e^{-\frac{2\pi i p_1 x_0}{h}} = \alpha f_1 + \beta g_1^*, \tag{56}$$

$$-\frac{a_1}{mc}\left(\frac{W-P_1}{c}+p_1\right)e^{\frac{2\pi i p_1 x_0}{h}} - \frac{b_1}{mc}\left(\frac{W-P_1}{c}-p_1\right)e^{-\frac{2\pi i p_1 x_0}{h}} = \alpha g_1 + \beta f_1^*$$

und

$$\alpha f_2 + \beta g_2^* = b_2 e^{-\frac{2\pi i p_2 x_0'}{h}}, \tag{57}$$

$$\alpha g_2 + \beta f_2^* = -\frac{b_2}{mc}\left(\frac{W-P_2}{c} - p_2\right) e^{-\frac{2\pi i p_2 x_0'}{h}} \tag{57'}$$

erfüllt werden, in welchen a_1, b_1, α, β, b_2 die zu bestimmenden Konstanten bedeuten.

Der einfallende und der reflektierte Elektronenstrom sind entsprechend durch die Formeln:

$$S_i = -e c a_1 a_1^* p_1 \left(p_1 + \frac{W-P_1}{c}\right), \tag{58}$$

$$S_r = -e c b_1 b_1^* p_1 \left(p_1 - \frac{W-P_1}{c}\right), \tag{59}$$

der durchgehende Elektronenstrom dagegen durch:

$$S_d = -e c b_2 b_2^* p_2 \left(p_2 - \frac{W-P_2}{c}\right) \tag{60}$$

dargestellt. Der Durchlasskoeffizient ist also gleich:

$$D = \frac{S_d}{S_i} = \frac{b_2 b_2^* p_2}{a_1 a_1^* p_1} \left(\frac{p_2 c - W + P_2}{p_1 c + W - P_1}\right). \tag{61}$$

Die Ausdrücke für f_1, g_1, f_2, g_2 sind durch die Formeln (42), (42') und (45), (45') gegeben. Um die Rechnungen zu vereinfachen wird man

$$W - P_1 = -(W - P_2); \qquad P_1 + P_2 = 2W$$

ansetzen, es folgt dann $p_1 = p_2$. Man kann auch der Kürze halber die Bezeichnungen

$$\int_{x_1}^{x_0} \sqrt{\chi^2 - 1}\, dx = \lambda_1; \quad \int_{x_3}^{x_0'} \sqrt{\chi^2 - 1}\, dx = \lambda_2;$$

einführen. Wenn man beachtet, dass wegen der räumlichen Konstanz des Elektronenstromes

$$f_2 f_2^* - g_2 g_2^* = f_1 f_1^* - g_1 g_1^* = 2$$

ist, so geben die Relationen (56) und (57), (57') nach einigen Rechnungen, die den von Sauter[1]) angegebenen ganz analog sind,

$$a_1 = -b_2 e^{-\frac{2\pi i}{h} p_1 (x_0 + x_0') + \frac{2\pi i m c}{h} (\lambda_1 + \lambda_2)} e^{\frac{2\pi m c}{h} \int_{x_1}^{x_3} \sqrt{1-\chi^2}\, dx}, \tag{62}$$

woraus nach (61)

---

[1]) F. Sauter, ZS. f. Phys. 69, 742, 1931.

$$D = e^{-\frac{4\pi m c}{h}\int_{x_1}^{x_3}\sqrt{1-\chi^2}\,d x} \tag{63}$$

folgt.

Man sieht, dass merkliche Werte von D nur dann erwartet werden können, wenn die Länge der Strecke $x_3 - x_1$ mit $\frac{h}{mc}$ vergleichbar ist, d. h., wenn der Potentialenergieanstieg um $2\,mc^2$ genügend steil erfolgt, im Einklang mit der anfangs zitierten Vermutung Bohrs und den Resultaten von Solomon. Übrigens gelten dann die hier benutzten angenäherten Formeln nicht mehr, wie schon früher (S. 367) bemerkt worden ist. Für $P(x) = e F x$ und $P(x) = \frac{P_0}{2}\, tgh\, \frac{a x}{2}$ gibt die Formel (63), wie man leicht nachrechnen kann, die Sauterschen Resultate wieder.

Mit Hilfe der in vorliegenden Arbeit gegebenen angenäherten Formeln kann man nicht nur das Problem des Durchgangs von Elektronen in das Gebiet der negativen Energiewerte, sondern auch das allgemeine Problem des Durchgangs durch beliebig gestaltete Potentialenergieschwellen bei Anwendung der relativistischen Diracschen Wellengleichung auf angenäherte Weise lösen.

Die in dieser Arbeit hilfsweise gebrauchten Funktionen des parabolischen Zylinders, die der relativistischen Bewegung der Elektronen in einem homogenen elektrischen Felde entsprechen, können leicht an Besselsche Funktionen, die zur unrelativistischen Beschreibung derselben Bewegung benutzt werden, angeschlossen werden. Die Funktionen

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right); \quad D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)$$

erfüllen die Gleichung

$$\frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + (\zeta^2 - k^2 \mp i)\,\psi = 0, \tag{64}$$

in welcher das obere Zeichen der ersten, das untere der zweiten Funktion entspricht. Man kann die relativistischen Korrektionen vernachlässigen und zu einer unrelativistischen Betrachtungsweise, d. h. zur Schrödingerschen Wellengleichung des Problems, übergehen, wenn $\zeta - k$ klein gegen k ist. Man hat dann

$$\zeta^2 - k^2 \cong 2k\,(\zeta - k),$$

oder, wenn man $\zeta - k = \eta$ setzt und i gegen η vernachlässigt:

$$\frac{d^2\psi}{d\eta^2} + 2k\eta\psi = 0. \tag{65}$$

Dies ist die Schrödingersche Gleichung, die den Diracschen Gleichungen (21) entspricht und die bekanntlich mittels Besselscher Funktionen integriert werden kann. Es ist nämlich:

$$\psi = \eta^{1/2} Z_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{2k}\,\eta^{3/2}\right), \tag{66}$$

wo $Z_{1/3}$ eine beliebige Zylinderfunktion der Ordnung $1/3$ bezeichnet. Wenn man speziell als $Z_{1/3}$ die erste Hankelsche Funktion der Ordnung $1/3$, d. h. $H^{(1)}_{1/3}$ wählt so findet man in der Nähe von $\eta = o$:

$$\eta^{1/2} H^{(1)}_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{2k}\,\eta^{3/2}\right) = -\frac{i}{\pi\sqrt[6]{\frac{2k}{9}}}\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right) - e^{-\frac{\pi i}{3}}\sqrt[3]{6k}\,\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)\eta + \cdots\right\} \tag{67}$$

Die Formeln (38) und (38') ergeben aber für die nächste Umgebung von $\zeta = k$, d. h. $\eta = 0$, unter den oben gemachten Vernachlässigungen:

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\tfrac{2}{i}}\right) = -\sqrt{\tfrac{k^2}{2i}}\, D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\tfrac{2}{i}}\right) =$$

$$= -\frac{\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right).2^{\frac{k^2}{4i}}}{\pi\sqrt{2}\,(6k)^{2/3}}\, k\, e^{\frac{3\pi i}{4}}\left(1+e^{\frac{\pi i}{3}}\right)\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right) - e^{-\frac{\pi i}{3}}\sqrt[3]{6k}\,\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)\eta + \cdots\right\} \tag{68}$$

Man sieht daraus, dass für $\zeta \to k$, $D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)$ und $-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)$

beide in:

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{k^2}{4i}+\frac{1}{2}\right)2^{\frac{k^2}{4i}}}{6}\sqrt{k}\, e^{\frac{\pi i}{4}}\left(1+e^{\frac{\pi i}{3}}\right)\eta^{1/2} H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{2k}\,\eta^{3/2}\right) \tag{69}$$

übergehen.

In analoger Weise erhält man in der Umgebung von $\zeta = -k$, indem man $\zeta + k = \xi$ einsetzt:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - 2k\xi\psi = o, \tag{70}$$

woraus

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. I (1932) Fasc. 3

$$\psi = (-\xi)^{1/2} Z_{1/3}\left[\frac{2}{3}\sqrt{2k}\,(-\xi)^{3/2}\right] \tag{71}$$

folgt.

Die Formeln (41) und (41′) ergeben unter denselben Vernachlässigungen für $\zeta \to -k$:

$$D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) = -\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\, D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi k^2}{4}}\, 2^{\frac{k^2}{4i}}\, e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{6}\,.\,2k}{\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot(6k)^{2/3}}\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)+\sqrt[3]{6k}\,\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)\xi+\dots\right\} \tag{72}$$

Nun findet man:

$$(-\xi)^{1/2}\left\{J_{-1/3}\left[\frac{2}{3}\sqrt{2k}\,(-\xi)^{3/2}\right]-J_{1/3}\left[\frac{2}{3}\sqrt{2k}\,(-\xi)^{3/2}\right]\right\} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\pi\sqrt[6]{\frac{2k}{9}}}\times$$

$$\times\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{3}\right)+\sqrt[3]{6k}\;\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)\xi+\dots\right\}, \tag{73}$$

woraus folgt, dass für $\zeta \to -k$, $D_{-\frac{k^2 i}{2}}\left(\zeta\sqrt{\frac{2}{i}}\right)$ und

$$-\sqrt{\frac{k^2}{2i}}\,D_{-\frac{k^2 i}{2}-1}\left(\xi\sqrt{\frac{2}{i}}\right)$$ beide in:

$$\frac{\pi\, e^{\frac{\pi k^2}{4}}\, 2^{\frac{k^2}{4i}}\, e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{6k}}{9\,\Gamma\left(\frac{k^2 i}{4}+\frac{1}{2}\right)}(-\xi)^{1/2}\left\{J_{-1/3}\left[\frac{2}{3}\sqrt{2k}\,(-\xi)^{3/2}\right]-\right.$$

$$\left.-J_{1/3}\left[\frac{2}{3}\sqrt{2k}\,(-\xi)^{3/2}\right]\right\} \tag{74}$$

übergehen. In den Formeln (73) und (74) bezeichnen $J_{1/3}$ und $J_{-1/3}$ gewöhnliche Besselsche Funktionen von der Ordnung $^1/_3$.

Institut für theoretische Physik der Universität Lwów.

Eingegangen am 7. November 1932.

A n m e r k u n g. Diese Arbeit wurde der polnischen Akademie der Wissenschaften in Krakau in der Sitzung vom 11. Juni d. J. vorgelegt. Unmittelbar vor der Drucklegung der Abhandlung erhielt der Verfasser von der Arbeit des Herrn W. P a u l i, welche inzwischen in „Helvetica Physica Acta" erschienen ist (W. P a u l i, D i r a c s Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik, Helv. Phys. Acta 5, 179–199, 1932.) und welche dieselben Themata behandelt, Kenntnis. Von Herrn W. P a u l i wurde auch die W e n t z e l - B r i l l o u i n sche Methode bei der D i r a c schen Gleichung im eindimensionalen Falle angewandt. Die entsprechenden asymptotischen Lösungen, die in verschiedenen Gebieten gelten, werden mittels einer der von A. Z w a a n (loc. cit.) gebrauchten analogen Methode aneinander gepaart. Die erhaltenen Resultate werden von Herrn P a u l i zur Behandlung des Übergangs von Elektronen durch eine Potentialschwelle in das Gebiet negativer Energie benutzt, wobei er identische Resultate mit denjenigen des Verfassers bekommt.

ACTA PHYSICA POLONICA Vol. 1 (1932) Fasc. 3